第三章

「相異二元樹」與「n 個運算符號之結合運算」的對應關係

一．問題（見〔5〕$P.$5–90）

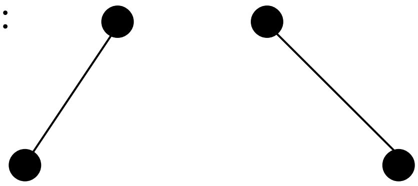
$\boxed{n \text{ 個節點的相異二元樹（}Binary\ Tree\text{）有幾個？}}$

我們假設有 t_n 個

$n=1$：

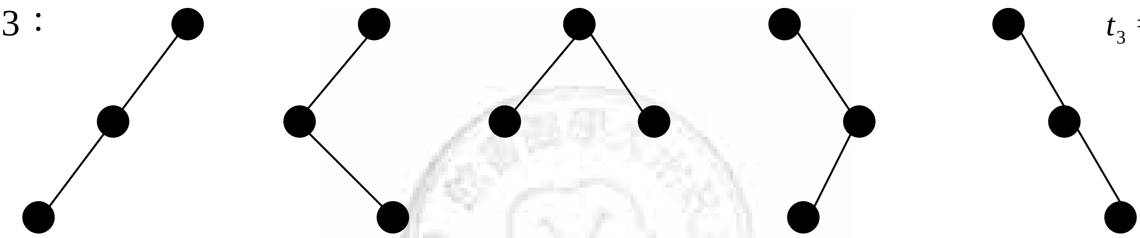
$t_1=1$

$n=2$：



$t_2=2$

$n=3$：



$t_3=5$

發現前三項：t_1、t_2、t_3與a_n和b_n之前三項皆相同，我們設左子樹（見〔3〕$P.$100～$P.$101）有$k-1$個節點（見〔6〕$P.$7–8），則右子樹有$n-k-1$個節點，其中$k=1$，2，…，n；為方便起見令$t_0=1$，則 $t_n=t_0t_{n-1}+t_1t_{n-2}+\cdots+t_{n-1}t_0$，$n\geq 1$，$t_0=1$ 即 $t_n=\sum_{i=1}^{n}t_{i-1}t_{n-i}$，$n\geq 1$，仿 $P.$2 之推導，可推出 $t_n=\frac{1}{n+1}C_n^{2n}$，即「$n$ 個節點的相異**二元樹**有幾個」也為 *Catalan* 族成員之一。我們在這一章裡將討論：「**運算符號＊之結合運算**」和「相異**二元樹**」的對應關係。

二．對射函數之證明

(I) 對射函數的建立（見〔4〕*P*.5）

設 A 爲有 n 個**運算符號**$*$可進行不同的結合運算所成的集合；

T 爲有 n 個**節點**的相異**二元樹**所成的集合；

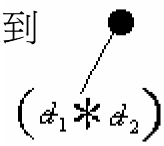
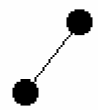
定義對應函數 $f: A \to T$，依據下列步驟來建構 $T=f(A)$

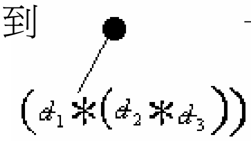
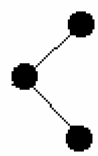
① A 集合中的每一個**運算符號**$*$對應到一個**節點**，而**最後運算符號**⊛對應到是**樹根**（*root*）。

② 位於**最後運算符號**⊛之右邊的**運算符號**$*$對應到**樹根**之**右子樹**裏的**節點；**

而位於**最後運算符號**⊛之左邊的**運算符號**$*$對應到**樹根**之**左子樹**裡的**節點。**

③ 將 A 集合中所有字元和小括號去掉。

例 1 （$d_1 * d_2$）$* d_3$ → 對應到  → 對應到 

例 2 （$d_1 *$（$d_2 * d_3$））$* d_4$ → 對應到  →對應到 

(II) f 是 1 對 1 且映成（*onto*）函數

我們將證明所定義的函數 f 是 1 對 1 且映成（*onto*）。

(*i*) f 是 1 對 1 函數：即若 A 集合中有二個元素 $\bar{a}_n$、$\hat{a}_n$，使得 $f(\bar{a}_n)=f(\hat{a}_n)=\bar{t}_n$，

則 $\bar{a}_n=\hat{a}_n$ 恆成立，其中 $\bar{t}_n$ 表有 n 個**節點**之相異**二元樹**。

(*ii*) f 是映成（*onto*）函數：對於集合 T 中任意一個元素 $\bar{t}_n$，在集合 A 中皆存在一個元素 $\bar{a}_n$ 具有 n 個**運算符號**$*$**之結合運算**，使得 $f(\bar{a}_n)=\bar{t}_n$

我們對 $\bar{t}_n$ 的節點個數 n 做歸納法：

（1）n＝1 時，即集合 T 中只有一個元素 $\bar{t}_1$＝●，

而 A 集合也只有一個元素 $\bar{a}_1 = a_1 * a_2$，根據函數 f 的定義知道 $f(\bar{a}_1)=\bar{t}_1$，

所以函數 f 是 1 對 1 且映成（*onto*）函數。

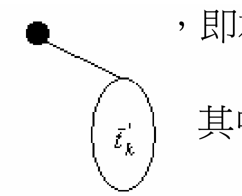
（2）假設 n＝1，2，⋯，k 時，函數 f 是 1 對 1 且映成（*onto*）函數。

（3）當 n＝$k+1$ 時，由 $\bar{a}_{k+1}$ 中的**最後運算符號**⊛所對應到的**樹根**之位置 l 來討論，

並設左子樹有 $l-1$ 個節點，則右子樹有 $(k+1)-l$ 個節點，其中 l＝1，

2，⋯，$k+1$。

① 若 l＝1 時， $\bar{t}_{k+1}$＝



，即右子樹有 k 個**節點**，我們以 $\bar{t}'_k$ 來表示，

其中 $\bar{t}_{k+1}$ 表有 $k+1$ 個**節點**之相異**二元樹**。

(*i*) 已知 $\bar{t}_{k+1}=f(\bar{a}_{k+1})=f(\hat{\bar{a}}_{k+1})$，且 $\bar{a}_{k+1} = a_1 \circledast \bar{a}_k$ ，$\hat{\bar{a}}_{k+1} = a_1 \circledast \hat{\bar{a}}_k$ ，

則由函數 f 之定義知 $f(\bar{a}_k)=\bar{t}'_k=f(\hat{\bar{a}}_k)$，又由（2）之歸納假設知道：$\bar{a}_k = \hat{\bar{a}}_k$ ，

故得證 $\bar{a}_{k+1} = \hat{\bar{a}}_{k+1}$ ，即證明了函數 f 是 1 對 1 函數，其中 $\bar{a}_k$ 、$\hat{\bar{a}}_k$ 表示各有 k

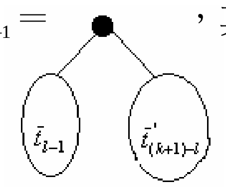
個**運算符號∗之結合運算。**

(*ii*) 由（2）之歸納假設知道，集合 A 中存在一個元素 $\bar{a}_k$ ，使得 $f(\bar{a}_k)=\bar{t}'_k$

令 $\bar{a}_{k+1} = a_1 \circledast \bar{a}_k$ ，則 $\bar{a}_{k+1}$ 有 $k+1$ 個**運算符號∗之結合運算**，且 $f(a_{k+1})=t_{k+1}$ 。

即證明了函數 f 是映成（*onto*）函數。

② 若 $2 \le l \le k$ 時，即 $\bar{t}_{k+1}$＝



，其中**左子樹**有 $l-1$ 個**節點**，以 $\bar{t}_{l-1}$ 表示

右子樹有 $(k+1)-l$ 個**節點**，以 $\bar{t}'_{(k+1)-l}$ 表示

(i) 已知 $\bar{t}_{k+1}=f(\bar{a}_{k+1})=f(\hat{a}_{k+1})$，且 $\bar{a}_{k+1}=\bar{a}_{l-1}\circledast\bar{a}'_{(k+1)-l}$ ，$\hat{a}_{k+1}=\hat{a}_{l-1}\circledast\hat{a}'_{(k+1)-l}$ ，

則由函數 f 之定義知 $f(\bar{a}_{l-1})=\bar{t}_{l-1}=f(\hat{a}_{l-1})$，且 $f(\bar{a}'_{(k+1)-l})=\bar{t}'_{(k+1)-l}=f(\hat{a}'_{(k+1)-l})$

又 $\because$ $1\le l-1\le k-1$，且 $1\le k+1-l\le k-1$，$\therefore$由（2）之歸納假設知道，

$\bar{a}_{l-1}=\bar{a}'_{(k+1)-l}$ 及 $\bar{a}'_{(k+1)-l}=\hat{a}'_{(k+1)-l}$，故得證 $\bar{a}_{k+1}=\hat{a}_{k+1}$，即證明了 f 是 1 對 1 函數。

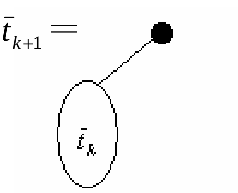
其中 $\bar{a}_j$ 、$\bar{a}'_j$ 、$\hat{a}_j$ 、$\hat{a}'_j$ 表示各有 j 個**運算符號∗**之**結合運算**。

(ii) $\because$ $1\le l-1\le k-1$，且 $1\le(k+1)-l\le k-1$，$\therefore$由（2）之歸納假設知道：

存在 $\bar{a}_{l-1}$，使得 $f(\bar{a}_{l-1})=\bar{t}_{l-1}$，及存在 $\bar{a}'_{(k+1)-l}$，使得 $f(\bar{a}'_{(k+1)-l})=\bar{t}'_{(k+1)-l}$。

令 $\bar{a}_{k+1}=\bar{a}_{l-1}\circledast\bar{a}'_{(k+1)-l}$，則 a_{k+1} 有 $k+1$ 個**運算符號∗之結合運算**，且 $f(\bar{a}_{k+1})=\bar{t}_{k+1}$

即證明了 f 是映成（$onto$）函數。

③ 若 $l=k+1$ 時，$\bar{t}_{k+1}=$ 

，即左子樹有 k 個**節點**，我們以 $\bar{t}_k$ 來表示，其中 $\bar{t}_{k+1}$ 表有 $k+1$ 個**節點**之相異**二元樹**。

(i) 已知 $\bar{t}_{k+1}=f(\bar{a}_{k+1})=f(\hat{a}_{k+1})$，且 $\bar{a}_{k+1}=\bar{a}_k\circledast\bar{a}_{k+2}$ ，$\hat{a}_{k+1}=\hat{a}_k\circledast\bar{a}_{k+2}$ ，

則由函數 f 之定義知 $f(\bar{a}_k)=\bar{t}_k=f(\hat{a}_k)$，又由（2）之歸納假設知道：$\bar{a}_k=\hat{a}_k$ ，

故得證 $\bar{a}_{k+1}=\hat{a}_{k+1}$，即證明了函數 f 是 1 對 1 函數，其中 $\bar{a}_k$ 、$\hat{a}_k$ 表示各有 k 個

運算符號∗之**結合運算。**

(ii) 由（2）之歸納假設知道，集合 A 中存在一個元素 $\bar{a}_k$，使得 $f(\bar{a}_k)=\bar{t}_k$

令 $\bar{a}_{k+1}=\bar{a}_k\circledast\bar{a}_{k+2}$，則 $\bar{a}_{k+1}$ 有 $k+1$ 個**運算符號∗**之**結合運算**，且 $f(\bar{a}_{k+1})=\bar{t}_{k+1}$。

即證明了 f 是映成（$onto$）函數。

由以上證明可知：f 是 1 對 1 且映成（$onto$）函數。