第二章

「n 個運算符號∗之結合運算」與「正規中括號」的對應關係

一．問題（見〔2〕$P.279$）：

若有 n 個運算符號∗，n＋1 個字元，可進行幾種不同的結合運算？ $$\text{đ}_1 * \text{đ}_2 * \text{đ}_3 * \cdots * \text{đ}_{n-1} * \text{đ}_n * \text{đ}_{n+1}$$

我們假設有a_n種，且最後一個運算符號∗爲第 i 個，並以⊛表示

$$(\text{đ}_1 * \text{đ}_2 * \cdots * \text{đ}_i) \circledast (\text{đ}_{i+1} * \cdots * \text{đ}_n * \text{đ}_{n+1})$$

若規定a_0＝1，則$a_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i-1}a_{n-i}$ ，$n \geq 1$

令$a = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ ，則$a^2 = \sum_{n\geq 0} A_n x^n$ ，其中 $A_n = \sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i}$

$$\therefore\ a = a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n x^n = 1 + \sum_{n\geq 1}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{i-1}a_{n-i}\Big)x^n = 1 + x\sum_{n\geq 1}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{i-1}a_{n-i}\Big)x^{n-1}$$

$$= 1 + x\sum_{n\geq 1} A_{n-1}x^{n-1} = 1 + x\sum_{n\geq 0} A_n x^n = 1 + xa^2$$

$$\Rightarrow\ xa^2 - a + 1 = 0 \quad \Rightarrow\ x^2a^2 - xa + x = 0 \quad \Rightarrow \text{令} b = xa\text{，則} b^2 - b + x = 0$$

$$\Rightarrow\ b = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}\ ,$$

$$\text{其中} \sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n\geq 0} C_n^{\frac{1}{2}} (-4x)^n = C_0^{\frac{1}{2}} + \sum_{n\geq 1} C_n^{\frac{1}{2}} (-4x)^n$$

$$= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\ldots[\frac{1}{2}-(n-1)]}{n\,!}(-1)^n 2^n 2^n x^n = 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{n\,!}(-1)\,2^n x^n$$

$$= 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-2)}{n\,!\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-2)}(-1)\,2^n x^n = 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{(2n-2)!}{n\,!(n-1)!}(-1)2x^n$$

$$\Rightarrow\ b = \frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2} = \frac{1 \pm [1 + \sum_{n\geq 1}\frac{(2n-2)!}{n\,!(n-1)!}(-1)2x^n]}{2}$$ ，∵b 的第一項爲 x，∴取負號

$$\text{得 } b = \frac{\sum_{n\geq 1}\frac{(2n-2)!}{n\,!(n-1)!}2x^n}{2} = \sum_{n\geq 1}\frac{(2n-2)!}{n\,!(n-1)!}x^n$$ ，由 $b = xa \ \Rightarrow\ x\sum_{n\geq 1}\frac{(2n-2)!}{n\,!(n-1)!}x^{n-1} = xa$

$\therefore a=\sum_{n\geq 1}\frac{(2n-2)!}{n\,!(n-1)!}x^{n-1}=\sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{(n+1)!\;n\;!}x^{n}$ ，即 $a=\sum_{n\geq 0}a_n x^n=\sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{(n+1)!\;n\;!}x^{n}$

$\therefore\ a_n=\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}=\frac{1}{n+1}C_n^{2n}$ ，$n\geq 0$

即有 n 個運算符號＊，$n+1$ 個字元，可進行 $\frac{1}{n+1}C_n^{2n}$ 種不同的結合運算。

$\frac{1}{n+1}C_n^{2n}$ 這個數稱爲*Catalan*數，在組合學中時常出現。這是<u>比利時</u>數學家*Catalan*在 1838 年解決問題所得到的數列：1，2，5，14，42，…。所以，我們就稱「n 個運算符號＊之結合運算」爲*Catalan*族成員之一。

二．正規中括號

括號型如【】稱爲一組**中括號**。若 n 組**中括號**符合下列條件：（見〔7〕*P*.256）

從左往右看，右中括號的個數不能比左中括號的個數多。

我們稱此 n 組括號爲**正規中括號**。例如：【】爲 1 組**正規中括號**；【】【】和【【】】爲 2 組**正規中括號**。

假設 n 組**正規中括號**的所有可能個數爲 b_n 個，則 $b_1=1$，$b_2=2$；$b_3=5$ 如下所示：

$\boxed{1}$ 【】【】【】　$\boxed{2}$ 【【】】【】　$\boxed{3}$ 【】【【】】　$\boxed{4}$ 【【】【】】　$\boxed{5}$ 【【【】】】

我們考慮最左邊的左中括號，所形成的**正規中括號**，此時的右中括號可能有三種情形：

① 【 】【　　】　② 【【　　】】【【　　】】　③ 【 【　　】 】

$n-1$ 組　　$i-1$ 組　$n-i$ 組　$i\geq 2$　　$n-1$ 組

我們規定：$b_0=1$，則 $b_n=b_0b_{n-1}+b_1b_{n-2}+\cdots+b_{n-1}b_0$ ，$n\geq 1$，即 $b_n=\sum_{i=1}^{n}b_{i-1}b_{n-i}$ ，$n\geq 1$

仿 *P*.2 之推導，我們可得 $b_n=\frac{1}{n+1}C_n^{2n}$ 爲 *Catalan* 數，所以也爲 *Catalan* 族一員。

三・對射函數之證明

我們欲用對射函數，找出 *Catalan* 族成員：「n 個**運算符號∗之結合運算**」與「**正規中括號**」間的一一對應關係。

(I) 對射函數的建立（見〔4〕*P*.5）

設 A 爲有 n 個**運算符號∗**可進行不同的**結合運算**所成的集合；

B 爲 n 組**正規中括號**所成的集合；

定義對應函數 $f: A \to B$，依據下列步驟來建構 $B=f(A)$

① A 集合中的每一個**運算符號∗**皆對應到 B 集合中一組**正規中括號【】**。

② A 集合中位於最後運算符號⊛之**左邊**的**運算符號∗**所對應之正規中括號置於⊛所對應之【】的**裏面**，而位於⊛之**右邊**的**運算符號∗**所對應之正規中括號則置於⊛所對應之【】的**右邊**。

③ 去掉 A 集合中的字元和小括號（ ）。

例 1　（d_1∗d_2）∗d_3 → 對應到（d_1∗d_2）⊛d_3 → 對應到（d_1∗d_2）【】d_3

→ 對應到【（d_1【】d_2）】d_3 → 對應到【【】】

例 2　d_1∗（（d_2∗d_3）∗d_4）→對應到 d_1⊛（（d_2∗d_3）∗d_4）

→ 對應到 d_1【】（（d_2∗d_3）∗d_4）→對應到 d_1【】（（d_2∗d_3）⊛d_4）

→ 對應到 d_1【】（（d_2∗d_3）【】d_4）→對應到 d_1【】（【（d_2【】d_3）】d_4）

→ 對應到【】【【】】

(II) f 是 1 對 1 函數且映成（*onto*）函數

我們將證明所定義的函數 f 是 1 對 1 且映成（*onto*）。

(*i*) f 是 1 對 1 函數：即若 A 集合中有二個元素 $\bar{a}_n$、$\hat{a}_n$，使得 $f(\bar{a}_n)=f(\hat{a}_n)=\bar{b}_n$，

則 $\bar{a}_n=\hat{a}_n$ 恆成立，其中 $\bar{b}_n$ 爲有 n 組**正規中括號**之情形。

(*ii*) f 是映成（*onto*）函數：對於集合 B 中任意一個元素 $\bar{b}_n$，在集合 A 中皆存在

一個元素 $\bar{a}_n$ 具有 n 個**運算符號＊之結合運算**，使得 $f(\bar{a}_n)=\bar{b}_n$

我們對 $\bar{b}_n$ 的組數 n 做歸納法：

(1) $n=1$ 時，即集合 B 中只有一個元素 $\bar{b}_1=$【】，而 A 集合也只有一個元素

$\bar{a}_1=\text{đ}_1 * \text{đ}_2$，根據函數 f 的定義知道 $f(\bar{a}_1)=\bar{b}_1$，∴函數 f 是 1 對 1 且映成(*onto*)。

(2) 假設 $n=1，2，\cdots，k$ 時，函數 f 是 1 對 1 且映成（*onto*）函數。

(3) 當 $n=k+1$ 時，由 $\bar{a}_{k+1}$ 中的**最後運算符號**⊛所對應到的**正規中括號**【】之

“右中括號】”所在的位置 l 來討論，而 l 是針對“所有右括號】”的位置

來給予編號，所以 $l=1，2，\cdots，k，k+1$

① 若 $l=1$ 時，即 $\bar{b}_{k+1}=$【】$\bar{b}_k$，其中 $\bar{b}_k$ 表示有 k 組**正規中括號**之情形。

(*i*) 已知 $\bar{b}_{k+1}=f(\bar{a}_{k+1})=f(\hat{a}_{k+1})$，且 $\bar{a}_{k+1}=\text{đ}_1 ⊛ \bar{a}_k$，$\hat{a}_{k+1}=\text{đ}_1 ⊛ \hat{a}_k$，則由函數 f 之定

義知 $f(\bar{a}_k)=\bar{b}_k=f(\hat{a}_k)$，又由(2)之歸納假設知道：$\bar{a}_k=\hat{a}_k$，故得證 $\bar{a}_{k+1}=\hat{a}_{k+1}$，

即證明了函數 f 是 1 對 1 函數，其中 $\bar{a}_k$、$\hat{a}_k$ 表示各有 k 個**運算符號＊之結合運算**。

(*ii*) 由（2）之歸納假設知道，集合 A 中存在一個元素 $\bar{a}_k$，使得 $f(\bar{a}_k)=\bar{b}_k$

令 $\bar{a}_{k+1}=\text{đ}_1 ⊛ \bar{a}_k$，則 $\bar{a}_{k+1}$ 是有 $k+1$ 個**運算符號＊之結合運算**，且 $f(\bar{a}_{k+1})=\bar{b}_{k+1}$，

即證明了函數 f 是映成（*onto*）函數。

② 若 $2 \le l \le k$ 時，即 $\bar{b}_{k+1}$ ＝【$\bar{b}_{l-1}$】$\bar{b}_{(k+1)-l}$，其中 $\bar{b}_j$ 表有 j 組**正規中括號**之情形。

(i) 已知 $\bar{b}_{k+1} = f(\bar{a}_{k+1}) = f(\hat{a}_{k+1})$，且 $\bar{a}_{k+1} = \bar{a}_{l-1} \circledast \bar{a}'_{(k+1)-l}$ ，$\hat{a}_{k+1} = \hat{a}_{l-1} \circledast \hat{a}'_{(k+1)-l}$，

則由函數 f 之定義知 $f(\bar{a}_{l-1}) = \bar{b}_{l-1} = f(\hat{a}_{l-1})$，且 $f(\bar{a}'_{(k+1)-l}) = \bar{b}_{(k+1)-l} = f(\hat{a}'_{(k+1)-l})$

又 ∵ $1 \le l-1 \le k-1$，且 $1 \le k+1-l \le k-1$，∴由（2）之歸納假設知道，

$\bar{a}_{l-1} = \hat{a}_{l-1}$ 及 $\bar{a}'_{(k+1)-l} = \hat{a}'_{(k+1)-l}$，故得證 $\bar{a}_{k+1} = \hat{a}_{k+1}$，即證明了 f 是 1 對 1 函數，

其中 $\bar{a}_j$ 、$\bar{a}'_j$ 、$\hat{a}_j$ 、$\hat{a}'_j$ 爲分別表示各有 j 個**運算符號∗之結合運算。**

(ii) ∵ $1 \le l-1 \le k-1$，且 $1 \le k+1-l \le k-1$，∴由（2）之歸納假設知道：

存在 $\bar{a}_{l-1}$，使得 $f(\bar{a}_{l-1}) = \bar{b}_{l-1}$，且存在 $\bar{a}'_{(k+1)-l}$，使得 $f(\bar{a}'_{(k+1)-l}) = \bar{b}_{(k+1)-l}$

令 $\bar{a}_{k+1} = \bar{a}_{l-1} \circledast \bar{a}'_{(k+1)-l}$，則 $\bar{a}_{k+1}$ 爲 $k+1$ 個**運算符號∗之結合運算**，且 $f(\bar{a}_{k+1}) = \bar{b}_{k+1}$

即證明了函數 f 是映成（*onto*）函數。

③ 若 $l = k+1$ 時，即 $\bar{b}_{k+1}$ ＝【$\bar{b}_k$】，其中 $\bar{b}_k$ 表示有 k 組**正規中括號**之情形。

(i) 已知 $\bar{b}_{k+1} = f(\bar{a}_{k+1}) = f(\hat{a}_{k+1})$，且 $\bar{a}_{k+1} = \bar{a}_k \circledast \text{đ}_{k+2}$，$\hat{a}_{k+1} = \hat{a}_k \circledast \text{đ}_{k+2}$，

則由函數 f 之定義知 $f(\bar{a}_k) = b_k = f(\hat{a}_k)$，又由（2）之歸納假設知道：$\bar{a}_k = \hat{a}_k$，

故得證 $\bar{a}_{k+1} = \hat{a}_{k+1}$，即證明了 f 是 1 對 1 函數 。

(ii) 由（2）之歸納假設知道，集合 A 中存在一個元素 $\bar{a}_k$，使得 $f(\bar{a}_k) = b_k$

令 $\bar{a}_{k+1} = \bar{a}_k \circledast \text{đ}_{k+2}$，則 $\bar{a}_{k+1}$ 有 $k+1$ 個**運算符號∗之結合運算**，且 $f(\bar{a}_{k+1}) = \bar{b}_{k+1}$。

即證明了函數 f 是映成（*onto*）函數。

由以上證明可知：函數 f 是 1 對 1 且映成（*onto*）函數。