3 LR型模糊線性迴歸

3.1 LR型模糊數

在本章中，我們主要是考慮應變數爲LR型模糊數的模糊線性迴歸，爲了方便起見我們稱其爲LR型模糊線性迴歸，以下是LR型模糊數的定義。

定義**3.1** 設$X = (c, p, q)$是一模糊數。若存在遞減函數$L : \Re^+ \to [0, 1]$, $R : \Re^+ \to [0, 1]$滿足$L(0) = 1$,$L(1) = 0$或$L(+\infty) = 0$,$R(0) = 1$,$R(1) = 0$或$R(+\infty) = 0$使得

$$X(x) = \begin{cases} L(\frac{c-x}{p}) & x \le c \\ R(\frac{x-c}{q}) & x \ge c \end{cases}$$

成立，則稱X為LR型的模糊數，記為$(c, p, q)_{LR}$，其中c為X的平均值，$p > 0$,$q > 0$分別為左右分展度。若左右分展度相同時，即$p = q$，稱為對稱LR型模糊數，並可進一步簡記為$(c, p)_{LR}$。

LR型模糊數所具有的隸屬度函數，稱爲LR型隸屬度函數。以下是兩個常見的LR型模糊數，分別爲三角形模糊數以及指數型模糊數。
1. 若$X = (c, p, q)_{LR}$爲三角形模糊數，則其隸屬度函數爲

$$X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{c-x}{p} & c - p \le x \le c \\ 1 - \frac{x-c}{q} & c \le x \le c + q \end{cases}$$

式中c代表資料中心，p與q分別代表模糊數的左右分展度。若$p = q$，則爲對稱三角形模糊數。三角形隸屬度函數圖形如圖1。
2. 若$X = (c, s)_{LR}$爲指數型模糊數，則其隸屬度爲

$$X(x) = \begin{cases} exp[-(\frac{c-x}{s})^m] & x \le c \\ exp[-(\frac{x-c}{s})^m] & x \ge c \end{cases}$$

式中c代表模糊數的中心，s代表模糊數的分展度。指數型隸屬度函數圖形如圖2。

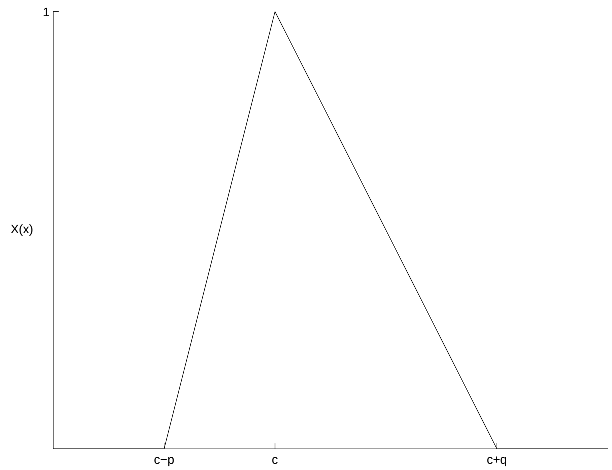

圖 1: 三角形隸屬度函數

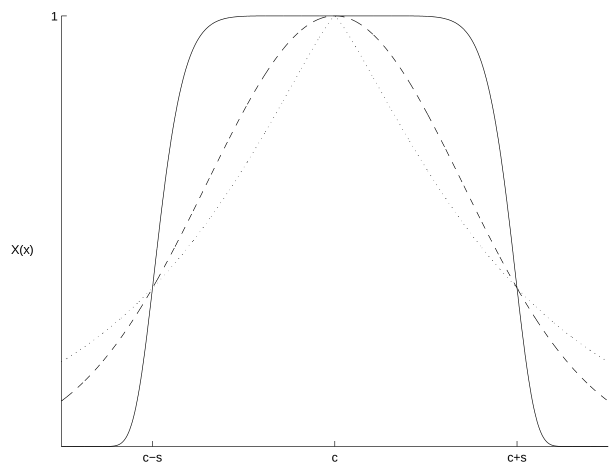

圖 2: 指數型隸屬度函數(點線表示m=1.2, 虛線表示m=2, 實線表示m=10)

3.2 Yang和Ko距離公式

由第2章的結果發現，在模型I、II、III的架構下，使用簡單距離公式執行最小平方法所得到的結果皆與隸屬度函數無關，因此本節中將採用Yang和Ko(1996)所提出的距離公式，試著找出與隸屬度函數有關聯的最小平方估計。

定義**3.2** *(Yang和Ko的距離公式)* 若 $A=(m_a,\alpha_a,\beta_a)_{LR}$，$B=(m_b,\alpha_b,\beta_b)_{LR}$，則

A 與 B 之間的距離 $d_{LR}(A,B)$ 定義如下：

$$
\begin{aligned}
d_{LR}(A,B) &= [(m_a-m_b)^2+((m_a-l\alpha_a)-(m_b-l\alpha_b))^2+ \\
&\quad ((m_a+r\beta_a)-(m_b+r\beta_b))^2]^{\frac{1}{2}} \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

其中 $l=\int_0^1 L^{-1}(w)dw$ 且 $r=\int_0^1 R^{-1}(w)dw$。

(3.1) 式的距離公式相當於將兩個模糊數的距離定爲中心與中心距離的平方，加上左 (右) 區間各別平均值距離的平方，再開根號。若 A,B 爲對稱 LR 型模糊數則 $l=r$，且 $d_{LR}^2(A,B)=3(m_a-m_b)^2+2l^2(\alpha_a-\alpha_b)^2$。
當 A,B 爲對稱三角形模糊數，則

$$
\begin{aligned}
l &= \int_0^1 L^{-1}(x)dx \\
&= \int_0^1 (1-x)dx \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

當 A,B 爲指數型模糊數，則

$$
\begin{aligned}
l &= \int_0^1 L^{-1}(x)dx \\
&= \int_0^1 [(-lnx)^{\frac{1}{m}}]dx \\
&= \Gamma(\frac{1}{m}+1)
\end{aligned}
$$

相較於 (2.2) 與 (2.3) 的簡單距離公式，(3.1) 的距離公式可適度避免了主觀的權重選取，除此之外 Yang 和 Ko(1996) 還證明 (3.1) 距離公式是完備的距離測度。

3.3 Yang 和 Ko 距離公式下之最小平方估計

本節中我們考慮的應變數均爲 LR 型模糊數。首先在模型 I 的架構下，我們採用 (3.1) 中 Yang 和 Ko 的距離公式，執行最小平方法求參數估計。在應變數 $y_i=(c_i,s_i)_{LR}$ 爲對稱 LR 型時，則 (3.1) 中的 $l=r$，且誤差平方和 D^2 可用矩陣

與向量表示如下：

$$\begin{aligned} D^2 &\equiv \|Xa-C\|^2+\|(Xa-lXr)-(C-lS)\|^2+ \\ & \quad \|(Xa+lXr)-(C+lS)\|^2 \\ &= 3a'X'Xa-6a'X'C+2l^2r'X'Xr-4l^2r'X'S+2l^2S'S \end{aligned}$$

分別令 $\frac{\partial D^2}{\partial a}=0$ 與 $\frac{\partial D^2}{\partial r}=0$ 可得：

$$\begin{aligned} \frac{\partial D^2}{\partial a} &= 6X'Xa-6X'C=0 \\ \frac{\partial D^2}{\partial r} &= 4l^2X'Xr-4l^2X'S=0 \end{aligned}$$

a 與 r 的解如下：

$$\begin{aligned} \hat{a} &= (X'X)^{-1}X'C \\ \hat{r} &= (X'X)^{-1}X'S \end{aligned} \tag{3.2}$$

在模型I架構下，無論是利用(2.2)的簡單距離公式或(3.1)Yang和Ko的距離公式，所得到的最小平方估計都相同，並且與隸屬度函數無關。

接著我們考慮D'Urso和Gastaldi所提出的對稱雙重模糊線性迴歸模型，即模型II。採用(3.1)式Yang和Ko的距離公式及最小平方法，誤差平方和 D^2 可表示如下：

$$\begin{aligned} D^2 &\equiv \|Xa-C\|^2+\|[Xa-l(Xab+\mathbf{1}d)]-[C-lS]\|^2 \\ & \quad +\|[Xa+l(Xab+\mathbf{1}d)]-[C+lS]\|^2 \\ &= 3a'X'Xa-6C'Xa+3C'C+2l^2b^2a'X'Xa+4l^2bda'X'\mathbf{1}-4l^2ba'X'S \\ & \quad +2l^2nd^2-4l^2dn\bar{S}+2l^2S'S \end{aligned}$$

令 $\frac{\partial D^2}{\partial a}=0, \frac{\partial D^2}{\partial b}=0, \frac{\partial D^2}{\partial d}=0$，經過繁雜的計算後可得到以下的解(詳見附錄一)：

$$\hat{b} = \frac{-K_2 \pm \sqrt{K_2^2-4K_1K_3}}{2K_1} \tag{3.3}$$

$$\hat{d} = \bar{S}-\hat{b}\bar{C} \tag{3.4}$$

$$\hat{a} = \frac{1}{3+2l^2\hat{b}^2}(X'X)^{-1}[3X'C+2l^2\hat{b}X'S-2l^2\hat{b}\bar{S}X'\mathbf{1}+2l^2\hat{b}^2\bar{C}X'\mathbf{1}] \tag{3.5}$$

其中$K_1=2l^2[\hat{C}'S-n\bar{C}\bar{S}]$,$K_2=3[\|\hat{C}\|^2-n\bar{C}^2]-2[\|\hat{S}\|^2-n\bar{S}^2]$,$K_3=3n\bar{S}\bar{C}-3C'\hat{S}$，且$\hat{C},\hat{S},\bar{C},\bar{S}$定義如2.4節。此時$\hat{a},\hat{b},\hat{d}$均有兩組解，將兩組解分別代入誤差平方和$D^2$中，找出使$D^2$較小的解即爲我們的最小平方估計，而此最小平方估計結果確實與隸屬度函數有關。

在應變數值爲不對稱LR型模糊數時，我們可使用模型III。利用Yang和Ko的距離公式及最小平方法，可得誤差平方和D^2如下：

$$\begin{aligned}
D^2 &\equiv \|Xa-C\|^2+\|[Xa-l(Xab+\mathbf{1}d)]-[C-lp]\|^2 \\
&\quad +\|[Xa+l(Xag+\mathbf{1}h)]-[C+rq]\|^2 \\
&= 3C'C-6C'Xa+(3-2lb+l^2b^2+2rg+r^2g^2)a'X'Xa+(2lb-2rg)C'Xa \\
&\quad +(2-2lb)p'Xa-(2+2rg)q'Xa+(2l^2db-2ld+2rh+2r^2gh)a'X'\mathbf{1}-2C'p \\
&\quad +2C'q+(2ld-2rh)n\bar{C}-2ldn\bar{p}-2rhn\bar{q}+l^2d^2n+r^2h^2n+p'p+q'q
\end{aligned}$$

分別令$\frac{\partial D^2}{\partial a}=0,\frac{\partial D^2}{\partial b}=0,\frac{\partial D^2}{\partial d}=0,\frac{\partial D^2}{\partial g}=0,\frac{\partial D^2}{\partial h}=0$可得：

$$\begin{aligned}
-6X'C+(6-4lb+2l^2b^2+4rg+2r^2g^2)X'Xa & \\
+2lbX'C+2X'p-2lbX'p-2ldX'\mathbf{1}+2l^2dbX'\mathbf{1} & \\
-2rgX'C-2X'q-2rgX'q+2rhX'\mathbf{1}+2r^2ghX'\mathbf{1} &= 0 \\
2lC'Xa-2lp'Xa-2la'X'Xa+2l^2ba'X'Xa+2l^2da'X'\mathbf{1} &= 0 \\
2lC'\mathbf{1}-2lp'\mathbf{1}-2la'X'\mathbf{1}+2l^2ba'X'\mathbf{1}+2l^2dn &= 0 \\
-2rC'Xa-2rq'Xa+2ra'X'Xa+2r^2ga'X'Xa+2r^2ha'X'\mathbf{1} &= 0 \\
-2rC'\mathbf{1}-2rq'\mathbf{1}+2ra'X'\mathbf{1}+2r^2ga'X'\mathbf{1}+2r^2hn &= 0
\end{aligned}$$

由於上述方程式過於複雜，a,b,d,g,h的通解無法求得，故我們僅列出以下的

遞迴關係式：

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1}{3-2lb+2rg-l^2b^2+r^2g^2}(X'X)^{-1}[3X'C-2lbX'C-2lX'p+2l^2bX'p+2ldX'\mathbf{1} \\
&\quad -2l^2bdX'\mathbf{1}+2rgX'C+2rX'q+2r^2gX'q-2r^2ghX'\mathbf{1}+2rhX'\mathbf{1}] \\
b &= \frac{1}{l}(a'X'Xa)^{-1}[C'Xa-lp'Xa-a'X'Xa+lda'X'\mathbf{1}] \\
g &= \frac{1}{r}(a'X'Xa)^{-1}[C'Xa+rq'Xa-a'X'Xa+rha'X'\mathbf{1}] \\
d &= \frac{1}{l}[-\bar{C}+l\bar{p}+a'X'\mathbf{1}-lba'X'\mathbf{1}] \\
h &= \frac{1}{r}[\bar{C}+r\bar{q}-rga'X'\mathbf{1}+a'X'\mathbf{1}] \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

我們可利用數學軟體試著找出可能的解，同時可明顯的看出，最小平方估計與隸屬度函數有關。