6　準貝氏法、平均變異數和與吉氏取樣器的模擬結果

首先我們先假設有3個類別$(I=3)$，7種可能的回答$(J=7)$，考慮一組真實母體

$$\boldsymbol{\theta}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}，$$

$$\boldsymbol{\lambda}=\begin{pmatrix} 0.4 & 0.05 & 0.05 & 0.15 & 0.15 & 0.05 & 0.15 \\ 0.05 & 0.5 & 0.05 & 0.1 & 0.05 & 0.1 & 0.15 \\ 0.05 & 0.05 & 0.4 & 0.05 & 0.1 & 0.1 & 0.25 \end{pmatrix}。$$

利用此母體來模擬一組觀察值，其樣本數爲n。

而比較時所需用到的先驗參數$\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$的選取分以下三種情況：

A. $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$與真實母體比例沒有誤差。

B. $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$與真實母體比例有30%誤差。

C. $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$與真實母體比例有最大誤差75%，最小誤差20%，平均誤差約30%。

每種情況下又分做

1. $\alpha_+=3,10,50,500,1000$

2. $\beta_{i+}=10,500$

共10種狀況來討論，每一種狀況分別對相同的樣本數重複採樣M次進行模擬比較。

每一次採樣的估計值分別計算最大相對誤差

$$rel-max(\tilde{\theta}_m)=\boldsymbol{Max}_{1\le i\le I}\{\frac{\tilde{\theta}_i-\theta_i}{\theta_i}\}，\quad m=1,2,\ldots,M， \tag{6.1}$$

和平均相對誤差

$$rel-\tilde{\tilde{\theta}}_m=\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}(\frac{\tilde{\theta}_i-\theta_i}{\theta_i})，\quad m=1,2,\ldots,M， \tag{6.2}$$

其中$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_I)$表示利用貝氏法計算出的後驗平均數，而$\tilde{\boldsymbol{\theta}}=(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2,\cdots,\tilde{\theta}_I)$表示利用準貝氏法(q-B)、平均變異數和(AVS)或吉氏取樣器(Gibbs sampler)計算出的後驗平均數。

而重複採樣M次之後便去計算最大相對誤差的平均

$$rel - max(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\{rel - max(\tilde{\theta}_m)\}\text{，} \tag{6.3}$$

以及平均相對誤差的平均

$$rel - \bar{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\{rel - \bar{\tilde{\theta}}_m\}\text{，} \tag{6.4}$$

並紀錄在M組抽樣模擬中，q-B、AVS或Gibbs sampler相比有幾組「最大相對誤差」較小，和有幾組「平均相對誤差」較小，作爲評判各種方法優劣的依據。

此部分數據可見附錄A的表1到表6，由此部分數據所繪成的最大相對誤差折線圖請參考圖A-1、圖B-1和圖C-1，而平均相對誤差折線圖則放在圖A-2、圖B-2和圖C-2。

另外，定義$C \equiv \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\frac{\beta_{i+}}{\alpha_i}$，用來區別模擬時所選取的先驗參數，我們將以此$C$值爲準則在第七節的結論中歸納出結論何時適用q-B、AVS或Gibbs sampler來代替貝氏法進行估計。

6.1 小樣本數$(1 \le n \le 9)$的模擬結果

本節主要針對樣本數$1 \le n \le 9$的情況下做模擬，而且每一種狀況分別對於相同的樣本數都重複採樣100次進行模擬比較。

A. $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$與真實母體比例沒有誤差。

先驗參數$\boldsymbol{\alpha}$的選取爲：

當$\alpha_+ = 3$時，$\boldsymbol{\alpha} = (1.5\ \ 0.9\ \ 0.6)$，

當$\alpha_+ = 10$時，$\boldsymbol{\alpha} = (5\ \ 3\ \ 2)$，

當$\alpha_+ = 50$時，$\boldsymbol{\alpha} = (25\ \ 15\ \ 10)$，

當$\alpha_+ = 500$時，$\boldsymbol{\alpha} = (250\ \ 150\ \ 100)$，

當$\alpha_+ = 1000$時，$\boldsymbol{\alpha} = (500\ \ 300\ \ 200)$，

先驗參數$\boldsymbol{\beta}$的選取爲：

當$\beta_{i+} = 10$時，$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 4 & 0.5 & 0.5 & 1.5 & 1.5 & 0.5 & 1.5 \\ 0.5 & 5 & 0.5 & 1 & 0.5 & 1 & 1.5 \\ 0.5 & 0.5 & 4 & 0.5 & 1 & 1 & 2.5 \end{pmatrix}$，

當$\beta_{i+} = 500$時，$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 200 & 25 & 25 & 75 & 75 & 25 & 75 \\ 25 & 250 & 25 & 50 & 25 & 50 & 75 \\ 25 & 25 & 200 & 25 & 25 & 50 & 125 \end{pmatrix}$，

由附錄中的表1、表2可得，在先驗參數$\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$與真實母體比例沒有誤差的情況下，q-B和AVS對貝氏法的相對誤差都會隨著樣本數增加而遞增，大部分情況下q-B遞增的趨勢又明顯的比AVS更大，而Gibbs sampler對貝氏法的相對誤差則改變的較平緩。

而由最大相對誤差折線圖A-1或平均相對誤差折線圖A-2都可以看出，當$\alpha_+ = 3$的先驗條件下且$n = 3$時，q-B對貝氏法的相對誤差會開始大於Gibbs sampler，但AVS在$\alpha_+ = 3$、$\beta_{i+} = 10$的先驗條件下且$n = 4$時，會開始大於Gibbs sampler，而$\alpha_+ = 3$、$\beta_{i+} = 500$的情況下，大約在$n = 7$才開始大於Gibbs sampler。另外當$\alpha_+ = 10$、$\beta_{i+} = 10$的先驗條件下，q-B和AVS分別在$n = 8$和9時對貝氏法的相對誤差大於Gibbs sampler，而$\alpha_+ = 10$、$\beta_{i+} = 500$的情況下，q-B在大約$n = 6$時大於Gibbs sampler，AVS對貝氏法的相對誤差則始終爲三者當中最小的。

其他情況下q-B和AVS的相對誤差雖然也都有遞增的趨勢，但絕大部分的情況都比Gibbs sampler來的小。另外，當α_+越大，q-B和AVS的相對誤差會越接近0，而只有β_{i+}變大時，AVS的相對誤差會最明顯的更接近0。

B. $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$與真實母體比例有30%誤差。

先驗參數$\boldsymbol{\alpha}$的選取爲：

當 $\alpha_+ = 3$ 時，$\boldsymbol{\alpha} = (1.35\ \ 0.99\ \ 0.66)$，

當 $\alpha_+ = 10$ 時，$\boldsymbol{\alpha} = (4.5\ \ 3.3\ \ 2.2)$，

當 $\alpha_+ = 50$ 時，$\boldsymbol{\alpha} = (22.5\ \ 16.5\ \ 11)$，

當 $\alpha_+ = 500$ 時，$\boldsymbol{\alpha} = (225\ \ 165\ \ 110)$，

當 $\alpha_+ = 1000$ 時，$\boldsymbol{\alpha} = (450\ \ 330\ \ 220)$，

先驗參數 $\boldsymbol{\beta}$ 的選取爲：

當 $\beta_{i+} = 10$ 時，$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 2.8 & 0.65 & 0.65 & 1.95 & 1.95 & 0.65 & 1.35 \\ 0.65 & 3.5 & 0.65 & 1.3 & 0.65 & 1.3 & 1.95 \\ 0.65 & 0.65 & 2.8 & 0.65 & 1.3 & 1.3 & 2.65 \end{pmatrix}$，

當 $\beta_{i+} = 500$ 時，$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 140 & 32.5 & 32.5 & 97.5 & 97.5 & 32.5 & 67.5 \\ 32.5 & 175 & 32.5 & 65 & 32.5 & 65 & 97.5 \\ 32.5 & 32.5 & 140 & 32.5 & 65 & 65 & 132.5 \end{pmatrix}$，

由附錄中的表3、表4以及最大相對誤差折線圖B-1或平均相對誤差折線圖B-2可看出，在先驗參數 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 與真實母體比例有30%誤差時，q-B和AVS對貝氏法的相對誤差也都會隨著樣本數的增加遞增，大部分情況下q-B遞增的趨勢明顯比AVS大，Gibbs sampler對貝氏法的相對誤差則改變的較平緩。其他先驗條件下三種方法遞增的趨勢也和情況A的模擬結果差異不大，q-B和AVS的相對誤差雖然也都有遞增的趨勢，但絕大部分的情況都比Gibbs sampler來的小。同樣的，當 α_+ 越大，q-B和AVS的相對誤差會越接近0，而只有 β_{i+} 變大時，AVS的相對誤差會最明顯的更接近0。

C. $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 與真實母體比例有最大誤差75%，最小誤差20%，平均誤差約30%。

先驗參數 $\boldsymbol{\alpha}$ 的選取爲：

當 $\alpha_+ = 3$ 時，$\boldsymbol{\alpha} = (1.14\ \ 0.36\ \ 1.5)$，

當 $\alpha_+ = 10$ 時，$\boldsymbol{\alpha} = (3.8\ \ 1.2\ \ 5)$，

當 $\alpha_+ = 50$ 時，$\boldsymbol{\alpha} = (19\ \ 6\ \ 25)$，

當 $\alpha_+ = 500$ 時，$\boldsymbol{\alpha} = (190\ \ 60\ \ 250)$，

當 $\alpha_+ = 1000$ 時，$\boldsymbol{\alpha} = (380\ \ 120\ \ 500)$，

先驗參數 $\boldsymbol{\beta}$ 的選取為：

當 $\beta_{i+} = 10$ 時，$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 & 1.7 & 3.9 & 0.4 & 0.5 & 1.6 \\ 1.9 & 1.7 & 1.8 & 1.1 & 0.8 & 0.4 & 2.3 \\ 2.3 & 1.6 & 1.4 & 2.5 & 0.6 & 0.8 & 0.8 \end{pmatrix}$，

當 $\beta_{i+} = 500$ 時，$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 50 & 45 & 85 & 190 & 20 & 25 & 80 \\ 95 & 85 & 90 & 55 & 40 & 20 & 115 \\ 115 & 80 & 70 & 125 & 30 & 40 & 40 \end{pmatrix}$，

由附錄中的表5、表6可得，在先驗參數 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 與真實母體比例有最大誤差75%，最小誤差20%，平均誤差約30%時，和前兩種情況相同，q-B和AVS對貝氏法的相對誤差都隨著樣本數的增加而遞增，大部分情況下，quasi-Bayes遞增的趨勢明顯比AVS大，而Gibbs sampler對貝氏法的相對誤差則改變的較平緩。

再從最大相對誤差折線圖C-1和平均相對誤差折線圖C-2可以看出，當 $\alpha_+ = 3$ 的先驗條件下且 $n = 4$ 時，q-B對貝氏法的相對誤差會開始大於Gibbs sampler，而大約 $n = 8$ 時，AVS對貝氏法的相對誤差才開始大於Gibbs sampler。另外當 $\alpha_+ = 10$、$\beta_{i+} = 10$ 的先驗條件下，q-B和AVS的相對誤差大多都比Gibbs sampler來的小，只有當 $n = 9$ 時，quasi-Bayes的最大相對誤差會大於Gibbs sampler。而 $\alpha_+ = 10$、$\beta_{i+} = 500$ 的情況下，q-B大約在 $n = 7$ 時對貝氏法的相對誤差開始大於Gibbs sampler，AVS則不論如何，相對誤差始終為三者當中最小者。其他情況則和前兩種情況相同，q-B和AVS的相對誤差雖然都有遞增的趨勢，但大部分的情況都比Gibbs sampler小。同樣的，當 α_+ 越大，q-B和AVS的相對誤差會越接近0，但是如果只有 β_{i+} 變大時，AVS的相對誤差會最明顯的更接近0。

我們將三種情況模擬結果的數據歸納成如下的表格，其中列出了在該情況的先驗條件下，對貝氏法的相對誤差最小者，以方便讀者瞭解先驗參數的選取和 C 值的

關係，以及參數的選取如何影響模擬的結果。

β_{i+}	α_+	C	Case A 及 Case B	Case C
10	3	11.481	AVS 當 $n < 4$,Gibbs 當 $4 \leq n \leq 9$	AVS 當 $n < 8$,Gibbs 當 $8 \leq n \leq 9$
$(n = 1 \sim 9)$	10	3.4444	AVS 當 $n < 9$,Gibbs 當 $n = 9$	AVS
	50	0.6889	q-B	q-B
	500	0.0689	q-B(AVS)	q-B(AVS)
	1000	0.0344	q-B(AVS)	q-B(AVS)
500	3	574.07	AVS 當 $n < 7$,Gibbs 當 $7 \leq n \leq 9$	AVS 當 $n < 8$,Gibbs 當 $8 \leq n \geq 9$
$(n = 1 \sim 9)$	10	172.22	AVS	AVS
	50	34.444	AVS	AVS
	500	3.4444	AVS(q-B)	AVS(q-B)
	1000	1.7222	q-B(AVS)	q-B(AVS)

其中q-B(AVS)表示q-B和AVS對貝氏法的相對誤差值很接近，小數點以下的位數至少有4位相同，但是q-B的相對誤差會比AVS略小一點，且由組數來看，q-B的估計會比AVS較佳，所以我們將兩種方法都列出來，表示此時這兩種方法都可以用來代替貝氏法。同理AVS(q-B)也是一樣的意思。而由於情況A和情況B的結論差異不大，所以我們把二者合併一起看。

6.2 中樣本數 $(10 \leq n \leq 15)$ 的模擬結果

從上一節三種情況模擬結果的最大相對誤差圖和平均相對誤差圖我們發現，尤其在 $\alpha_+ = 3$、10、50的先驗條件下且樣本數 $1 \leq n \leq 9$ 時，q-B和AVS對於貝氏法的相對誤差會隨著樣本數增加而有明顯遞增的趨勢，而Gibbs sampler對於貝氏法的相對誤差雖然改變的比較平緩，但有稍微遞減的趨勢，推測在 $\alpha_+ = 3$、10、50的先驗條件下且樣本數 n 夠大時，Gibbs sampler對於貝氏法的相對誤差將會是三個方法中最小的。

所以在本節內容中，我們將利用5.1節的先驗參數、模擬結果，探討是否可以利用樣本數$n = 1, \cdots, 9$的相對誤差折線圖走勢，再加上部份中樣本數的模擬結果去推測q-B、AVS與Gibbs sampler在中樣本時估計的優劣。

由於貝氏法當樣本數增加時，後驗均數的項數會是冪次方成長，因此我們在貝氏法的運算上會相當費時。例如當樣本數$n = 13$時，貝氏法在運算上所需花費的時間約30.16031秒，$n = 15$時，所需時間約299.5075秒。又本文中我們必須以q-B、AVS和Gibbs sampler三種方法分別去和貝氏法比較，所以本節在$\beta_{i+} = 10$的先驗條件下，模擬樣本數$n = 13$、15的情況；而$\beta_{i+} = 500$的先驗條件下，模擬樣本數$n = 12$、14的情況，僅以此部分中樣本數的模擬結果去判斷三種方法在中樣本數時估計的優劣。而爲了節省貝氏法所花費的時間，我們在樣本數$n = 12$、13，重複採樣100次進行模擬比較，而樣本數$n = 14$、15，只重複採樣30次進行模擬比較；其他的樣本數或樣本數大於15以上的情形在此就不再討論。另外我們認爲當$\alpha_+ = 500$和1000時，q-B和AVS與Gibbs sampler的折線圖交會的情況應該會發生在樣本數至少超過500的時候，所以本節也不再探討這樣的先驗條件下的情況。

以下是針對中樣本數分別對三種情況模擬結果的最大相對誤差折線圖(圖A-1、圖B-1、圖C-1)以平均相對誤差折線圖(圖A-2、圖B-2、圖C-2)所做的討論：

A. $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$與真實母體比例沒有誤差。

由附錄的最大相對誤差折線圖A-1和平均相對誤差折線圖A-2可看出，當$\alpha_+ = 3$、$\beta_{i+} = 500$的先驗條件下，q-B對於貝氏法的最大相對誤差和平均相對誤差都有遞減的趨勢。而Gibbs sampler在$\alpha_+ = 10$和50的相對誤差折線圖亦不如樣本數$1 \leq n \leq 9$的趨勢平穩的遞減，反而隨著樣本數增加而忽大忽小，所以Gibbs sampler在$\alpha_+ = 10$、$\beta_{i+} = 500$和$\alpha_+ = 50$的先驗條件下且樣本數n大於9的最大相對誤差折線圖和平均相對誤差折線圖都沒有再持續遞減與q-B或AVS的折線圖交會。

B. $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$與真實母體比例有30%誤差。

同樣由附錄的最大相對誤差折線圖B-1和平均相對誤差折線圖B-2可看出，在$\alpha_+ = 3$的先驗條件下，q-B對於貝氏法的最大相對誤差和平均相對誤差都有遞減的趨勢。而Gibbs sampler和情況A一樣，在$\alpha_+ = 10$和50的相對誤差折線圖也不如樣本數$1 \le n \le 9$的趨勢平穩的遞減，反而隨著樣本數增加而忽大忽小，所以樣本數n大於9的情形下，Gibbs sampler的最大相對誤差折線圖和平均相對誤差折線圖都沒有再持續遞減與q-B或AVS的折線圖交會。

C. $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$與真實母體比例有最大誤差75%，最小誤差20%，平均誤差約30%。
由附錄的最大相對誤差折線圖C-1和平均相對誤差折線圖C-2可看出，q-B和AVS在此情況下的最大相對誤差和平均相對誤差都比較平穩的遞增；而在$\alpha_+ = 50$的先驗條件下，Gibbs sampler對於貝氏法的相對誤差折線圖會隨著樣本數增加而忽大忽小，所以在樣本數n大於9的最大相對誤差折線圖和平均相對誤差折線圖都沒有再持續遞減與q-B或AVS的折線圖交會。

最後我們將三種情況在部分中樣本的模擬結果數據作一歸納整理成如下的表格，其中也列出了在該情況的先驗條件下，對貝氏法的相對誤差最小者：

β_{i+}	α_+	C	Case A 及 Case B	Case C
10	3	11.481	Gibbs	Gibbs
(n=13、15)	10	3.4444	Gibbs	AVS
	50	0.6889	q-B	q-B
500	3	574.07	Gibbs	Gibbs
(n=12、14)	10	172.22	AVS	AVS
	50	34.444	AVS	AVS

由本節的模擬結果發現，當樣本數增加後，q-B和AVS的相對誤差折線圖會開始有跳動的情形，並不如樣本數小的時候穩定，所以若想要推測q-B、AVS和Gibbs sampler在樣本數更大時估計的優劣就顯的比較困難。在此我們僅依照中小樣本的模擬數據，來做爲評判此時選擇哪一個方法來代替貝氏法估計誤差會比較小。