第七章

「圓上不相交之弦」與「相異二元樹」的對應關係

在這一章裏，我們一樣想用**對射函數**探討「**圓上不相交之弦**」與「**相異二元樹**」之間的對應關係。

(I) 對射函數的建立（見〔4〕*P*.5）

設 T 爲有 n 個**節點**的相異**二元樹**所成的集合；

S 爲圓上有 $2n$ 個點連接成**不相交弦**所成的集合，

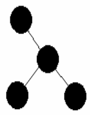
定義對應函數 $f: T \rightarrow S$ ，依據下列步驟來建構 $S=f(T)$

1．集合 T 中**二元樹**裏的一個**節點**對應到集合 S 中之一條**弦**。

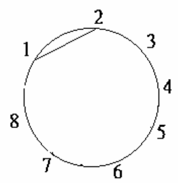
2．集合 T 中**二元樹之樹根**（*root*）對應到有**編號最小**的**弦**，且稱此弦爲**根弦**。

3．集合 T 中位於**右子樹**裏的**節點**對應到**根弦**之**右邊**的**弦**；位於**左子樹**裏的**節點**對應到**根弦**之**左邊**的**弦**。

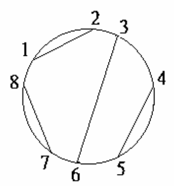
$\boxed{\text{例 1}}$：



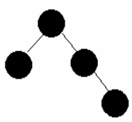
有 4 個**節點**，所以圓上有 8 個點，
因爲**節點**皆位於**樹根**之右邊，
所以**樹根**對應的爲編號 1 與 2 之**弦**。



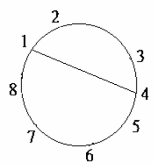
下一個**節點**擁有右、左子樹裡各一個**節點**，
所以編號 3 與 6 要連成**弦**。



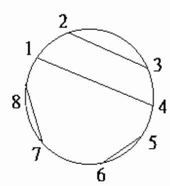
$\boxed{\text{例 2}}$：



有 4 個**節點**，所以圓上有 8 個點，
因爲**樹根**擁有右 2 個**節點**、左 1 個**節點**，
所以**樹根**對應的爲編號 1 與 4 之**弦**。



而**左子樹**裡的那一個**節點**爲編號 2 與 3 之**弦**，
右子樹的那兩個**節點**皆位於右邊，
所以編號 5 與 6 要連線，編號 7 與 8
之**弦**才會在其右邊。



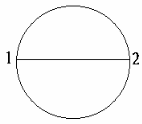
(II) f 是 1 對 1 且映成（*onto*）函數

我們將證明所定義的函數 f 是 1 對 1 且映成（*onto*）。

(i) f 是 1 對 1 函數：即若 T 集合中有二個元素 $\bar{t}_n$、$\hat{\bar{t}}_n$，使得 $f(\bar{t}_n)=f(\hat{\bar{t}}_n)=\bar{s}_n$，則 $\bar{t}_n=\hat{\bar{t}}_n$ 恆成立，其中 $\bar{s}_n$ 為圓上有 n 條**不相交之弦**。

(ii) f 是映成（*onto*）函數：對於集合 S 中任意一個元素 $\bar{s}_n$，在集合 T 中皆存在一個元素 $\bar{t}_n$ 具有 n 個**節點**的相異**二元樹**，使得 $f(\bar{t}_n)=\bar{s}_n$

我們對 $\bar{s}_n$ 的弦數 n 做歸納法：

（1）$n=1$ 時，即集合 S 中只有一個元素 $\bar{s}_1=$ 

，

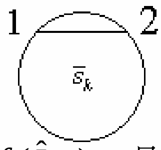
而 T 集合中也只有一個元素 $\bar{t}_1=$●，

根據函數 f 的定義知道 $f(\bar{t}_1)=\bar{s}_1$，所以函數 f 是 1 對 1 且映成（*onto*）函數。

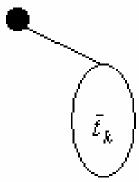
（2）假設 $n=1，2，\cdots，k$ 時，函數 f 是 1 對 1 且映成（*onto*）函數。

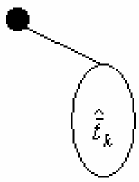
（3）當 $n=k+1$ 時，

由集合 T 中**樹根**（*root*）所對應到的**根弦**之位置來討論：即與編號 1 形成**弦**的編號 $2l$ 之位置，其中 $l=1，2，\cdots，k，k+1$ 。

① 若 $l=1$ 時，即 $\bar{s}_{k+1}=$ 

，其中 $\bar{s}_k$ 表示圓上有 k 條**不相交之弦**。

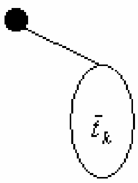
(i) 已知 $\bar{s}_{k+1}=f(\bar{t}_{k+1})=f(\hat{\bar{t}}_{k+1})$，且 $\bar{t}_{k+1}=$ 

，$\hat{\bar{t}}_{k+1}=$ 

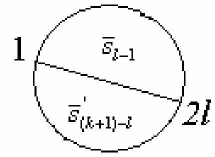
則由函數 f 之定義知 $f(\bar{t}_k)=\bar{s}_k=f(\hat{\bar{t}}_k)$，

又由（2）之歸納假設知道 $\bar{t}_k=\hat{\bar{t}}_k$，故得證 $\bar{t}_{k+1}=\hat{\bar{t}}_{k+1}$，即證明了函數 f 是 1 對 1 函數，其中 $\bar{t}_k$、$\hat{\bar{t}}_k$ 分別表示各有 k 個**節點**的相異**二元樹**。

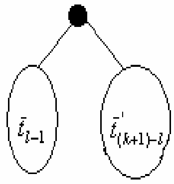
(ii) 由（2）之歸納假設知道，集合 T 中存在一個元素 $\bar{t}_k$，使得 $f(\bar{t}_k)=\bar{s}_k$

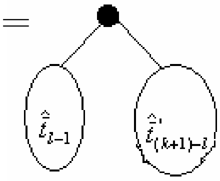
令 $\bar{t}_{k+1}=$ 

，則 $\bar{t}_{k+1}$ 是有 $k+1$ 個節點的相異**二元樹**，且 $f(\bar{t}_{k+1})=\bar{s}_{k+1}$，即證明了函數 f 是映成（*onto*）函數。

② 若 $2 \le l \le k$ 時，即 $\bar{s}_{k+1}=$ 

其中 $\bar{s}_j$ 、$\bar{s}'_j$ 分別表示圓上各有 j 條**不相交之弦**

(i) 已知 $\bar{s}_{k+1}=f(\bar{t}_{k+1})=f(\hat{\bar{t}}_{k+1})$，且 $\bar{t}_{k+1}=$ 

，$\hat{\bar{t}}_{k+1}=$ 

則由函數 f 之定義知 $f(\bar{t}_{l-1})=\bar{s}_{l-1}=f(\hat{\bar{t}}_{l-1})$，且 $f(\bar{t}'_{(k+1)-l})=\bar{s}_{(k+1)-l}=f(\hat{\bar{t}}'_{(k+1)-l})$

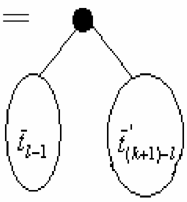
又 $\because\ 1 \le l-1 \le k-1$，且 $1 \le k+1-l \le k-1$，$\therefore$ 由（2）之歸納假設知道，

$\bar{t}_{l-1}=\hat{\bar{t}}_{l-1}$ 及 $\bar{t}'_{(k+1)-l}=\hat{\bar{t}}'_{(k+1)-l}$，故得證 $\bar{t}_{k+1}=\hat{\bar{t}}_{k+1}$，即證明了 f 是 1 對 1 函數；

其中 $\bar{t}_j$ 、$\bar{t}'_j$ 、$\hat{\bar{t}}_j$ 、$\hat{\bar{t}}'_j$ 分別表示各有 j 個**節點**之相異**二元樹**。

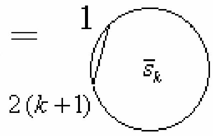
(ii) $\because\ 1 \le l-1 \le k-1$，且 $1 \le (k+1)-l \le k-1$，$\therefore$ 由（2）之歸納假設知道：

存在元素 $\bar{t}_{l-1}$，使得 $f(\bar{t}_{l-1})=\bar{s}_{l-1}$，及存在元素 $\bar{t}'_{(k+1)-l}$，使得 $f(\bar{t}'_{(k+1)-l})=\bar{s}_{(k+1)-l}$

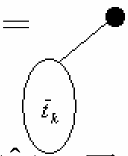
令 $\bar{t}_{k+1}=$ 

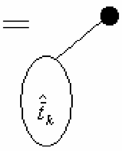
，則 $\bar{t}_{k+1}$ 爲有 $k+1$ 個**節點**的相異**二元樹**，而且 $f(\bar{t}_{k+1})=\bar{s}_{k+1}$。

即證明了函數 f 是映成（*onto*）函數。

③ 若 $l=k+1$ 時，即 $\bar{s}_{k+1}=$ 

，其中 $\bar{s}_k$ 表示圓上有 k 條**不相交之弦**。

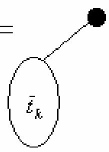
(i) 已知 $\bar{s}_{k+1}=f(\bar{t}_{k+1})=f(\hat{\bar{t}}_{k+1})$，且 $\bar{t}_{k+1}=$ 

，$\hat{\bar{t}}_{k+1}=$ 

則由函數 f 之定義知 $f(\bar{t}_k)=\bar{s}_k=f(\hat{\bar{t}}_k)$，又由（2）之歸納假設知道 $\bar{t}_k=\hat{\bar{t}}_k$，

故得證 $\bar{t}_{k+1}=\hat{\bar{t}}_{k+1}$，即證明了函數 f 是 1 對 1 函數，其中 $\bar{t}_k$ 與 $\hat{\bar{t}}_k$ 分別表示各有 k 個**節點**的相異**二元樹**。

(ii) 由（2）之歸納假設知道，集合 T 中存在一個元素 $\bar{t}_k$，使得 $f(\bar{t}_k)=\bar{s}_k$

令 $\bar{t}_{k+1}=$ 

，則 $\bar{t}_{k+1}$ 是有 $k+1$ 個**節點**的相異**二元樹**，且 $f(\bar{t}_{k+1})=\bar{s}_{k+1}$，

即證明了函數 f 是映成（*onto*）函數。

由以上之證明可知：f 是 1 對 1 且映成（*onto*）函數。