第四章
「相異二元樹」與「正規中括號」的對應關係

一．前言

在這一章，我們要討論：「相異二元樹」和「正規中括號」的對應關係。

我們先來看看 $t_2=2$ 的情形：

$t_2=2$

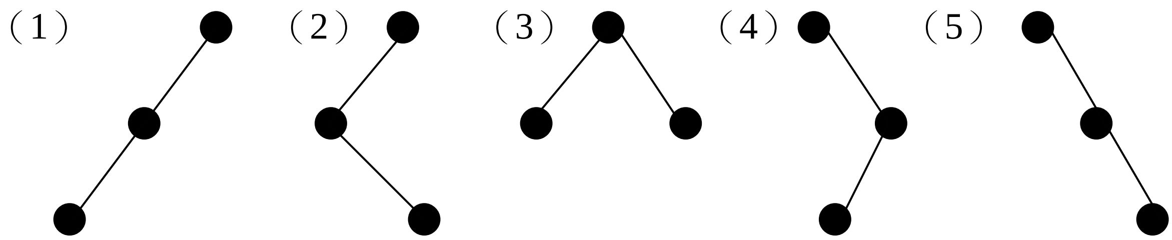
對應到【【】】　　　　　　【】【】

二．操作手法

(1) 若規定每個**節點**對應到一組**正規中括號**。

(2) 位於**樹根**之**左子樹**裏的**節點**所對應的**正規中括號**置於**樹根**所對應的【】之裏面；位於樹根之**右子樹**裏的**節點**所對應的**正規中括號**置於**樹根**所對應的【】之右邊。

這和前面由「n 個**運算符號**之**結合律運算**」對應到「**正規中括號**」的操作手法是一樣的（將**樹根**想成是**最後運算符號**即可）。我們再看看 $t_3=5$ 的情形：



對應到【【【】】】　【【】【】】　【【】】【】　【】【【】】　【】【】【】

三・對射函數之證明

(I) 對射函數的建立（見〔4〕*P*.5）

設 T 爲有 n 個**節點**的相異**二元樹**所形成的集合；

B 爲 n 組**正規中括號**所形成的集合；

定義對應函數 f：$T \rightarrow B$，依據下列步驟來建構 $B = f(T)$

① T 集合中的每個**節點**對應到一組**正規中括號**。

② 位於**樹根**之**左子樹**裏的**節點**所對應的**正規中括號**置於**樹根**所對應的【】之**裏面**；位於**樹根**之**右子樹**裏的**節點**所對應的**正規中括號**置於**樹根**所對應的【】之**右邊**。

(II) f 是 1 對 1 且映成（*onto*）函數

我們將證明所定義的函數 f 是 1 對 1 且映成（*onto*）:

(i) f 是 1 對 1 函數：即若 T 集合中有二個元素 $\bar{t}_n$ 、$\hat{\bar{t}}_n$，使得 $f(\bar{t}_n) = f(\hat{\bar{t}}_n) = \bar{b}_n$，

則 $\bar{t}_n = \hat{\bar{t}}_n$ 恆成立；其中 $\bar{b}_n$ 表示有 n 組**正規中括號**。

(ii) f 是映成（*onto*）函數：對於集合 B 中任意的一組**正規中括號** $\bar{b}_n$，在集合 T 中皆存在一個元素 $\bar{t}_n$ 具有 n 個**節點**的相異**二元樹**，使得 $f(\bar{t}_n) = \bar{b}_n$

我們對 $\bar{b}_n$ 的組數 n 做歸納法：

（1）$n = 1$ 時，即集合 B 中只有一個元素 $\bar{b}_1 =$【】,

又 T 集合中也只有一個元素 $\bar{t}_1 = ●$，根據函數 f 的定義知道 $f(\bar{t}_1) = \bar{b}_1$，

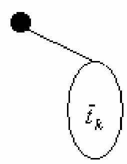
所以函數 f 是 1 對 1 且映成（*onto*）函數。

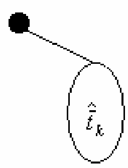
（2）假設 $n=1，2，\cdots，k$ 時，函數 f 是 1 對 1 且映成（*onto*）函數。

（3）當 $n=k+1$ 時，

由 $\bar{t}_{k+1}$ 中的**樹根**（root）所對應到的那組**正規中括號** $【\ \ 】_l$ 之“右中括號】”所在的**位置** l 來討論，而 l 是針對“所有**右括號】**”的位置由小而大給予編號 1 到 $k+1$。

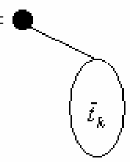
① 若 $l=1$ 時，即 $\bar{b}_{k+1}=【\ \ 】_1\bar{b}_k$，其中 $\bar{b}_k$ 表示有 k 組**正規中括號**。

(i) 已知 $\bar{b}_{k+1}=f(\bar{t}_{k+1})=f(\hat{\bar{t}}_{k+1})$，且 $\bar{t}_{k+1}=$ 

，$\hat{\bar{t}}_{k+1}=$ 

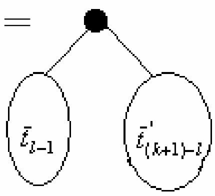
則由函數 f 之定義知 $f(\bar{t}_k)=\bar{b}_k=f(\hat{\bar{t}}_k)$，又由（2）之歸納假設知道 $\bar{t}_k=\hat{\bar{t}}_k$，故得證 $\bar{t}_{k+1}=\hat{\bar{t}}_{k+1}$，即證明了函數 f 是 1 對 1 函數，其中 $\bar{t}_k$、$\hat{\bar{t}}_k$ 分別表示各有 k 個**節點**的相異**二元樹**。

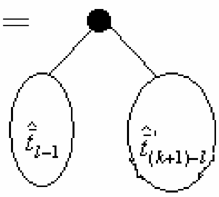
(ii) 由（2）之歸納假設知道，集合 T 中存在一組 $\bar{t}_k$，使得 $f(\bar{t}_k)=\bar{b}_k$

令 $\bar{t}_{k+1}=$ 

，則 $\bar{t}_{k+1}$ 是有 $k+1$ 個**節點**的相異**二元樹**，且 $f(\bar{t}_{k+1})=\bar{b}_{k+1}$，即證明了函數 f 是映成（*onto*）函數。

② 若 $2\le l\le k$ 時，即 $\bar{b}_{k+1}=【\bar{b}_{l-1}】\bar{b}_{(k+1)-l}$，其中 $\bar{b}_j$ 表示有 j 組**正規中括號**。

(i) 已知 $\bar{b}_{k+1}=f(\bar{t}_{k+1})=f(\hat{\bar{t}}_{k+1})$，且 $\bar{t}_{k+1}=$ 

，$\hat{\bar{t}}_{k+1}=$ 

則由函數 f 之定義知 $f(\bar{t}_{l-1})=\bar{b}_{l-1}=f(\hat{\bar{t}}_{l-1})$，且 $f(\bar{t}'_{(k+1)-l})=\bar{b}_{(k+1)-l}=f(\hat{\bar{t}}'_{(k+1)-l})$

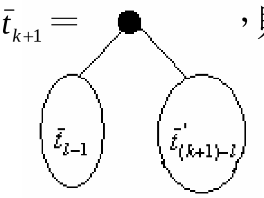
又 $\because\ 1\le l-1\le k-1$，且 $1\le k+1-l\le k-1$，$\therefore$ 由（2）之歸納假設知道，

$\bar{t}_{l-1} = \hat{\bar{t}}_{l-1}$ 及 $\bar{t}'_{(k+1)-l} = \hat{\bar{t}}'_{(k+1)-l}$，故得證 $\bar{t}_{k+1} = \hat{\bar{t}}_{k+1}$，即證明了 f 是 1 對 1 函數；

其中 $\bar{t}_j$ 、$\bar{t}'_j$ 、$\hat{\bar{t}}_j$ 、$\hat{\bar{t}}'_j$ 分別表示各有 j 個**節點**之相異**二元樹**。

(ii) ∵ $1 \le l-1 \le k-1$，且 $1 \le (k+1)-l \le k-1$，∴由（2）之歸納假設知道：

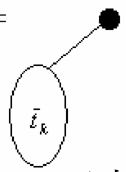
存在 $\bar{t}_{l-1}$，使得 $f(\bar{t}_{l-1}) = \bar{b}_{l-1}$，且存在 $\bar{t}'_{(k+1)-l}$，使得 $f(\bar{t}'_{(k+1)-l}) = \bar{b}_{(k+1)-l}$。

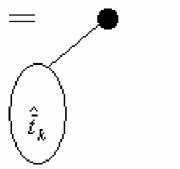
令 $\bar{t}_{k+1} =$ 

，則 $\bar{t}_{k+1}$ 爲有 $k+1$ 個**節點**的相異**二元樹**，而且 $f(\bar{t}_{k+1}) = \bar{b}_{k+1}$。

即證明了函數 f 是映成（*onto*）函數。

③ 若 $l = k+1$ 時，即 $\bar{b}_{k+1} =$【$\bar{b}_k$】，其中 $\bar{b}_k$ 表示有 k 組**正規中括號**。

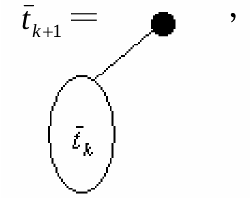
(i) 已知 $\bar{b}_{k+1} = f(\bar{t}_{k+1}) = f(\hat{\bar{t}}_{k+1})$，且 $\bar{t}_{k+1} =$ 

，$\hat{\bar{t}}_{k+1} =$ 

則由函數 f 之定義知 $f(\bar{t}_k) = \bar{b}_k = f(\hat{\bar{t}}_k)$，又由（2）之歸納假設知道 $\bar{t}_k = \hat{\bar{t}}_k$，

故得證 $\bar{t}_{k+1} = \hat{\bar{t}}_{k+1}$，即證明了函數 f 是 1 對 1 函數，其中 $\bar{t}_k$ 與 $\hat{\bar{t}}_k$ 分別表示各有 k 個**節點**的相異**二元樹**，

(ii) 由（2）之歸納假設知道，集合 T 中存在一組 $\bar{t}_k$，使得 $f(\bar{t}_k) = \bar{b}_k$

令 $\bar{t}_{k+1} =$ 

，則 $\bar{t}_{k+1}$ 是有 $k+1$ 個**節點**的相異**二元樹**，且 $f(\bar{t}_{k+1}) = \bar{b}_{k+1}$，

即證明了函數 f 是映成（*onto*）函數。

由以上之證明可知：f 是 1 對 1 且映成（*onto*）函數。