

國立政治大學應用數學系

碩士學位論文

指導教授：宋傳欽 博士

模糊線性迴歸之研究

A study on fuzzy linear regression

碩士班學生：趙家慶 撰

中華民國九十五年七月

## 誌謝

常聽人說，該感謝的人太多，不知如何感謝，那就謝天吧，在我眼裡這不過是一句不負責任的屁話，要是真的有那麼多需要感謝的人，那就一一感謝吧，不過就是多花一點篇幅和時間。而我學位的完成需要感謝的人，分成以下四類，師長、家人、朋友、不認識我卻默默支持我的人。

首先感謝在這兩年裡給予我最多指導的師長們：感謝宋傳欽老師，總是像爸爸一樣照顧著研究室的每位同學，雖然大家每次打電動看到你像背後靈一樣站在那，都恨不得你趕快離開，但我確定你是花最多時間關心系上每位同學的老師，在論文最後衝刺階段，你總是從早和我拼論文到晚，有時真不知道該拿什麼回報你。感謝陳天進老師，上課的時候你是個一絲不苟認真的好老師，離開教室後你就像一個大家身邊的好朋友，可以和你沒有拘束的瞎哈拉，還可以和你一起喝酒吃肉，有你在身邊大家真的很開心，而且我確定你是我見過最酷的教授。感謝姜志銘老師，從一開始的統計研討群，到最後修貝氏統計的課，讓我很確定論文要做統計方面的內容。雖然應數在政大是個小系所，但是多虧有你們這些老師，讓政大應數能夠發光發熱。

再來感謝身邊的家人：親愛的老母，你真的很了不起，生出這麼有型且特別的兒子，在這個單親的家庭裡，給予我健全的生長環境，除了讓我在讀研究所時，不用煩惱金錢上面的問題，而且在我遇到挫折時總是能給我貼心的意見，將來我有任何成就你一定都是功勞最大的人。還有老妹，你雖然對我研究所學業沒啥貢獻，但是晚上肚子餓往你這邊翻，一定會找到能解饞的食物，所以在這裡我代替我的肚子為你的功勞記上一筆。還有外公外婆，你們總是對我的期待很大，只是一直覺得自己沒有做的很好，但在未來的日子裡我會繼續努力，直到我的成就有資格讓你們拿出去臭屁。還有大伯家裡的每一位成員，從小在那裡長大，生活態度和想法常受你們的影響，每次我不管做什麼，你們總是挺我到底，讓我有豐沛的自信做自己。

接著感謝陪我走過研究所這段時光的朋友們：其緯，從大學到現在7年的朋友，你真的是個夠義氣的好朋友，除了讓我有個模糊的題目做做，做事非

常積極的你，也不辭辛苦的幫我和阿嘎對外報名，讓研究室大家共同的興趣，能藉由我們三人之手奪得冠軍，希望你的博士班能盡快畢業啊！勝平，感謝你總是帶給大家歡樂，雖然所有的球賽我們總是對立的，但是說真的沒有你看球的趣味少了一大半，同樣也祝你盡早博士班畢業。阿嘎，電動打球，所有有關的課外活動，都和你一起參加，有你一起從事各類活動，真的會變的比較有趣一點，還有要記住，我離開學校後你就是政大第一型男了，要好好維持我留給你的名號，把所有政大的正妹通通把起來。大高，感謝你每次給我一些生活小意見，雖然這些小意見有時還滿鳥的，但是沒辦法，有鳥的男人總是會講些鳥話嘛。罐頭，謝謝你陪我一起當微積分助教，很多小事都是你一個人完成，減輕我不少負擔，祝你在政大修到你想要的愛情學分。永恆隊長，總是不習慣叫你學長，在我心中你是個沒架子又熱心助人的好朋友，一起討論高中數學的日子，真的很愉快，相信有天我們會靠數學賺大錢的。還有博士班的學長們宣谷、小郭、耿彥、天財，感謝你們替我解決很多論文及功課上的問題，在我心中你們都是一票很強的博班學長，能遇到你們真的三生有幸。小范，謝謝妳陪我修線性統計推論，雖然很多修課上的問題都是我幫你解決，但是和你修課真的很愉快，不但可以培養我教學能力，還可以看到你傻傻可愛的樣子，這樣一來修課和讀書就變得好玩多了。美艷的思穎，每次看見妳就像聽到一首好歌，或是吃到美食那樣令人愉快，你是我在政大遇過最完美的美女，感謝妳在我衝刺論文的階段，給了我最大的鼓勵。寶寶學姊，謝謝妳一直督促我趕快寫論文。阿竹、婉菁，謝謝妳們常在研究室陪我聊天。總之朋友們，有你們陪伴，我研究所的生活才算完整。

最後該感謝的是那些不認識我的朋友們：小法，這兩年來，只要有你的比賽，都會讓我一整天精神振奮與期待，謝謝你用球技激勵著我，走過每個考試與報告。鋒哥，你回台灣後用一支支全壘打，陪我渡過寫論文的苦日子，將來我也會和你一樣揮出屬於我人生的全壘打。

雖然這篇論文並非什麼曠世巨作，卻寫了長長的謝辭，因為我不希望論文裡只有硬梆梆的數學式子，我希望有著我對大家的情感，用我自己的方式抒發出來。真的謝謝所有幫助過我的人，我愛你們。

# 目錄

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>1</b>
1.1	摘要 . . . . .	1
1.2	簡介 . . . . .	1
<b>2</b>	<b>模糊線性迴歸的介紹</b>	<b>3</b>
2.1	模糊數及其運算 . . . . .	3
2.2	一般模糊線性迴歸模型 . . . . .	4
2.3	簡單距離公式 . . . . .	4
2.4	對稱和不對稱雙重模糊線性迴歸模型 . . . . .	6
<b>3</b>	<b><i>LR</i>型模糊線性迴歸</b>	<b>9</b>
3.1	<i>LR</i> 型模糊數 . . . . .	9
3.2	Yang和Ko距離公式 . . . . .	10
3.3	Yang和Ko距離公式下之最小平方估計 . . . . .	11
<b>4</b>	<b>具影響力觀察值之偵測</b>	<b>15</b>
4.1	傳統線性迴歸中的偵測方法 . . . . .	15
4.2	模糊線性迴歸中的偵測方法 . . . . .	16
<b>5</b>	<b>實例分析</b>	<b>19</b>
<b>6</b>	<b>附錄</b>	<b>27</b>

6.1	附錄一 . . . . .	27
6.2	附錄二 . . . . .	28
6.3	附錄三 . . . . .	28
6.4	附錄四 . . . . .	29

# 1 序論

## 1.1 摘要

使用傳統迴歸的方式對未知事物做預測，往往不能夠精準的做出結論，縱使在相同的條件下實際去操作，也很難得到相同的結果，因此模糊數概念的建立，並運用在迴歸分析上更能有效描述預測結果的不確定性。

然而模糊線性迴歸 (Fuzzy Linear Regression) 在利用最小平方法處理問題時，往往過於著重在模糊區間的中心與分展度上，而忽略了描述資料的模糊性，使得隸屬度函數 (membership function) 的功能受到相當大的限制。本文在 D'Urso 和 Gastaldi(2000) 所提出的雙重模糊線性迴歸 (doubly fuzzy linear regression) 模型架構下，利用 Yang 和 Ko(1996) 在 LR 空間下所定義模糊數間的距離公式，導出能反映隸屬度函數的最小平方估計，並引進一些傳統迴歸中常用來偵測離群值 (outlier) 與具影響力觀察值 (influence observation) 的概念與技巧，應用在模糊線性迴歸資料的偵測上。

## 1.2 簡介

我們常使用迴歸模型來描述應變數與自變數之間的關係，傳統上迴歸模型的建立，往往是用來作預測用，但在預測上不可能完全準確，因此會有隨機誤差項的產生，而隨機誤差項就是一些不確定性造成的結果。模糊迴歸爲了把不確定的因素考慮進去，在應變數的部份用模糊數的方式呈現，即爲在模糊環境中建立應變數與自變數之間的函數關係。Tanaka 等人 (1982) 首先提出具有模糊性的線性迴歸 (簡稱爲模糊線性迴歸)，並利用線性規劃 (Linear Programming, 簡稱 LP) 來對模糊迴歸模型的參數做估計。

自從 Tanaka 等人提出帶有模糊數的線性迴歸後，模糊迴歸的方法就被廣泛的運用到各個領域中。基本上，模糊線性迴歸的參數估計，大致上有兩種方法：一種是 Tanaka 等人提出的 LP 法，另一種則爲最小平方法。本篇文章

中，首先應用Yang和Ko(1996)在LR空間下所定義模糊數間的距離公式，分別在一般模糊線性迴歸模型、D'Urso和Gastaldi(2000)所提出的雙重線性迴歸模型架構下，導出能反映LR型隸屬度函數的最小平方估計，其次，因為最小平方方法的結果容易受離群值的影響，因此引進傳統迴歸分析中偵測離群值與具影響力觀測值的概念與技巧，並運用在模糊線性迴歸的環境中。

第二章中，先介紹模糊數的基本概念、模糊數運算及模糊數間的距離。接著利用簡單距離公式，對一般線性迴歸模型以及雙重線性迴歸模型求最小平方估計。

第三章中，我們介紹LR型模糊數以及Yang和Ko的距離公式，並在第二章中各模糊迴歸模型的架構下，利用最小平方方法以及Yang和Ko的距離公式，試著找出與隸屬度函數有關的最小平方估計。

第四章中，引進傳統迴歸偵測離群值與具影響力觀測值的技巧，導出一般模糊線性迴歸中的槓桿值、殘差值以及Cook距離公式。

第五章中，利用前幾章所獲致的理論結果，對Tanaka在1987所提出的資料進行分析。

第六章中，為前面各章中重要公式及引理的推導與證明。

## 2 模糊線性迴歸的介紹

### 2.1 模糊數及其運算

現今科學所欲研究物件之結構複雜性日益增加，人類的知識語言因本身的主觀意識、不同時間、環境的變遷，使得科學家無法清楚研究物件的真實本質，因此透過建立適當的數學模式，對於一些較無確定性的資料給予一個集合，稱之為模糊數。

利用隸屬度函數可以描述模糊數的性質，他是模糊理論的最基本概念，透過隸屬度函數，我們才能對模糊數進行量化，也才有可能利用精準的數學方法，去分析和處理模糊性的資訊。通常隸屬度函數的定義方式可以分成數值及函數兩種：數值定義方式又稱為離散化(discretization)隸屬度函數，他是直接給定有限模糊集合內每個元素的隸屬度。函數定義的方式又可稱為連續化(continuous)隸屬度函數，函數定義的表現，可以是無限模糊集合的元素及其隸屬度之間的關係，也可以是有限模糊集合的元素及其隸屬度之間的關係，但在處理實際問題上僅討論有限的情況。以下是具有相同類型隸屬度函數之模糊數的運算，其定義為：

**定義 2.1** 設  $A = (m_a, \alpha_a, \beta_a), B = (m_b, \alpha_b, \beta_b), \lambda \in \mathbb{R}^+$ ，其中  $m_a, m_b$  為中心， $\alpha_a, \alpha_b$  與  $\beta_a, \beta_b$  分別為左右分展度，且  $A$  與  $B$  有相同類型的隸屬度函數，則我們有以下的運算：

$$1. A + B = (m_a + m_b, \alpha_a + \alpha_b, \beta_a + \beta_b)$$

$$2. \lambda A = (\lambda m_a, \lambda \alpha_a, \lambda \beta_a)$$

即兩個模糊數相加的結果，為中心與中心相加，左分展度與右分展度相加；若一個大於零的數乘上一個模糊數，則分別為中心和左右分展度分別乘上此正數。但是在此，我們無法定義出一個模糊數乘上一個小於零的實數，也因



此無法定義出模糊數之間的減法。我們需要一套尋找模糊數間距離的方法，在2.3節中將介紹常見模糊數間距離的定義。

## 2.2 一般模糊線性迴歸模型

考慮下列的模糊線性迴歸模型，爲了方便起見稱其爲模型I：

$$\text{模型I } y_i = A_0 + A_1x_{i1} + A_2x_{i2} + \dots + A_px_{ip}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

其中自變數值  $x_{ij}$  爲實數，應變數值  $y_i = [c_i - s_i, c_i + s_i]$  爲模糊數，且  $c_i$  爲資料中心， $s_i$  爲資料分展度， $A_m = [a_m - r_m, a_m + r_m]$  是模糊迴歸參數，具有和  $y_i$  相同的隸屬度函數。在沒有模糊數距離概念下，我們如何估計  $A_m$  呢？首先將  $y_{Li} = c_i - s_i, y_{Ri} = c_i + s_i$  視爲樣本的左右端點。對左端點  $\{(y_{Li}, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}) | i = 1, 2, \dots, n\}$  資料 (右端點  $\{(y_{Ri}, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}) | i = 1, 2, \dots, n\}$  資料) 配置線性模型  $y = \beta_0 + \beta_1x_1 + \dots + \beta_px_p$ ，分別得到：

$$\hat{y}_{Li} = \hat{L}_0 + \hat{L}_1x_{i1} + \hat{L}_2x_{i2} + \dots + \hat{L}_px_{ip}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\hat{y}_{Ri} = \hat{R}_0 + \hat{R}_1x_{i1} + \hat{R}_2x_{i2} + \dots + \hat{R}_px_{ip}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

則  $\hat{A}_m = [\hat{a}_m - \hat{r}_m, \hat{a}_m + \hat{r}_m]$  其中  $\hat{a}_m = \frac{\hat{L}_m + \hat{R}_m}{2}$ ,  $\hat{r}_m = \frac{|\hat{R}_m - \hat{L}_m|}{2}$ 。如此方法所得到的結果，相當直觀而且好處理，不過其缺點是太注重於左右端點值，完全忽略了隸屬度函數描述資料的功能，這樣的估計方式有失”模糊”的概念。若在使用最小平方法時，能加入模糊數間距離的概念，或許可得到模糊迴歸參數  $A_m$  更適當的估計。

## 2.3 簡單距離公式

爲了得到(2.1)式模型I中，模糊迴歸參數的最小平方估計，我們必須考慮模糊數間的距離。

定義2.2 (簡單距離公式) 設  $A = (c_a, s_a), B = (c_b, s_b)$  是對稱形式的模糊數，其中  $c_a, c_b$  為中心， $s_a, s_b$  為分展度，則  $A$  與  $B$  間的距離  $D$  為：

$$D = \sqrt{(c_a - c_b)^2 + (s_a - s_b)^2} \quad (2.2)$$

若  $A = (c_a, p_a, q_a), B = (c_b, p_b, q_b)$  是不對稱形式的模糊數，其中  $c_a, c_b$  為中心， $p_a, p_b$  為左分展度， $q_a, q_b$  為右分展度，則  $A$  與  $B$  之間的距離  $D$  為：

$$D = \sqrt{(c_a - c_b)^2 \pi_c + (p_a - p_b)^2 \pi_p + (q_a - q_b)^2 \pi_q} \quad (2.3)$$

其中  $\pi_c, \pi_p$  與  $\pi_q$  分別為任意正的比重。

在上述的距離公式中，若模糊數為對稱形式，則距離為中心減去中心的平方，加上分展度減去分展度平方，再開根號。若模糊數為不對稱形式，則距離為中心減去中心的平方，加上左右分展度差的平方，並分別在中心與左右分展度處乘上一個正的比重後再開根號。在不對稱的距離公式中，需加上對模糊距離的主觀判斷，給予中心與分展度一個適當的比重。由於上述模糊數間的距離公式，只考慮到模糊數的中心與分展度，稱其為簡單距離公式，以便和3.1節中Yang和Ko的距離公式做一區隔。

在有了模糊數的距離定義後，可考慮用最小平方法對(2.1)式的傳統模糊線性迴歸進行參數估計。假設  $y_i = (c_i, s_i)$  與  $A_m = (a_m, r_m)$  具有相同的隸屬度函數，且經過適當的平移後可使得所有  $x_{ij} > 0$ 。(2.1)式可表示為：

$$(c_i, s_i) = (a_o, r_o) + (a_1, r_1)x_{i1} + (a_2, r_2)x_{i2} + \dots + (a_p, r_p)x_{ip}$$

在(2.2)式的簡單距離定義下， $a_i, r_i$  的最小平方法估計，即為使  $D^2$  最小之  $a_i, r_i$  值：

$$D^2 \equiv \sum_{i=1}^n (c_i - (a_o + a_1 x_{i1} + \dots + a_p x_{ip}))^2 + (s_i - (r_o + r_1 x_{i1} + \dots + r_p x_{ip}))^2$$

令  $\|v\|$  表示向量  $v$  的長度，上述式子若以向量及矩陣表達，在處理上會更方便，經改寫後可得：

$$D^2 = \|Xa - C\|^2 + \|Xr - S\|^2$$

其中  $X = (x_{ij})$  是  $n \times (p+1)$  的自變數值矩陣且  $a = (a_0, a_1, \dots, a_p)'$ ,  $r = (r_0, r_1, \dots, r_p)'$ ,  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)'$ ,  $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)'$ 。令  $\frac{\partial D^2}{\partial a} = 0$  與  $\frac{\partial D^2}{\partial r} = 0$ ，可得  $a$  與  $r$  的解如下：

$$\begin{aligned}\hat{a} &= (X'X)^{-1}X'C \\ \hat{r} &= (X'X)^{-1}X'S\end{aligned}\quad (2.4)$$

簡單的說，這種處理方式相當於對中心和分展度分別做迴歸，所獲得的估計結果自然和隸屬度函數無關，但實例分析上又呈現出這種估計結果較其他方法為佳。

## 2.4 對稱和不對稱雙重模糊線性迴歸模型

在模型 I 的架構下，若使用最小平方方法與簡單距離公式，所獲得最小平方估計的結果是中心與分展度分別做迴歸，該結果顯示中心與分展度無任何關聯，但 D'Urso 和 Gastaldi (2000) 認為模糊數之中心與其分展度，常存在一些相關性，因此提出以下雙重模糊線性迴歸模型 (簡稱模型 II)，並將應變數  $y_i = [c_i - s_i, c_i + s_i]$  考慮為對稱三角形模糊數。

$$\text{模型 II} \quad C = C^* + \varepsilon_c \quad C^* = Xa \quad (2.5)$$

$$S = S^* + \varepsilon_s \quad S^* = C^*b + \mathbf{1}d \quad (2.6)$$

其中  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)'$ ,  $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)'$ ,  $a$  是  $(p+1) \times 1$  的參數向量， $\mathbf{1}$  是每一分量皆為 1 的  $n \times 1$  向量， $b, d$  是第二迴歸模型參數。模型 II 的結構是先對中心的部份建立起核心迴歸模型 (core regression model)，再利用核心迴歸模型，對分展度的部份建立起與中心有關的分展度迴歸模型 (spread regression model)。

D'Urso 和 Gastaldi 利用最小平方方法以及 (2.2) 的簡單距離公式，求參數  $a, b, d$  使誤差平方和

$$\begin{aligned}D^2 &\equiv \|C - C^*\|^2 + \|S - S^*\|^2 \\ &= C'C - 2C'Xa + a'X'Xa(1 + b^2) + S'S \\ &\quad - 2S'Xab - 2S'\mathbf{1}d + 2a'X'\mathbf{1}bd + nd^2\end{aligned}$$

最小。令  $\frac{\partial D^2}{\partial a} = 0$ ,  $\frac{\partial D^2}{\partial b} = 0$  與  $\frac{\partial D^2}{\partial d} = 0$  可得下列的方程式：

$$\begin{aligned}\frac{\partial D^2}{\partial a} &= -X'C + X'Xa(1+b^2) - X'Sb + X'\mathbf{1}bd = 0 \\ \frac{\partial D^2}{\partial b} &= a'X'Xab - S'Xa + a'X'\mathbf{1}d = 0 \\ \frac{\partial D^2}{\partial d} &= -S'\mathbf{1} + a'X'\mathbf{1}b + nd = 0\end{aligned}\quad (2.7)$$

並由上述的方程式，求得  $a, b$  與  $d$  的遞迴關係式如下：

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{1+b^2}((X'X)^{-1}X'(C + rb - \mathbf{1}bd)) \\ b &= (a'X'Xa)^{-1}(r'Xa - a'X'\mathbf{1}d) \\ d &= \frac{1}{n}(r'\mathbf{1} - a'X'\mathbf{1}b)\end{aligned}\quad (2.8)$$

事實上，我們可由 (2.7) 式解出  $a, b, d$  的通解，其過程如下：

由 (2.7) 的第 1 個方程式知  $a = \frac{1}{1+b^2}((X'X)^{-1}X'(C + Sb - \mathbf{1}bd))$ ，將其代入 (2.7) 的第 2 及第 3 個方程式，可得：

$$\|\hat{C}\|^2 b + C'\hat{S}b^2 - n\bar{C}b^2d - S'\hat{C} - \|\hat{S}\|^2 b + 2n\bar{S}bd + n\bar{C}d - nbd^2 = 0 \quad (2.9)$$

$$b\bar{C} - \bar{S} + d = 0 \quad (2.10)$$

其中  $X(X'X)^{-1}X'C = \hat{C}$ ,  $X(X'X)^{-1}X'S = \hat{S}$ ,  $\frac{1}{n}\mathbf{1}'C = \bar{C}$ ,  $\frac{1}{n}\mathbf{1}'S = \bar{S}$ 。由 (2.10) 可得  $d = \bar{S} - b\bar{C}$ ，再將其代回 (2.9) 式中，則可以簡化成一個  $b$  的二次方程式：

$$M_1b^2 + M_2b + M_3 = 0$$

其中  $M_1 = C'\hat{S} - n\bar{C}\bar{S}$ ,  $M_2 = \|\hat{C}\|^2 - \|\hat{S}\|^2 + n\bar{S}^2 - n\bar{C}^2$ ,  $M_3 = n\bar{C}\bar{S} - S'\hat{C}$ 。解上述二次方程式可得：

$$\hat{b} = \frac{-M_2 \pm \sqrt{M_2^2 - 4M_1M_3}}{2M_1}$$

所對應的  $a, d$  為：

$$\begin{aligned}\hat{d} &= \bar{S} - \hat{b}\bar{C} \\ \hat{a} &= \frac{1}{1+\hat{b}^2}((X'X)^{-1}X'(c + r\hat{b} - \mathbf{1}\hat{b}\hat{d}))\end{aligned}$$

亦有兩組解，將兩組  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{d}$  之值代回  $D^2$  中，找出使誤差平方和  $D^2$  較小的即為最小平方估計。由  $a, b, d$  的估計式可看出，無論應變數部份是何種形態的模糊數，所獲得的參數估計結果都相同，因此在簡單距離公式下所得到的最小平方估計，無法適度反映模糊數的形態。

在模糊應變數  $y_i = [c_i - q_i, c_i + p_i]$  為非對稱三角形的情況下，D'Urso(2001) 提出以下的模糊線性迴歸模型，為了方便起見稱其為模型 III：

$$\begin{aligned} \text{模型 III} \quad C &= C^* + \varepsilon & C^* &= Xa \\ p &= p^* + \lambda & p^* &= C^*b + \mathbf{1}d \\ q &= q^* + \rho & q^* &= C^*g + \mathbf{1}h \end{aligned} \quad (2.11)$$

式中  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)'$ ,  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)'$ ,  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)'$ ,  $a$  是  $(p+1) \times 1$  的參數向量， $\mathbf{1}$  是每一分量皆為 1 的  $n \times 1$  向量， $b, d, g, h$  是第二迴歸模型參數。模型 III 可稱為不對稱的雙重模糊線性迴歸模型。

D'Urso 在 (2.3) 的簡單距離公式下，利用最小平方法，導出  $a, b, d, g, h$  的最小平方估計滿足下面的遞迴關係式：

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\pi_c + b^2\pi_p + g^2\pi_q} [(X'X)^{-1}X'(c\pi_c + (p - \mathbf{1}d)b\pi_p) + (q - \mathbf{1}h)g\pi_q] \\ b &= (a'X'Xa)^{-1}(a'X'p - a'X'\mathbf{1}d) \\ d &= \frac{1}{n}(p'\mathbf{1} - a'X'\mathbf{1}b) \\ g &= (a'X'Xa)^{-1}(a'X'q - a'X'\mathbf{1}h) \\ h &= \frac{1}{n}(q'\mathbf{1} - a'X'q - a'X'\mathbf{1}h) \end{aligned} \quad (2.12)$$

由 (2.12) 的遞迴關係式，可看出模型 III 的參數估計和  $\pi_c, \pi_p, \pi_q$  權重的選取有密切關係，這不是一套客觀的處理方式，同時由 (2.12) 也可看出參數估計的結果和隸屬度函數無關，因此在下一章中，我們將設法獲得客觀並與隸屬度函數有關聯的最小平方估計。

### 3 LR型模糊線性迴歸

#### 3.1 LR型模糊數

在本章中，我們主要是考慮應變數為LR型模糊數的模糊線性迴歸，爲了方便起見我們稱其爲LR型模糊線性迴歸，以下是LR型模糊數的定義。

定義3.1 設  $X = (c, p, q)$  是一模糊數。若存在遞減函數  $L: \mathfrak{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ ,  $R: \mathfrak{R}^+ \rightarrow [0, 1]$  滿足  $L(0) = 1, L(1) = 0$  或  $L(+\infty) = 0, R(0) = 1, R(1) = 0$  或  $R(+\infty) = 0$  使得

$$X(x) = \begin{cases} L(\frac{c-x}{p}) & x \leq c \\ R(\frac{x-c}{q}) & x \geq c \end{cases}$$

成立，則稱  $X$  爲LR型的模糊數，記爲  $(c, p, q)_{LR}$ ，其中  $c$  爲  $X$  的平均值， $p > 0, q > 0$  分別爲左右分展度。若左右分展度相同時，即  $p = q$ ，稱爲對稱LR型模糊數，並可進一步簡記爲  $(c, p)_{LR}$ 。

LR型模糊數所具有的隸屬度函數，稱爲LR型隸屬度函數。以下是兩個常見的LR型模糊數，分別爲三角形模糊數以及指數型模糊數。

1. 若  $X = (c, p, q)_{LR}$  爲三角形模糊數，則其隸屬度函數爲

$$X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{c-x}{p} & c-p \leq x \leq c \\ 1 - \frac{x-c}{q} & c \leq x \leq c+q \end{cases}$$

式中  $c$  代表資料中心， $p$  與  $q$  分別代表模糊數的左右分展度。若  $p = q$ ，則爲對稱三角形模糊數。三角形隸屬度函數圖形如圖1。

2. 若  $X = (c, s)_{LR}$  爲指數型模糊數，則其隸屬度爲

$$X(x) = \begin{cases} \exp[-(\frac{c-x}{s})^m] & x \leq c \\ \exp[-(\frac{x-c}{s})^m] & x \geq c \end{cases}$$

式中  $c$  代表模糊數的中心， $s$  代表模糊數的分展度。指數型隸屬度函數圖形如圖2。

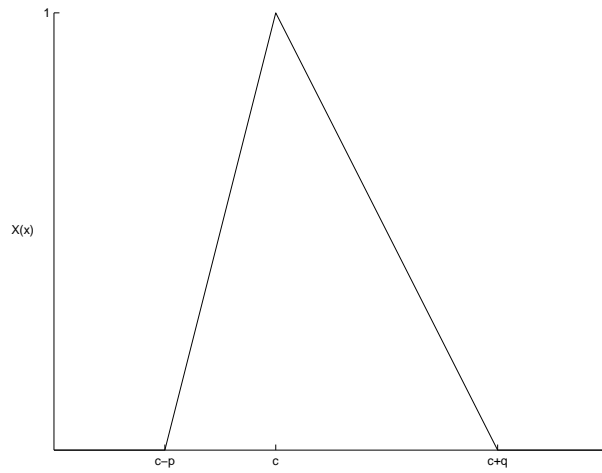


圖 1: 三角形隸屬度函數

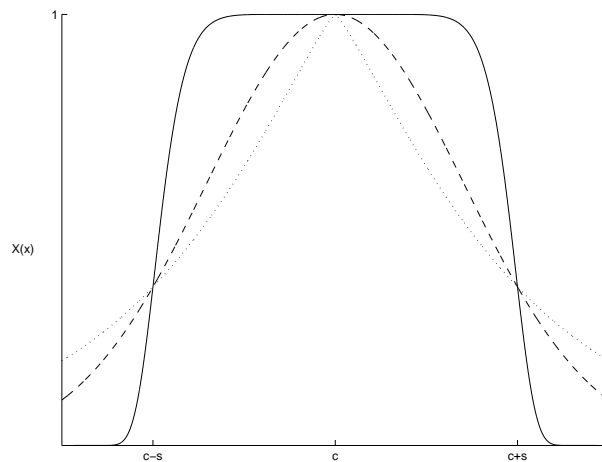


圖 2: 指數型隸屬度函數 (點線表示  $m=1.2$ , 虛線表示  $m=2$ , 實線表示  $m=10$ )

### 3.2 Yang 和 Ko 距離公式

由第 2 章的結果發現，在模型 I、II、III 的架構下，使用簡單距離公式執行最小平方法所得到的結果皆與隸屬度函數無關，因此本節中將採用 Yang 和 Ko(1996) 所提出的距離公式，試著找出與隸屬度函數有關聯的最小平方估計。

定義 3.2 (Yang 和 Ko 的距離公式) 若  $A = (m_a, \alpha_a, \beta_a)_{LR}$ ， $B = (m_b, \alpha_b, \beta_b)_{LR}$ ，則

$A$  與  $B$  之間的距離  $d_{LR}(A, B)$  定義如下：

$$d_{LR}(A, B) = [(m_a - m_b)^2 + ((m_a - l\alpha_a) - (m_b - l\alpha_b))^2 + ((m_a + r\beta_a) - (m_b + r\beta_b))^2]^{\frac{1}{2}} \quad (3.1)$$

其中  $l = \int_0^1 L^{-1}(w)dw$  且  $r = \int_0^1 R^{-1}(w)dw$ 。

(3.1) 式的距離公式相當於將兩個模糊數的距離定為中心與中心距離的平方，加上左(右)區間各別平均值距離的平方，再開根號。若  $A, B$  為對稱  $LR$  型模糊數則  $l = r$ ，且  $d_{LR}^2(A, B) = 3(m_a - m_b)^2 + 2l^2(\alpha_a - \alpha_b)^2$ 。

當  $A, B$  為對稱三角形模糊數，則

$$\begin{aligned} l &= \int_0^1 L^{-1}(x)dx \\ &= \int_0^1 (1-x)dx \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

當  $A, B$  為指數型模糊數，則

$$\begin{aligned} l &= \int_0^1 L^{-1}(x)dx \\ &= \int_0^1 [(-\ln x)^{\frac{1}{m}}]dx \\ &= \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right) \end{aligned}$$

相較於 (2.2) 與 (2.3) 的簡單距離公式，(3.1) 的距離公式可適度避免了主觀的權重選取，除此之外 Yang 和 Ko(1996) 還證明 (3.1) 距離公式是完備的距離測度。

### 3.3 Yang 和 Ko 距離公式下之最小平方估計

本節中我們考慮的應變數均為  $LR$  型模糊數。首先在模型 I 的架構下，我們採用 (3.1) 中 Yang 和 Ko 的距離公式，執行最小平方法求參數估計。在應變數  $y_i = (c_i, s_i)_{LR}$  為對稱  $LR$  型時，則 (3.1) 中的  $l = r$ ，且誤差平方和  $D^2$  可用矩陣



與向量表示如下：

$$\begin{aligned}
D^2 &\equiv \|Xa - C\|^2 + \|(Xa - lXr) - (C - lS)\|^2 + \\
&\quad \|(Xa + lXr) - (C + lS)\|^2 \\
&= 3a'X'Xa - 6a'X'C + 2l^2r'X'Xr - 4l^2r'X'S + 2l^2S'S
\end{aligned}$$

分別令  $\frac{\partial D^2}{\partial a} = 0$  與  $\frac{\partial D^2}{\partial r} = 0$  可得：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D^2}{\partial a} &= 6X'Xa - 6X'C = 0 \\
\frac{\partial D^2}{\partial r} &= 4l^2X'Xr - 4l^2X'S = 0
\end{aligned}$$

$a$  與  $r$  的解如下：

$$\begin{aligned}
\hat{a} &= (X'X)^{-1}X'C \\
\hat{r} &= (X'X)^{-1}X'S
\end{aligned} \tag{3.2}$$

在模型 I 架構下，無論是利用 (2.2) 的簡單距離公式或 (3.1) Yang 和 Ko 的距離公式，所得到的最小平方估計都相同，並且與隸屬度函數無關。

接著我們考慮 D'Urso 和 Gastaldi 所提出的對稱雙重模糊線性迴歸模型，即模型 II。採用 (3.1) 式 Yang 和 Ko 的距離公式及最小平方法，誤差平方和  $D^2$  可表示如下：

$$\begin{aligned}
D^2 &\equiv \|Xa - C\|^2 + \|[Xa - l(Xab + \mathbf{1}d)] - [C - lS]\|^2 \\
&\quad + \|[Xa + l(Xab + \mathbf{1}d)] - [C + lS]\|^2 \\
&= 3a'X'Xa - 6C'Xa + 3C'C + 2l^2b^2a'X'Xa + 4l^2bda'X'\mathbf{1} - 4l^2ba'X'S \\
&\quad + 2l^2nd^2 - 4l^2dn\bar{S} + 2l^2S'S
\end{aligned}$$

令  $\frac{\partial D^2}{\partial a} = 0$ ,  $\frac{\partial D^2}{\partial b} = 0$ ,  $\frac{\partial D^2}{\partial d} = 0$ ，經過繁雜的計算後可得到以下的解 (詳見附錄一)：

$$\hat{b} = \frac{-K_2 \pm \sqrt{K_2^2 - 4K_1K_3}}{2K_1} \tag{3.3}$$

$$\hat{d} = \bar{S} - \hat{b}\bar{C} \tag{3.4}$$

$$\hat{a} = \frac{1}{3 + 2l^2\hat{b}^2}(X'X)^{-1}[3X'C + 2l^2\hat{b}X'S - 2l^2\hat{b}\bar{S}X'\mathbf{1} + 2l^2\hat{b}\bar{C}X'\mathbf{1}] \tag{3.5}$$

其中  $K_1 = 2l^2[\hat{C}'S - n\bar{C}\bar{S}]$ ,  $K_2 = 3[\|\hat{C}\|^2 - n\bar{C}^2] - 2[\|\hat{S}\|^2 - n\bar{S}^2]$ ,  $K_3 = 3n\bar{S}\bar{C} - 3C'\hat{S}$ , 且  $\hat{C}, \hat{S}, \bar{C}, \bar{S}$  定義如 2.4 節。此時  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{d}$  均有兩組解，將兩組解分別代入誤差平方和  $D^2$  中，找出使  $D^2$  較小的解即為我們的最小平方估計，而此最小平方估計結果確實與隸屬度函數有關。

在應變數值為不對稱  $LR$  型模糊數時，我們可使用模型 III。利用 Yang 和 Ko 的距離公式及最小平方法，可得誤差平方和  $D^2$  如下：

$$\begin{aligned}
D^2 &\equiv \|Xa - C\|^2 + \|[Xa - l(Xab + \mathbf{1}d)] - [C - lp]\|^2 \\
&\quad + \|[Xa + l(Xag + \mathbf{1}h)] - [C + rq]\|^2 \\
&= 3C'C - 6C'Xa + (3 - 2lb + l^2b^2 + 2rg + r^2g^2)a'X'Xa + (2lb - 2rg)C'Xa \\
&\quad + (2 - 2lb)p'Xa - (2 + 2rg)q'Xa + (2l^2db - 2ld + 2rh + 2r^2gh)a'X'\mathbf{1} - 2C'p \\
&\quad + 2C'q + (2ld - 2rh)n\bar{C} - 2ldn\bar{p} - 2rhn\bar{q} + l^2d^2n + r^2h^2n + p'p + q'q
\end{aligned}$$

分別令  $\frac{\partial D^2}{\partial a} = 0$ ,  $\frac{\partial D^2}{\partial b} = 0$ ,  $\frac{\partial D^2}{\partial d} = 0$ ,  $\frac{\partial D^2}{\partial g} = 0$ ,  $\frac{\partial D^2}{\partial h} = 0$  可得：

$$\begin{aligned}
&-6X'C + (6 - 4lb + 2l^2b^2 + 4rg + 2r^2g^2)X'Xa \\
&\quad + 2lbX'C + 2X'p - 2lbX'p - 2ldX'\mathbf{1} + 2l^2dbX'\mathbf{1} \\
&\quad - 2rgX'C - 2X'q - 2rgX'q + 2rhX'\mathbf{1} + 2r^2ghX'\mathbf{1} = 0 \\
&\quad 2lC'Xa - 2lp'Xa - 2la'X'Xa + 2l^2ba'X'Xa + 2l^2da'X'\mathbf{1} = 0 \\
&\quad 2lC'\mathbf{1} - 2lp'\mathbf{1} - 2la'X'\mathbf{1} + 2l^2ba'X'\mathbf{1} + 2l^2dn = 0 \\
&\quad -2rC'Xa - 2rq'Xa + 2ra'X'Xa + 2r^2ga'X'Xa + 2r^2ha'X'\mathbf{1} = 0 \\
&\quad -2rC'\mathbf{1} - 2rq'\mathbf{1} + 2ra'X'\mathbf{1} + 2r^2ga'X'\mathbf{1} + 2r^2hn = 0
\end{aligned}$$

由於上述方程式過於複雜， $a, b, d, g, h$  的通解無法求得，故我們僅列出以下的

遞迴關係式：

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{3 - 2lb + 2rg - l^2b^2 + r^2g^2} (X'X)^{-1} [3X'C - 2lbX'C - 2lX'p + 2l^2bX'p + 2ldX'\mathbf{1} \\
 &\quad - 2l^2bdX'\mathbf{1} + 2rgX'C + 2rX'q + 2r^2gX'q - 2r^2ghX'\mathbf{1} + 2rhX'\mathbf{1}] \\
 b &= \frac{1}{l} (a'X'Xa)^{-1} [C'Xa - lp'Xa - a'X'Xa + lda'X'\mathbf{1}] \\
 g &= \frac{1}{r} (a'X'Xa)^{-1} [C'Xa + rq'Xa - a'X'Xa + rha'X'\mathbf{1}] \\
 d &= \frac{1}{l} [-\bar{C} + l\bar{p} + a'X'\mathbf{1} - lba'X'\mathbf{1}] \\
 h &= \frac{1}{r} [\bar{C} + r\bar{q} - rga'X'\mathbf{1} + a'X'\mathbf{1}] \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

我們可利用數學軟體試著找出可能的解，同時可明顯的看出，最小平方估計與隸屬度函數有關。

## 4 具影響力觀察值之偵測

### 4.1 傳統線性迴歸中的偵測方法

最小平方方法的缺點是估計的結果容易受到某一些特殊觀察值的影響，在本章中，我們將引進傳統線性迴歸中偵測具影響力觀察值的概念與技巧，在模糊線性迴歸中架構出一套找出具影響力觀測值的方法。

在傳統迴歸中，若某個觀察值的自變數或應變數部份明顯偏離其他自變數與應變數的值，此時我們稱這樣的觀察值為離群值。若某一觀察值被移除後，會造成最小平估計有巨大的改變，我們稱此觀察值為具影響力的觀察值。

在自變數離群值的部分，大都以槓桿值  $h_{ii} = x_i'(X'X)^{-1}x_i$  作為判斷，其中  $0 \leq h_{ii} \leq 1$ ， $h_{ii}$  越大，代表第  $i$  筆資料越有可能是離群值。若要偵測應變數部分的離群值，我們可利用殘差值  $e_i = y_i - \hat{y}_i$  做為偵測基準，其中  $\hat{y}_i$  為第  $i$  筆觀察值的預測值。當  $|e_i|$  越大，代表第  $i$  筆資料越有可能是離群值。或者可利用

$$e_{(i)} = y_i - \hat{y}_{(i)} = \frac{e_i}{1 - h_{ii}}$$

來作判斷，其中  $\hat{y}_{(i)}$  為扣除第  $i$  筆資料後，再對第  $i$  筆資料作出的預測值。若  $|e_{(i)}|$  值越大，代表第  $i$  筆資料越有可能是離群值。

但是造成迴歸模型有巨大改變的，除了有可能是離群值外，還有可能是一些具影響力的觀察值。而這些具影響力的觀察值，在傳統迴歸中，大都使用 Cook 距離

$$CD_i \equiv \frac{\|\hat{Y} - \hat{Y}_{(i)}\|^2}{ps^2} = \frac{e_i^2}{ps^2} \frac{h_{ii}}{(1 - h_{ii})^2}$$

來判斷，其中  $\hat{Y}_{(i)}$  為扣除第  $i$  筆資料後的預測值向量， $p$  為參數個數， $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n-p}$  為均方差 (mean square error)。若  $CD_i$  值越大，代表第  $i$  筆資料越有可能是具影響力的觀察值。利用 Cook 距離的優點之一是，無論自變數或應變數的測量單位為何，最後都不會影響  $CD_i$  的大小。

## 4.2 模糊線性迴歸中的偵測方法

在模糊環境下，令  $e_i$  為模糊數  $y_i$  與  $\hat{y}_i$  間之距離， $e_{(i)}$  為  $y_i$  與  $\hat{y}_{(i)}$  間之距離。本節中我們僅在模型I的架構下進行討論，推導出有關  $e_i, e_{(i)}$  與  $CD_i$  的重要公式，作為偵測離群值與有影響力觀察值之用。對模型II而言，不論是利用簡單距離公式或Yang和Ko的距離公式，雖然皆可獲得最小平方估計，但卻無法導出如同模型I所能獲致有關  $e_i$ 、 $e_{(i)}$  與  $CD_i$  的結果。至於最複雜的模型III，則更無法處理了。

在簡單距離公式下可導出有關  $e_i$ ， $e_{(i)}$  之結果如下(計算過程詳見附錄二)：

$$\begin{aligned} e_i^2 &= (c_i - x_i \hat{a})^2 + (s_i - x_i \hat{r})^2 \\ &= (e_i^c)^2 + (e_i^s)^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} e_{(i)}^2 &= (c_i - x_i \hat{a}_{(i)})^2 + (s_i - x_i \hat{r}_{(i)})^2 \\ &= \left( \frac{e_i}{1 - h_{ii}} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中  $e_i^c = c_i - x_i \hat{a}$  為資料中心的殘差， $e_i^s = s_i - x_i \hat{r}$  為資料分展度的殘差，且  $\hat{a}$  與  $\hat{r}$  定義如(2.4)。

同理，在Yang和Ko的距離公式下可導出有關  $e_i$ ， $e_{(i)}$  之結果如下(計算過程詳見附錄二)：

$$\begin{aligned} e_i^2 &= d_{LR}^2(y_i, \hat{y}_i) \\ &= 3(e_i^c)^2 + 2l^2(e_i^s)^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} e_{(i)}^2 &= d_{LR}^2(y_i, \hat{y}_{(i)}) \\ &= 3\left(\frac{e_i^c}{1 - h_{ii}}\right)^2 + 2l^2\left(\frac{e_i^s}{1 - h_{ii}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{e_i}{1 - h_{ii}}\right)^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

由(4.2)與(4.4)式可以發現， $e_{(i)}$  與  $e_i$  間的關係和傳統迴歸分析的結果相同。並且在功能上與傳統迴歸一樣，即  $e_{(i)}$  的值越大，代表扣除掉第  $i$  筆資料後，在當筆資料上的殘差改變越大，則該筆資料越有可能是造成整個模型改變的關鍵。

但是要在模糊環境下導出類似Cook距離的公式，若能先定義出模糊向量間的距離公式，可使整個處理過程較為方便。令  $F_{LR}(\mathfrak{R})$  是所有對稱  $LR$  型模糊數的集合，而  $\tilde{F}_{LR}(\mathfrak{R}) = \{(X_1, \dots, X_p)' | X_i \in F_{LR}(\mathfrak{R})\}$  是所有對稱  $LR$  型模糊數所構成  $p$  維向量的集合。藉由  $F_{LR}(\mathfrak{R})$  上的距離測度，我們可以定義一個  $\tilde{F}_{LR}(\mathfrak{R})$  上的距離測度，其方法如下：

引理 4.1 設  $d : F_{LR}(\mathfrak{R}) \times F_{LR}(\mathfrak{R}) \rightarrow \mathfrak{R}$  是距離測度，對任意兩個模糊向量  $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)'$ ， $\mathbb{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_p)' \in \tilde{F}_{LR}(\mathfrak{R})$ ，定義

$$\tilde{d}_{LR}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^p d^2(X_i, Y_i)} \quad (4.5)$$

則  $\tilde{d}_{LR}$  亦是  $\tilde{F}_{LR}$  上的距離測度；若  $d$  是完備距離測度時， $\tilde{d}_{LR}$  亦為完備距離測度。(詳細證明見附錄三)

當  $d$  是簡單距離測度時，定義Cook距離  $CD_i$  如下：

$$CD_i \equiv \frac{\tilde{d}_{LR}^2(\hat{\mathbb{Y}}, \hat{\mathbb{Y}}_{(i)})}{ps^2} = \frac{\|X\hat{a} - X\hat{a}_{(i)}\|^2 + \|X\hat{r} - X\hat{r}_{(i)}\|^2}{ps^2}$$

我們可進一步的證明(詳見附錄四)

$$CD_i = \frac{1}{ps^2} \frac{e_i^2 h_{ii}}{(1 - h_{ii})^2} \quad (4.6)$$

此時

$$s^2 = \frac{1}{n-p} \sum_{i=1}^n e_i^2 \quad \text{且} \quad e_i^2 = (e_i^c)^2 + (e_i^s)^2$$

當  $d$  是Yang和Ko的距離測度時，定義Cook距離  $CD_i$  如下：

$$\begin{aligned} CD_i &\equiv \frac{\tilde{d}_{LR}^2(\hat{\mathbb{Y}}, \hat{\mathbb{Y}}_{(i)})}{ps^2} \\ &= \frac{1}{ps^2} \{ \|X\hat{a} - X\hat{a}_{(i)}\|^2 + \|(X\hat{a} - lX\hat{r}) - (X\hat{a}_{(i)} - lX\hat{r}_{(i)})\|^2 \\ &\quad + \|(X\hat{a} + lX\hat{r}) - (X\hat{a}_{(i)} + lX\hat{r}_{(i)})\|^2 \} \end{aligned}$$

我們可進一步的證明(詳見附錄四)

$$CD_i = \frac{1}{ps^2} \frac{e_i^2 h_{ii}}{(1 - h_{ii})^2} \quad (4.7)$$

此時

$$s^2 = \frac{1}{n-p} \sum_{i=1}^n e_i^2 \quad \text{且} \quad e_i^2 = 3(e_i^c)^2 + 2l^2(e_i^s)^2$$

我們必須注意的是：雖然(4.6)與(4.7)的 $CD_i$ 公式在符號外表上是一樣的，但實質上是不相同的，因為兩式中的 $e_i^2$ 與 $s^2$ 所代表的內容根本不一樣。一般來說，(4.7)中的 $s^2$ 值大於(4.6)中的 $s^2$ 值，因此由(4.6)所計算出的Cook距離會大於(4.7)所計算出的結果。

無論是在簡單距離測度下，或是Yang和Ko的距離測度下，由(4.6)與(4.7)的結果，可以看出 $CD_i$ 的值皆受槓桿值 $h_{ii}$ 以及殘差值 $e_i$ 的影響，而這樣的結論和傳統迴歸分析上偵測有影響力觀測值的結論是一致。

在模型I的架構下我們可以利用完整資料的模糊迴歸結果，計算 $e_{(i)}$ ,  $CD_i$ 的值。而在模型II的架構下，我們無法導出如(4.1)~(4.4)的結果，因此僅能藉著逐筆刪除資料，重新做迴歸的方式計算出 $e_{(i)}$ ,  $CD_i$ 等值。

## 5 實例分析

本章中將使用 Tanaka 在 1987 所提出的資料(如表格 1) 來驗證我們在前幾章所獲致的理論結果。資料中有三個實數自變數，一個模糊應變數及十筆觀察值。在此僅考慮應變數值為指數型模糊數。採用指數型隸屬度函數的優點是，只要適當選取  $m$  的值就可以充分表現應變數資料分布的特性。若應變數的值，落在所蒐集到的資料區間以外的可能性較大時，我們可選取較小的  $m$  值作為描述應變數資料的隸屬度函數，反之，若應變數的值落在資料區間以外的可能性較小，則選取較大的  $m$  值作為描述資料的隸屬度函數。

由於我們無法求得模型 III 最小平方估計的公式解，並且在本章中僅考慮指數型隸屬度函數，因此僅針對模型 I 與模型 II 進行資料分析。表格 2~ 表格 11 是在模型 I 與模型 II 的架構下，分別採用簡單距離公式與 Yang 和 Ko 的距離公式，以及選取不同  $m$  值所獲得的結果。各表中，除了包含參數的最小平方估計與殘差平方和外、還包含了偵測自變數部份離群值的槓桿值  $h_{ii}$ 、偵測應變數部份離群值的殘差平方  $e_i^2, e_{(i)}^2$  以及偵測具影響力觀察值的 Cook 距離  $CD_i$  值。在簡單距離公式下，無論模型 I 與模型 II 表格的內容都不會受  $m$  值改變的影響，因此僅列出  $m = 2$  的情況(如表格 2 與表格 3)。



表格 1: Tanaka(1987) 資料

觀察項	自變數			模糊應變數
$i$	$x_{i1}$	$x_{i2}$	$x_{i3}$	$Y_i = (c_i, r_i)$
1	3	5	9	(96,42)
2	14	8	3	(120,47)
3	7	1	4	(52,33)
4	11	7	3	(106,45)
5	7	12	15	(189,79)
6	8	15	10	(194,65)
7	3	9	6	(107,42)
8	12	15	11	(216,78)
9	10	5	8	(108,52)
10	9	7	4	(103,44)

表格 2: 模型 I,  $m = 2$ , 簡單距離公式下最小平方法結果

i	$(c_i, s_i)$	$(\hat{c}_i, \hat{s}_i)$	$h_{ii}$	$e_i^2$	$e_{(i)}^2$	$CD_i$
1	(96,42)	(93.20,44.62)	0.40	14.69	41.25	0.25
2	(120,47)	(122.48,49.13)	0.43	10.67	32.44	0.21
3	(52,33)	(49.36,32.11)	0.41	7.75	21.90	0.13
4	(106,45)	(104.82,43.01)	0.26	5.35	9.75	0.04
5	(189,79)	(191.79,76.71)	0.55*	13.06	63.57*	0.52*
6	(194,65)	(193.64,67.67)	0.39	7.25	19.38	0.11
7	(107,42)	(109.77,40.85)	0.60*	9.08	55.55*	0.50*
8	(216,78)	(211.65,77.08)	0.42	19.73	58.34*	0.37
9	(108,52)	(110.89,53.24)	0.37	9.91	25.12	0.14
10	(103,44)	(103.36,42.58)	0.18	2.14	3.22	0.01

$\hat{a} = (-1.39, 3.25, 7.92, 5.03)'$ ,  $\hat{r} = (8.01, 1.64, 1.20, 2.85)'$ ,  $\sum e_i^2 = 99.63$

表格 3: 模型 II,  $m = 2$ , 簡單距離公式下最小平方法結果

i	$(c_i, s_i)$	$(\hat{c}_i, \hat{s}_i)$	$h_{ii}$	$e_i^2$	$e_{(i)}^2$	$CD_i$
1	(96,42)	(93.86,42.38)	0.40	4.71	11.08	0.36
2	(120,47)	(122.04,50.63)	0.43	17.34	31.44	0.38
3	(52,33)	(50.11,29.56)	0.41	15.41	92.87*	0.66*
4	(106,45)	(104.13,45.38)	0.26	3.65	6.55	0.35
5	(189,79)	(193.31,71.51)	0.55*	74.67*	90.38*	0.38
6	(194,65)	(192.58,71.30)	0.39	41.67	118.34*	0.63*
7	(107,42)	(108.12,46.55)	0.60*	21.97	38.00	0.39
8	(216,78)	(211.71,76.90)	0.42	19.64	78.55*	0.61*
9	(108,52)	(112.48,47.86)	0.37	37.44	82.31*	0.51
10	(103,44)	(102.67,44.96)	0.18	1.02	5.34	0.34

$\hat{a} = (-3.14, 3.43, 7.62, 5.40)'$ ,  $\hat{b} = 0.29$ ,  $\hat{d} = 14.88$ ,  $\sum e_i^2 = 236.98$

表格 4: 模型 I,  $m = 1.2$ , Yang 和 Ko 距離公式下最小平方法結果

i	$(c_i, s_i)$	$(\hat{c}_i, \hat{s}_i)$	$h_{ii}$	$e_i^2$	$e_{(i)}^2$	$CD_i$
1	(96,42)	(93.20,44.62)	0.40	35.61	100.02	0.24
2	(120,47)	(122.48,49.13)	0.43	26.43	80.41	0.20
3	(52,33)	(49.36,32.11)	0.41	22.26	62.94	0.15
4	(106,45)	(104.82,43.01)	0.26	11.17	31.59	0.03
5	(189,79)	(191.79,76.71)	0.55*	32.71	159.18*	0.51*
6	(194,65)	(193.64,67.67)	0.39	12.99	34.72	0.08
7	(107,42)	(109.77,40.85)	0.60*	25.61	156.77*	0.55*
8	(216,78)	(211.65,77.08)	0.42	58.16	171.95*	0.42
9	(108,52)	(110.89,53.24)	0.37	27.84	70.53	0.16
10	(103,44)	(103.36,42.58)	0.18	3.95	5.94	0.01

$\hat{a} = (-1.39, 3.25, 7.92, 5.03)'$ ,  $\hat{r} = (8.01, 1.64, 1.20, 2.85)'$ ,  $\sum e_i^2 = 256.73$

表格 5: 模型 II,  $m = 1.2$ , Yang 和 Ko 距離公式下最小平方法結果

i	$(c_i, s_i)$	$(\hat{c}_i, \hat{s}_i)$	$h_{ii}$	$e_i^2$	$e_{(i)}^2$	$CD_i$
1	(96,42)	(94.91,37.94)	0.40	32.79	60.26	0.02
2	(120,47)	(122.32,49.77)	0.43	29.66	80.87	0.04
3	(52,33)	(52.54,19.65)	0.41	316.42*	360.47*	0.08
4	(106,45)	(105.01,42.30)	0.26	15.89	24.84	0.01
5	(189,79)	(191.09,79.46)	0.55*	13.48	63.15	0.04
6	(194,65)	(190.68,79.29)	0.39	394.20*	536.55*	0.07
7	(107,42)	(108.98,44.01)	0.60*	18.96	104.09	0.07
8	(216,78)	(209.07,87.22)	0.42	294.63*	498.27*	0.13*
9	(108,52)	(112.82,45.67)	0.37	140.58	207.55	0.05
10	(103,44)	(103.52,41.69)	0.18	10.51	13.72	0.002

$\hat{d} = -3.03$  ,  $\hat{b} = 0.43$  ,  $\hat{a} = (1.28, 3.30, 7.41, 5.19)'$  ,  $\sum e_i^2 = 1267.13$

表格 6: 模型 I,  $m = 2$ , Yang 和 Ko 距離公式下最小平方法結果

i	$(c_i, s_i)$	$(\hat{c}_i, \hat{s}_i)$	$h_{ii}$	$e_i^2$	$e_{(i)}^2$	$CD_i$
1	(96,42)	(93.20,44.62)	0.40	34.24	96.18	0.23
2	(120,47)	(122.48,49.13)	0.43	25.53	77.68	0.20
3	(52,33)	(49.36,32.11)	0.41	22.10	62.49	0.15
4	(106,45)	(104.82,43.01)	0.26	10.38	18.91	0.03
5	(189,79)	(191.79,76.71)	0.55*	31.66	154.08*	0.51*
6	(194,65)	(193.64,67.67)	0.39	11.57	30.93	0.07
7	(107,42)	(109.77,40.85)	0.60*	25.35	155.17*	0.55*
8	(216,78)	(211.65,77.08)	0.42	57.99	171.46*	0.43
9	(108,52)	(110.89,53.24)	0.37	27.53	69.75	0.16
10	(103,44)	(103.36,42.58)	0.18	3.55	5.34	0.01

$\hat{a} = (-1.39, 3.25, 7.92, 5.03)'$  ,  $\hat{r} = (8.01, 1.64, 1.20, 2.85)'$  ,  $\sum e_i^2 = 249.91$

表格 7: 模型 II,  $m = 2$ , Yang 和 Ko 距離公式下最小平方法結果

i	$(c_i, s_i)$	$(\hat{c}_i, \hat{s}_i)$	$h_{ii}$	$e_i^2$	$e_{(i)}^2$	$CD_i$
1	(96,42)	(94.76,37.78)	0.40	32.73	61.86	0.02
2	(120,47)	(122.33,49.76)	0.43	28.30	77.95	0.04
3	(52,33)	(52.28,19.29)	0.41	295.52*	336.34*	0.09
4	(106,45)	(105.00,42.22)	0.26	15.12	23.74	0.01
5	(189,79)	(191.12,79.67)	0.55*	14.15	67.62	0.06
6	(194,65)	(190.93,79.59)	0.39	362.74*	493.27*	0.07
7	(107,42)	(109.07,43.99)	0.60*	19.09	107.17	0.08
8	(216,78)	(209.27,87.57)	0.42	279.81*	476.79*	0.13*
9	(108,52)	(112.65,45.54)	0.37	130.24	194.90	0.05
10	(103,44)	(103.59,41.60)	0.18	10.06	13.27	0.002

$\hat{d} = -3.45$  ,  $\hat{b} = 0.43$  ,  $\hat{a} = (1.11, 3.29, 7.45, 5.17)'$  ,  $\sum e_i^2 = 1187.75$

表格 8: 模型 I,  $m = 3$ , Yang 和 Ko 距離公式下最小平方法結果

i	$(c_i, s_i)$	$(\hat{c}_i, \hat{s}_i)$	$h_{ii}$	$e_i^2$	$e_{(i)}^2$	$CD_i$
1	(96,42)	(93.20,44.62)	0.40	34.41	96.65	0.23
2	(120,47)	(122.48,49.13)	0.43	25.64	78.01	0.20
3	(52,33)	(49.36,32.11)	0.41	22.12	62.54	0.15
4	(106,45)	(104.82,43.01)	0.26	10.48	19.08	0.03
5	(189,79)	(191.79,76.71)	0.55*	31.79	154.70*	0.51*
6	(194,65)	(193.64,67.67)	0.39	11.74	31.39	0.07
7	(107,42)	(109.77,40.85)	0.60*	25.38	155.36*	0.55*
8	(216,78)	(211.65,77.08)	0.42	58.01	171.52*	0.43
9	(108,52)	(110.89,53.24)	0.37	27.57	69.85	0.16
10	(103,44)	(103.36,42.58)	0.18	3.60	5.41	0.01

$\hat{a} = (-1.39, 3.25, 7.92, 5.03)'$  ,  $\hat{r} = (8.01, 1.64, 1.20, 2.85)'$  ,  $\sum e_i^2 = 250.74$

表格 9: 模型 II,  $m = 3$ , Yang 和 Ko 距離公式下最小平方法結果

i	$(c_i, s_i)$	$(\hat{c}_i, \hat{s}_i)$	$h_{ii}$	$e_i^2$	$e_{(i)}^2$	$CD_i$
1	(96,42)	(94.78,37.79)	0.40	32.73	61.65	0.02
2	(120,47)	(122.33,49.76)	0.43	28.46	78.30	0.04
3	(52,33)	(52.31,19.34)	0.41	298.04*	339.26*	0.08
4	(106,45)	(105.00,42.23)	0.26	15.21	23.87	0.01
5	(189,79)	(191.11,79.64)	0.55*	14.06	67.06	0.05
6	(194,65)	(190.90,79.55)	0.39	366.55*	498.51*	0.07
7	(107,42)	(109.06,43.99)	0.60*	19.08	102.80	0.08
8	(216,78)	(209.24,87.52)	0.42	281.59*	479.11*	0.13*
9	(108,52)	(112.67,45.56)	0.37	131.49	196.43	0.05
10	(103,44)	(103.59,41.61)	0.18	10.11	13.32	0.002

$\hat{d} = -3.39$  ,  $\hat{b} = 0.43$  ,  $\hat{a} = (1.13, 3.29, 7.44, 5.17)'$  ,  $\sum e_i^2 = 1197.32$

表格 10: 模型 I,  $m = 10$ , Yang 和 Ko 距離公式下最小平方法結果

i	$(c_i, s_i)$	$(\hat{c}_i, \hat{s}_i)$	$h_{ii}$	$e_i^2$	$e_{(i)}^2$	$CD_i$
1	(96,42)	(93.20,44.62)	0.40	35.88	100.80	0.24
2	(120,47)	(122.48,49.13)	0.43	26.62	80.97	0.20
3	(52,33)	(49.36,32.11)	0.41	22.29	63.03	0.15
4	(106,45)	(104.82,43.01)	0.26	11.33	20.64	0.03
5	(189,79)	(191.79,76.71)	0.55*	32.92	160.21*	0.51*
6	(194,65)	(193.64,67.67)	0.39	13.28	35.49	0.08
7	(107,42)	(109.77,40.85)	0.60*	25.67	157.10*	0.54*
8	(216,78)	(211.65,77.08)	0.42	58.19	172.06*	0.42
9	(108,52)	(110.89,53.24)	0.37	27.90	70.69	0.15
10	(103,44)	(103.36,42.58)	0.18	4.02	6.06	0.01

$\hat{a} = (-1.39, 3.25, 7.92, 5.03)'$  ,  $\hat{r} = (8.01, 1.64, 1.20, 2.85)'$  ,  $\sum e_i^2 = 258.10$

表格 11: 模型 II,  $m = 10$ , Yang 和 Ko 距離公式下最小平方法結果

i	$(c_i, s_i)$	$(\hat{c}_i, \hat{s}_i)$	$h_{ii}$	$e_i^2$	$e_{(i)}^2$	$CD_i$
1	(96,42)	(94.93,37.97)	0.40	32.80	59.96	0.01
2	(120,47)	(122.31,49.77)	0.43	29.93	81.46	0.04
3	(52,33)	(52.59,19.71)	0.41	320.68*	365.36*	0.08
4	(106,45)	(105.01,42.31)	0.26	16.05	25.07	0.01
5	(189,79)	(191.09,79.43)	0.55*	13.36	62.29	0.04
6	(194,65)	(190.63,79.23)	0.39	400.57*	545.32*	0.07
7	(107,42)	(108.96,44.02)	0.60*	18.93	103.48	0.07
8	(216,78)	(209.03,87.16)	0.42	297.67*	502.71*	0.13*
9	(108,52)	(112.86,45.70)	0.37	142.67	210.11	0.05
10	(103,44)	(103.59,41.70)	0.18	10.61	13.82	0.002
$\hat{d} = -2.96$ , $\hat{b} = 0.43$ , $\hat{a} = (1.31, 3.30, 7.40, 5.19)'$ , $\sum e_i^2 = 1283.29$						

由表格 2 與表格 3 可看出，根據模型 I 所獲得中心與分展度的預測值較模型 II 為佳。理論上，在採用 Yang 和 Ko 距離公式時模型 II 的中心與分展度預測值會受到  $m$  值的影響，但是由表格 5,7,9,11 卻發現， $m$  值改變對中心與分展度預測值影響不大。

理論上模型 I 的參數估計，不受距離公式與  $m$  值改變的影響，而模型 II 的參數估計是會受到影響的。由表格 3 與表格 5 可以看出，距離公式的不同會對模型 II 的參數估計造成較大的影響，又由表格 5 與表格 7 可看出， $m$  值的不同對模型 II 的參數估計影響較小。

由於第 5 筆與第 7 筆觀察值的槓桿值  $h_{ii}$  較大，因此有可能是自變數部份的離群值。對模型 I 而言，從殘差  $e_i$  來看，沒有特別突出的應變數部份離群值，但由表格 2,4,6,8 來看  $e_{(i)}$  值，第 5,7,8 三筆資料為應變數部份離群值。對模型 II 而言，在簡單距離公式下，表格 3 顯示出可能的應變數離群值有第 3,5,6,8,9 這五筆資料；在 Yang 和 Ko 的距離公式下，表格 5,7,9,11 顯示出可能的應變數離群值僅有第 3,6,8 三筆資料。

對模型I而言，從表格2,4,6,8,10可以看出，只有第5,7筆的 $CD_i$ 值較大，因此是具影響力的觀察值。對模型II而言，在簡單距離公式下，由表格3可以看出第3,6,8三筆資料的 $CD_i$ 值較大，是具影響力觀察值；在Yang和Ko的距離公式下，由表格5,7,9,11可以看出僅第8筆資料的 $CD_i$ 值較大，為具影響力觀察值。

在Yang和Ko的距離公式下，對模型II做模糊線性迴歸，若採用指數型隸屬度函數時，我們應如何選取 $m$ 的值？一個可能簡單的法則是，選取使殘差平方和最小的 $m$ 值。在本例中，由表格5,7,9,11可以看出，當 $m = 2$ 時殘差平方和是最小的，故常態隸屬度函數似乎是我們的最佳選擇。

## 6 附錄

### 6.1 附錄一

(3.3),(3.4) 及 (3.5) 式之推導

$$\begin{aligned}
D^2 &= \|Xa - C\|^2 + \|[Xa - l(Xab + \mathbf{1}d)] - [C - lS]\|^2 \\
&\quad + \|[Xa + l(Xab + \mathbf{1}d)] - [C + lS]\|^2 \\
&= a'X'Xa - C'Xa - a'X'C + C'C + 2a'X'C + l^2b^2a'X'Xa + 2l^2bda'X'\mathbf{1} \\
&\quad - 2l^2ba'X'S + 2l^2bd\mathbf{1}'Xa + 2l^2d^2\mathbf{1}'\mathbf{1} - 2l^2d\mathbf{1}'S \\
&\quad - 2C'Xa + 2C'C - 2l^2bS'Xa - 2l^2S'd\mathbf{1} + 2l^2S'S \\
&= 3a'X'Xa - 6C'Xa + 3C'C + 2l^2b^2a'X'Xa + 4l^2bda'X'\mathbf{1} - 4l^2ba'X'S \\
&\quad + 2l^2nd^2 - 4l^2dn\bar{S} + 2l^2S'S
\end{aligned}$$

令  $\frac{\partial D^2}{\partial a} = 0, \frac{\partial D^2}{\partial b} = 0, \frac{\partial D^2}{\partial d} = 0$  得到

$$\frac{\partial D^2}{\partial a} = 3X'Xa - 3X'C + 2l^2b^2X'Xa + 2l^2bdX'\mathbf{1} - 2l^2bX'S = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial D^2}{\partial b} = ba'X'Xa + da'X'\mathbf{1} - a'X'S = 0 \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial D^2}{\partial d} = ba'X'\mathbf{1} + nd - \mathbf{1}'S = 0 \quad (6.3)$$

由(6.1)知  $a = \frac{1}{3+2l^2b^2}(X'X)^{-1}[3X'C + 2l^2bX'S - 2l^2bdX'\mathbf{1}]$ ，將  $a$  之值代入(6.2)與(6.3)中，可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D^2}{\partial b} &= 9b\|\hat{C}\|^2 + 6l^2b^2\hat{C}'S - 6l^2b^2dn\bar{C} + 9n\bar{C}d \\
&\quad + 12l^2n\bar{S}bd - 6l^2nbd^2 - 9C'\hat{S} - 6l^2\|\hat{S}\|^2b
\end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial D^2}{\partial d} = b\bar{C} + d - \bar{S} = 0 \quad (6.5)$$

其中  $X(X'X)^{-1}X'C = \hat{C}, X(X'X)^{-1}X'S = \hat{S}, \bar{S} = \bar{S}$ 。

再由(6.5)式中得知  $d = \bar{S} - b\bar{C}$ ，代入(6.4)中可以簡化成一個  $b$  的二次式

$$K_1b^2 + K_2b + K_3 = 0$$

故可得  $\hat{b} = \frac{-K_1 \pm \sqrt{K_2^2 - 4K_1K_3}}{2K_1}$



## 6.2 附錄二

### (4.2),(4.3),(4.4) 公式之推導

簡單距離公式下：

$$e_{(i)}^2 = (c_i - x_i \hat{a}_{(i)})^2 + (s_i - x_i \hat{r}_{(i)})^2$$

因  $\hat{a}_{(i)} = \hat{a} - \frac{e_i^c}{1-h_{ii}}(X'X)^{-1}x_i'$ ，且  $\hat{r}_{(i)} = \hat{r} - \frac{e_i^s}{1-h_{ii}}(X'X)^{-1}x_i'$ ，故

$$\begin{aligned} e_{(i)}^2 &= (c_i - x_i \hat{a} + \frac{e_i^c}{1-h_{ii}}x_i(X'X)^{-1}x_i')^2 + \\ &\quad (s_i - x_i \hat{r} + \frac{e_i^s}{1-h_{ii}}x_i(X'X)^{-1}x_i')^2 \\ &= (\frac{e_i^c}{1-h_{ii}})^2 + (\frac{e_i^s}{1-h_{ii}})^2 \\ &= (\frac{e_i}{1-h_{ii}})^2 \end{aligned}$$

Yang 和 Ko 距離公式下：

$$\begin{aligned} e_i^2 &= (c_i - x_i \hat{a})^2 + ((c_i - ls_i) - (x_i \hat{a} - lx_i \hat{r}))^2 + \\ &\quad ((c_i + ls_i) - (x_i \hat{a} + lx_i \hat{r}))^2 \\ &= 3(c_i - x_i \hat{a})^2 + 2(l(s_i - x_i \hat{r}))^2 \\ &= 3(e_i^c)^2 + 2l^2(e_i^s)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{(i)}^2 &= (c_i - x_i \hat{a}_{(i)})^2 + ((c_i - ls_i) - (x_i \hat{a}_{(i)} - lx_i' \hat{r}_{(i)}))^2 + \\ &\quad ((c_i + ls_i) - (x_i' \hat{a}_{(i)} + lx_i' \hat{r}_{(i)}))^2 \\ &= 3(c_i - x_i \hat{a}_{(i)})^2 + 2(ls_i - l(x_i \hat{r}_{(i)}))^2 \\ &= 3(\frac{e_i^c}{1-h_{ii}})^2 + 2l^2(\frac{e_i^s}{1-h_{ii}})^2 \\ &= (\frac{e_i}{1-h_{ii}})^2 \end{aligned}$$

## 6.3 附錄三

### 引理 4.1 之證明

證明：欲證明  $\tilde{d}_{LR}$  為距離測度，即需證明以下三性質成立：

1.  $\forall \mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \tilde{F}_{LR}(\mathfrak{R}), \tilde{d}_{LR}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \geq 0$ , 如果  $\tilde{d}_{LR}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 0$  則  $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$ 。
2.  $\forall \mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \tilde{F}_{LR}(\mathfrak{R}), \tilde{d}_{LR}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \tilde{d}_{LR}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$ 。
3.  $\forall \mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z} \in \tilde{F}_{LR}(\mathfrak{R}), \tilde{d}_{LR}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \leq \tilde{d}_{LR}(\mathbb{X}, \mathbb{Z}) + \tilde{d}_{LR}(\mathbb{Z}, \mathbb{Y})$

因爲  $d$  是距離測度，可以很容易證明1和2兩性質成立，故僅需證明第3性質：

$$\begin{aligned}
\text{因 } \tilde{d}_{LR}^2(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) &= \sum_{i=1}^p d^2(X_i, Y_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^p d^2(X_i, Z_i) + \sum_{i=1}^p d^2(Z_i, Y_i) \\
&\leq \tilde{d}_{LR}^2(\mathbb{X}, \mathbb{Z}) + \tilde{d}_{LR}^2(\mathbb{Z}, \mathbb{Y}) + 2\sqrt{\sum_{i=1}^p d^2(X_i, Z_i)}\sqrt{\sum_{i=1}^p d^2(Z_i, Y_i)} \\
&= (\tilde{d}_{LR}(\mathbb{X}, \mathbb{Z}) + \tilde{d}_{LR}(\mathbb{Z}, \mathbb{Y}))^2 \\
\text{故 } \tilde{d}_{LR}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) &\leq \tilde{d}_{LR}(\mathbb{X}, \mathbb{Z}) + \tilde{d}_{LR}(\mathbb{Z}, \mathbb{Y})
\end{aligned}$$

其次，設  $d$  是完備距離測度。

令  $\{\mathbb{X}^m\}_{m=1}^\infty$  是一個在  $\tilde{F}_{LR}(\mathfrak{R})$  上的柯西數列，即

$\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N} \ni m, m' > k$  恆有  $\tilde{d}_{LR}(\mathbb{X}^m, \mathbb{X}^{m'}) < \varepsilon$ 。

則  $\forall m, m' > k, d(X_j^m, X_j^{m'}) < \sqrt{\sum_{i=1}^p d^2(X_i^m, X_i^{m'})} = \tilde{d}_{LR}(\mathbb{X}^m, \mathbb{X}^{m'}) < \varepsilon$ 。

因此  $\forall 1 \leq j \leq p, \{X_j^m\}_{m=1}^\infty$  是一個在  $F_{LR}(\mathfrak{R})$  上的柯西數列。

故  $\exists X_j \in F_{LR}(\mathfrak{R}), \ni X_j^m \rightarrow X_j$ 。令  $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)'$ 。

$\because X_j^m \rightarrow X_j \therefore \forall \varepsilon > 0, \exists n_j \in \mathbb{N} \ni m > n_j$  恆有  $d(X_j^m, X_j) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}, j = 1, 2, \dots, p$ 。

令  $n = \max\{n_1, n_2, \dots, n_p\}$ ，則  $\forall m > n$ ，恆有  $\tilde{d}_{LR}(\mathbb{X}^m, \mathbb{X}) = \sqrt{\sum_{i=1}^p d^2(X_i^m, X_i)} < \varepsilon$ ，即  $\mathbb{X}^m \rightarrow \mathbb{X}$ 。

## 6.4 附錄四

(4.6),(4.7) 式之推導

簡單距離公式下：

$$\begin{aligned}
CD_i &= \frac{1}{ps^2} \tilde{d}_{LR}(\hat{Y}, \hat{Y}_{(i)}) \\
&= \frac{1}{ps^2} \sum_{i=1}^n d^2(\hat{Y}_i, \hat{Y}_{(i)}) \\
&= \frac{1}{ps^2} \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i \hat{a} - x_i \hat{a}_{(i)})^2 + \sum_{i=1}^n (x_i \hat{r} - x_i \hat{r}_{(i)})^2 \right\} \\
&= \frac{1}{ps^2} \left\{ \left( \frac{e_i^c}{1 - h_{ii}} \right)^2 h_{ii} + \left( \frac{e_i^s}{1 - h_{ii}} \right)^2 h_{ii} \right\} \\
&= \frac{1}{ps^2} \frac{e_i^2 h_{ii}}{(1 - h_{ii})^2}
\end{aligned}$$

Yang 和 Ko 距離公式下：

$$\begin{aligned}
CD_i &= \frac{1}{ps^2} \tilde{d}_{LR}(\hat{Y}, \hat{Y}_{(i)}) \\
&= \frac{1}{ps^2} \sum_{i=1}^n d^2(\hat{Y}_i, \hat{Y}_{(i)}) \\
&= \frac{1}{ps^2} \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i \hat{a} - x_i \hat{a}_{(i)})^2 + \sum_{i=1}^n ((x_i \hat{a} - lx_i \hat{r}) - (x_i \hat{a}_{(i)} - lx_i \hat{r}_{(i)}))^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^n ((x_i \hat{a} + lx_i \hat{r}) - (x_i \hat{a}_{(i)} + lx_i \hat{r}_{(i)}))^2 \right\} \\
&= \frac{1}{ps^2} \left\{ 3 \left( \frac{e_i^c}{1 - h_{ii}} \right)^2 h_{ii} + 2l^2 \left( \frac{e_i^s}{1 - h_{ii}} \right)^2 h_{ii} \right\} \\
&= \frac{1}{ps^2} \frac{e_i^2 h_{ii}}{(1 - h_{ii})^2}
\end{aligned}$$

## 參考書目

- [1] Draper, N. R. and Smith, H., (1980). Applied Regression Analysis, Wiley, New York.
- [2] D'Urso, P. and Gastaldi, T., (2000). A least-squares approach to fuzzy linear regression analysis. *Computational Statistics and Data Analysis* **34**, 427-440.
- [3] D'Urso, P., (2003). Linear regression analysis for fuzzy/crisp input and fuzzy/crisp output data. *Computational Statistics and Data Analysis* **42**,47-72.
- [4] Tanaka, H., (1987). Fuzzy data analysis by possibilistic linear models. *Fuzzy Sets and Systems* **24**, 363-375.
- [5] Tanaka, H., Uejima, S., Asai, K., (1982). Fuzzy linear regression model. *IEEE Trans. Systems Man Cybernet.* **12**, 903-907.
- [6] Xu, R. and Li, C., (2001). Multidimensional least-squares fitting with a fuzzy model. *Fuzzy Sets and systems* **119**, 215-223.
- [7] Yang, M. S. and Ko, C. H., (1996). On a class of  $c$ -numbers clustering procedures for fuzzy data. *Fuzzy Sets and Systems* **84**, 49-60.
- [8] Yang, M. S. and Liu, H. H., (2003). Fuzzy least-squares algorithms for interactive fuzzy linear regression modles. *Fuzzy Sets and Systems* **135**, 305-316.
- [9] Yang, M. S. and Liu, H. H., (2005). A new statistic for influence in linear regression. *Technometrics* **47**, 305-316
- [10] Zimmermann, H. J., (1991). Fuzzy Set Theory and its Applications, Kluwer,Dordrecht.
- [11] 吳柏林(2005)：模糊統計導論方法與應用。台北，五南圖書出版社。