第五章

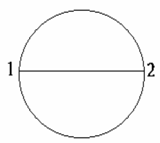
「圓上不相交之弦」與「n 個運算符號∗之結合運算」的對應關係

一．問題（見〔5〕P.5–99）

> 若圓上有 $2n$ 個點，依順時鐘方向標爲 1，2，⋯，$2n$，
> 則可以畫幾種在圓內不相交之弦？

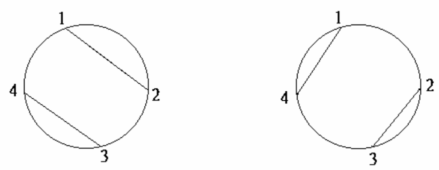
我們假設有 s_n 種，

當 n＝1 的時候：



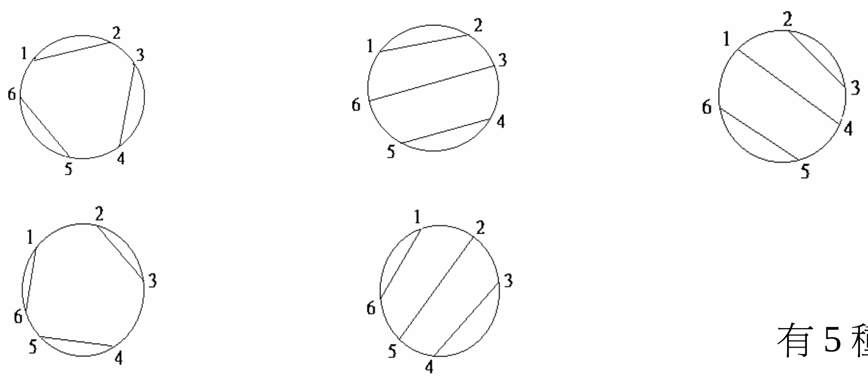
有 1 種情形，所以 s_1 ＝1。

當 n＝2 的時候：



有 2 種情形，所以 s_2 ＝1。

當 n＝3 的情形：



有 5 種情形，所以 s_3 ＝5。

我們發現，欲在圓上 $2n$ 個點畫 n 條弦使任二條弦皆不相交，則編號 1 點必定要連到編號爲偶數的點，即編號 1 的點可以連到編號 $2k$ 的點，此時分成二半，一半視爲 $2(k-1)$ 個點的圓畫 $k-1$ 條不相交的弦，另一半視爲 $2(n-k)$ 個點的圓畫 $n-k$ 條不相交的弦，其中 k＝1，2，⋯，n；爲方便起見令 s_0 ＝1，則

$s_n = s_0 s_{n-1} + s_1 s_{n-2} + \cdots + s_{n-1} s_0$，$n \geq 1$，$s_0 = 1$ 即 $s_n = \sum_{i=1}^{n} s_{i-1} s_{n-i}$，$n \geq 1$，仿 $P.2$ 之推導，可推出 $s_n = \frac{1}{n+1} C_n^{2n}$，即「**圓上不相交之弦**」也爲 *Catalan* 族成員之一。

二、對射函數之證明法

我們一樣想用**對射函數**，找出 *Catalan* 族成員：「**圓上不相交之弦**」與「n **個運算符號＊之結合運算**」之間的對應關係。

(I) 對射函數的建立（見〔4〕*P*.5）

設 A 爲有 n 個**運算符號＊**可進行不同的**結合運算**所成的集合；

S 爲圓上有 $2n$ 個點連接成**不相交弦**所成的集合；

定義對應函數 $f：A \rightarrow S$，依據下列步驟來建構 $S=f(A)$

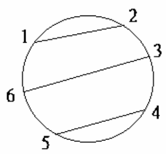
① A 集合中的每一個運算符號＊皆對應到集合 S 中一條**弦**。

② A 集合中的**最後運算符號**⊛對應到有**編號最小**的**弦，**且稱此弦爲**根弦**。

③ A 集合中位於**最後運算符號**⊛之**右邊**的**運算符號＊**，所對應到的**弦**置於**根弦**的**右邊**；位於**最後運算符號**⊛之**左邊**的**運算符號＊**，所對應到的**弦**置於**根弦**的**左邊**。

④ 去掉 A 集合中的字元和小括號（ ）。

$\boxed{例 1}$ $đ_1 \circledast ((đ_2 * đ_3) * đ_4)$

∵ 有 3 個**運算符號**，∴ 圓上有 6 個點連成 3 條**弦**，又**最後運算符號**⊛右邊有 2 個**運算符號＊**，∴先連編號 1 與 2 之**弦**爲**根弦**；在 $(đ_2 * đ_3) * đ_4$ 中，第二個**＊為**⊛，∴必需由編號最小的 3 號與 6 號連成**弦**，才會有編號 4 與 5 之**弦**在其左邊，所以，對應的圖形爲 

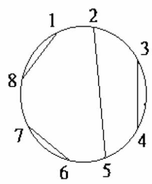
。

$\boxed{例 2}$ $((đ_1 * đ_2) * (đ_3 * đ_4)) \circledast đ_5$

因爲有 4 個**運算符號＊**，所以圓上有 8 個點連成 4 條**弦**，**最後運算符號**⊛左邊有 3 個運算符號＊，所以先連編號 1 與 8 之**弦**爲**根弦**；

在 $(đ_1 * đ_2) * (đ_3 * đ_4)$ 中，第二個**＊為**⊛，

且左、右各有一個＊，所以編號 2 必需與編號 5 連接成**弦**，

才會有左、右各 1 條**弦**，所以對應的圖形爲 

。

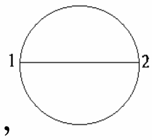
(II) f 是 1 對 1 且映成（*onto*）函數

我們將證明所定義的函數 f 是 1 對 1 且映成（*onto*）。

(*i*) f 是 1 對 1 函數：即若 A 集合中有二個元素 $\bar{a}_n$、$\hat{a}_n$，使得 $f(\bar{a}_n)=f(\hat{a}_n)=\bar{s}_n$，則 $\bar{a}_n=\hat{a}_n$ 恆成立，其中 $\bar{s}_n$ 表示圓上有 k 條**不相交之弦**。

(*ii*) f 是映成（*onto*）函數：對於集合 S 中任意一個元素 $\bar{s}_n$，在集合 A 中皆存在一個元素 a_n 具有 n 個**運算符號∗之結合運算**，使得 $f(\bar{a}_n)=\bar{s}_n$

我們對 $\bar{s}_n$ 的弦數 n 做歸納法：

（1）$n=1$ 時，即集合 S 中只有一個元素 $\bar{s}_1=$ 

，

而 A 集合中也只有一個元素 $\bar{a}_1=\bar{d}_1 * \bar{d}_2$，

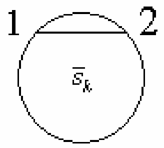
根據函數 f 的定義知道 $f(\bar{a}_1)=\bar{s}_1$，

所以函數 f 是 1 對 1 且映成（*onto*）函數。

（2）假設 $n=1，2，\cdots，k$ 時，函數 f 是 1 對 1 且映成（*onto*）函數。

（3）當 $n=k+1$ 時，

由集合 A 中**最後運算符號**⊛所對應到的**根弦**之位置來討論：即與編號 1 形成**弦**的編號 $2l$ 之位置，且**最後運算符號**⊛之左邊有 $l-1$ 個運算符號∗，其中 $l=1，2，\cdots，k，k+1$ 。

① 若 $l=1$ 時，即 $\bar{s}_{k+1}=$ 

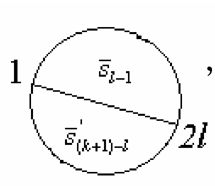
，其中 $\bar{s}_k$ 表示圓上有 k 條**不相交之弦**。

(*i*) 已知 $\bar{s}_{k+1}=f(\bar{a}_{k+1})=f(\hat{a}_{k+1})$，且 $\bar{a}_{k+1}=\bar{d}_1 \circledast \bar{a}_k$，$\hat{a}_{k+1}=\bar{d}_1 \circledast \hat{a}_k$，

則由函數 f 之定義知 $f(\bar{a}_k)=\bar{s}_k=f(\hat{a}_k)$，又由（2）之歸納假設知道：$\bar{a}_k=\hat{a}_k$，故得證 $\bar{a}_{k+1}=\hat{a}_{k+1}$，即證明了函數 f 是 1 對 1 函數；其中 $\bar{a}_k$、$\hat{a}_k$ 表示各有 k 個**運算符號∗之結合運算**。

(*ii*) 由（2）之歸納假設知道，集合 A 中存在一個元素 $\bar{a}_k$，使得 $f(\bar{a}_k)=\bar{s}_k$

令 $\bar{a}_{k+1}=\bar{d}_1 \circledast \bar{a}_k$，則 $\bar{a}_{k+1}$ 為有 $k+1$ 個**運算符號∗之結合運算**，且 $f(\bar{a}_{k+1})=\bar{s}_{k+1}$，即證明了函數 f 是映成（*onto*）函數。

② 若 $2 \le l \le k$ 時，即 $s_{k+1}=$ 

， 其中 $\bar{s}_j$ 、$\bar{s}'_j$ 分別表示圓上各有 j 條**不相交之弦**

(i) 已知 $\bar{s}_{k+1}=f(\bar{a}_{k+1})=f(\hat{\bar{a}}_{k+1})$，且 $\bar{a}_{k+1}=\bar{a}_{l-1}\circledast\bar{a}'_{(k+1)-l}$ ， $\hat{\bar{a}}_{k+1}=\hat{\bar{a}}_{l-1}\circledast\hat{\bar{a}}'_{(k+1)-l}$ ，

則由函數 f 之定義知 $f(\bar{a}_{l-1})=\bar{s}_{l-1}=f(\hat{\bar{a}}_{l-1})$，且 $f(\bar{a}'_{(k+1)-l})=\bar{s}'_{(k+1)-l}=f(\hat{\bar{a}}'_{(k+1)-l})$

又 ∵ $1 \le l-1 \le k-1$，且 $1 \le k+1-l \le k-1$，∴由（2）之歸納假設知道，

$\bar{a}_{l-1}=\hat{\bar{a}}_{l-1}$ 及 $\bar{a}'_{(k+1)-l}=\hat{\bar{a}}'_{(k+1)-l}$ ，故得證 $\bar{a}_{k+1}=\hat{\bar{a}}_{k+1}$ ，即證明了 f 是 1 對 1 函數。

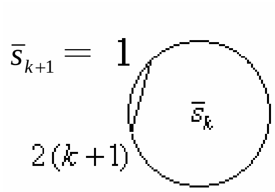
其中 $\bar{a}_j$ 、$\bar{a}'_j$ 、$\hat{\bar{a}}_j$ 、$\hat{\bar{a}}'_j$ 分別表示各有 j 個**運算符號∗之結合運算。**

(ii) ∵ $1 \le l-1 \le k-1$，且 $1 \le k+1-l \le k-1$，∴由（2）之歸納假設知道：

存在元素 $\bar{a}_{l-1}$，使得 $f(\bar{a}_{l-1})=\bar{s}_{l-1}$，且存在元素 $\bar{a}'_{(k+1)-l}$，使得 $f(\bar{a}'_{(k+1)-l})=\bar{s}'_{(k+1)-l}$

令 $\bar{a}_{k+1}=\bar{a}_{l-1}\circledast\bar{a}'_{(k+1)-l}$，則 $\bar{a}_{k+1}$ 爲有 $k+1$ 個**運算符號∗之結合運算**，且 $f(\bar{a}_{k+1})=\bar{s}_{k+1}$

即證明了函數 f 是映成（*onto*）函數。

③ 若 $l=k+1$ 時，即 $\bar{s}_{k+1}=$ 

，其中 $\bar{s}_k$ 表示圓上有 k 條**不相交之弦。**

(i) 已知 $\bar{s}_{k+1}=f(\bar{a}_{k+1})=f(\hat{\bar{a}}_{k+1})$，且 $\bar{a}_{k+1}=\bar{a}_k\circledast\text{đ}_{k+2}$ ， $\hat{\bar{a}}_{k+1}=\hat{\bar{a}}_k\circledast\text{đ}_{k+2}$

則由函數 f 之定義知 $f(\bar{a}_k)=\bar{s}_k=f(\hat{\bar{a}}_k)$，又由（2）之歸納假設知道：$\bar{a}_k=\hat{\bar{a}}_k$ ，

故得證 $\bar{a}_{k+1}=\hat{\bar{a}}_{k+1}$，即證明了函數 f 是 1 對 1 函數；其中 $\bar{a}_k$ 、$\hat{\bar{a}}_k$ 分別表示各有 k 個**運算符號∗之結合運算。**

(ii) 由（2）之歸納假設知道，集合 A 中存在一個元素 $\bar{a}_k$ ，使得 $f(\bar{a}_k)=\bar{s}_k$ ，

令 $\bar{a}_{k+1}=\bar{a}_k\circledast\text{đ}_{k+2}$，則 $\bar{a}_{k+1}$ 爲有 $k+1$ 個**運算符號∗之結合運算**，且 $f(\bar{a}_{k+1})=\bar{s}_{k+1}$

，即證明了函數 f 是映成（*onto*）函數。

由以上證明可知：函數 f 是 1 對 1 且映成（*onto*）函數。