第三章 相關模型探討

3.1 MARKOWITZ 的模型

Markowitz (1952)在其現代投資理論中，強調藉由不同類型的資產配置來建構分散型的投資組合。他所建構的數學規劃模型是在投資組合報酬固定的條件下，求取投資組合的風險最小值。

首先，先介紹 Markowitz 在其數學模型中所定義的投資組合報酬函數及風險函數。其投資組合報酬函數為個別投資標的 S_j 之期望報酬率 R_j 的線性組合；風險函數則定義為投資組合報酬率的標準差。

投資組合的報酬函數為：$R(x_1,\cdots,x_n)=E(\sum_{j=1}^{n}R_j x_j)=\sum_{j=1}^{n}E(R_j)x_j$

投資組合的風險函數為：

$$L_2(x_1,\cdots,x_n)=\sqrt{E\{\sum_{j=1}^{n}R_j x_j - E(\sum_{j=1}^{n}R_j x_j)\}^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j}$$

模型一：Markowitz 的二次規劃投資組合模型

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho M \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M \tag{3.2}$$

$$0 \leq x_j \leq U_j \qquad j=1,2,\cdots,n \tag{3.3}$$

參數：

n　　投資標的之總數

r_j　　投資標的 S_j 之期望報酬率，即 $r_j = E(R_j)$

σ_{ij}　　投資標的 S_i 與 S_j 之報酬率的共變異數，即 $\sigma_{ij} = E[(R_i - r_i)(R_j - r_j)]$

ρ　　投資者所要求的最小投資報酬率

M　　總投資金額

U_j　　投資標的 S_j 之投資金額上限

變數：

x_j　　投資標的 S_j 之投資金額

Markowitz 的二次規劃模型中，其目標式為最小化投資組合的風險平方值。限制式(3.1)表示投資組合的總報酬需大於投資者所要求的最小投資報酬。限制式(3.2)表示總投資金額為 M 。限制式(3.3)表示投資標的 S_j 的投資金額限制。

3.2 KONNO 與 YAMAZAKI 的模型

然而 Markowitz 的二次規劃模型在求解過程較為困難，若模型中加入太多限制式，大尺度問題的求解難度將大為增加。所以，Konno 與 Yamazaki 在 1991 年提出新的風險函數定義，其目的是將 Markowitz 的二次規劃模型轉為線性規劃模型。Konno 與 Yamazaki 所定義的風險函數 L_1 ，是定義成投資組合報酬率的平均絕對離差，以此取代 Markowitz 所定義的標準差風險函數 L_2 。

Konno 與 Yamazaki 投資組合模型的風險函數 L_1 ，定義如下：

$$L_1(x_1,\cdots,x_n)=E\{|\sum_{j=1}^{n}R_j x_j - E(\sum_{j=1}^{n}R_j x_j)|\}$$

然而，若以 L_1 設為規劃模型的目標式，此目標式依舊是非線性函數。為簡化 L_1 ，因此藉由等價的線性函數轉換，可將原數學規劃模型轉成等價的線性模型。下面即為其推導的過程：

根據歷史資料，觀察取得 R_j 於第 t 期的報酬率 r_{jt} ，令 $\bar{r}_j$ 為 T 期內的平均值，再假設參數 a_{jt} 為第 t 期報酬率 r_{jt} 與平均報酬率 $\bar{r}_j$ 的差。則風險函數 L_1 可改寫成：

$$\begin{aligned}L_1(x_1,\cdots,x_n)&=E\{|\sum_{j=1}^{n}R_j x_j - E(\sum_{j=1}^{n}R_j x_j)|\}\\&=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}|\sum_{j=1}^{n}(r_{jt}-\bar{r}_j)x_j|=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}|\sum_{j=1}^{n}a_{jt}x_j|\end{aligned}$$

但是，這樣的風險函數依舊不是線性函數，因此繼續引進一組變數 $y_t \geq 0$ ，使得

$$y_t \geq \left|\sum_{j=1}^{n}a_{jt}x_j\right|$$

接著分解絕對值函數，將之改寫成以下兩條線性限制式：

$$y_t \geq \sum_{j=1}^{n}a_{jt}x_j \text{ 與 } y_t \geq -\sum_{j=1}^{n}a_{jt}x_j$$

最後，風險函數 L_1 即可以改寫為線性運算式 $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{n}y_t$ 。

模型二：Konno 與 Yamazaki 的線性投資組合模型

$$\min \quad \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho M \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M \tag{3.2}$$

$$0 \leq x_j \leq U_j \qquad j = 1, 2, \cdots, n \tag{3.3}$$

$$y_t \geq \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \qquad t = 1, 2, \cdots, T \tag{3.4}$$

$$y_t \geq -\sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \qquad t = 1, 2, \cdots, T \tag{3.5}$$

$$y_t \geq 0 \qquad t = 1, 2, \cdots, T \tag{3.6}$$

參數：

T 總投資期數

n 投資標的之總數

r_j 投資標的 S_j 之期望報酬率，即 $r_j = E(R_j)$

ρ 投資者所要求的最小投資報酬率

M 總投資金額

U_j 投資標的 S_j 之投資金額上限

a_{jt} R_j 在第 t 期報酬率 r_{jt} 與平均報酬率 $\bar{r}_j$ 的差

變數：

x_j 投資標的 S_j 之投資金額

y_t　　正偏差變數

(Konno 與 Yamazaki 論文)最後討論 Markowitz 與 Konno-Yamazaki 此兩組數學規劃模型中的風險定義 L_2 與 L_1，證明兩者之間確實存有等價關係：當 $(R_1,\cdots,R_n)$ 服從多元常態分配時，最小化風險函數 $L_2(x_1,\cdots,x_n)$ 相當於最小化風險函數 $L_1(x_1,\cdots,x_n)$，因為兩者之間存有下面一線性關係。

$$L_1(x_1,\cdots,x_n)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}L_2(x_1,\cdots,x_n)$$

3.3 SPERANZA 的模型

Konno 與 Yamazaki 投資組合模型中的風險函數 $L_1(x_1,\cdots,x_n)$ 可以分成兩部份，第一部份為小於平均報酬率，稱之為損失方面的風險；第二部份為大於平均報酬率，稱之為獲利方面的風險。其數學式如下：

$$\begin{aligned}L_1(x_1,\cdots,x_n)&=E\{|\sum_{j=1}^{n}R_jx_j-E(\sum_{j=1}^{n}R_jx_j)|\}\\&=E\{-\min(0,\sum_{j=1}^{n}R_jx_j-E(\sum_{j=1}^{n}R_jx_j))+\max(0,\sum_{j=1}^{n}R_jx_j-E(\sum_{j=1}^{n}R_jx_j))\}\end{aligned}$$

在 Konno 與 Yamazaki 的模型中，並沒有表現出投資人對此兩項風險之感受程度的差異。因此，為了要更符合大眾投資心態，Speranza (1993)分別給予此兩項風險不同的權重 α 與 β，此二數為任意實數，進而定義出新的風險測量函數 $N(x)$。

$$N(x)=E\{-\alpha\min(0,\sum_{j=1}^{n}R_jx_j-E(\sum_{j=1}^{n}R_jx_j))+\beta\max(0,\sum_{j=1}^{n}R_jx_j-E(\sum_{j=1}^{n}R_jx_j))\}$$

同時，Speranza 亦發現歷史資料的新舊關係將對投資組合造成不同的影響，因此於原規劃模型加入時間參數。Speranza 定義出兩種時間參數 w_t^1 與 w_t^2。w_t^1 為經觀測歷史資料再統計分析後所產生的第 t 期時間參數，屬於必然發生的時間因子；w_t^2 則為根據投資人對未來投資遠景所產生的個人投資信念，含有預測的成分。接著以 w_t^2 來估計投資標的 S_j 在 T 期內的加權平均報酬率 r_j^w。r_j^w 如下所示：

$$r_j^w = \frac{\sum_t w_t^2 r_{jt}}{\sum_t w_t^2}$$

然後為求數學式的簡潔，定義函數 $g(t) = \sum_{j \in J} (r_{jt} - r_j^w) x_j$。以 $g(t)$ 來取代風險函數 $N(x)$ 中的期望值運算式；$g(t) \le 0$ 表示為損失方面的風險，$g(t) \ge 0$ 則表示為獲利方面的風險。如此，即可將原風險函數 $N(x)$ 改寫成含有時間權重(weight)的風險函數 $N'(x)$。

$$N'(x) = -\alpha \sum_{t:g(t) \le 0} w_t^1 g(t) + \beta \sum_{t:g(t) \ge 0} w_t^1 g(t)$$

在此，我們以較簡單的概念來介紹 Speranza 考慮時間因素的線性規劃模型。首先，令 $\alpha = 1$ 及 $\beta = 0$，也就是只考量損失部分風險的投資組合模型。另外將 w_t^1 與 w_t^2 設成相同值，意即 $w_t^1 = w_t^2 = w_t$；因此投資標的 S_j 在 T 期內的加權平均報酬率 r_j^w 可簡化為下式：

$$r_j^w = \frac{\sum_t w_t r_{jt}}{\sum_t w_t}$$

以下模型即為精簡的 Speranza 模型。

模型三：Speranza 考慮時間因素的線性投資組合模型

$$\min \quad \sum_{t=1}^{T} w_t y_t$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} r_j^w x_j \geq \rho M \qquad (3.7)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M \qquad (3.2)$$

$$0 \leq x_j \leq U_j \qquad j = 1, 2, \cdots, n \qquad (3.3)$$

$$y_t + \sum_{j=1}^{n} (r_{jt} - r_j^w) x_j \geq 0 \qquad t = 1, 2, \cdots, T \qquad (3.8)$$

$$y_t \geq 0 \qquad t = 1, 2, \cdots, T \qquad (3.6)$$

參數：

T　　總投資期數

w_t　　介於 0 到 1 之間的時間參數

n　　投資標的之總數

ρ　　投資者所要求的最小投資報酬率

r_{jt}　　R_j 於第 t 期的報酬率

r_j^w　　投資標的 S_j 在 T 期內的加權平均報酬率。$r_j^w = \dfrac{\sum_t w_t r_{jt}}{\sum_t w_t}$

M　　總投資金額

U_j　　投資標的 S_j 之投資金額上限

變數：

x_j　　投資標的 S_j 之投資金額

y_t　　正偏差變數

Speranza 的數學規劃模型，可藉由調整風險權重 α 及 β，來滿足不同投資族群對風險之承受程度。同時，再加入時間參數 w_t 後，亦可清晰地反應出歷史資料的新舊對於投資組合選取的影響；一般而言，資料越新穎者對於投資組合之建立影響幅度應較大，反之應較小。

3.4 YOUNG 的模型

Young (1998)提出大中取小的投資組合選取法則(mini-max portfolio selection rule)。此方法有別於以報酬變異數為風險測量函數的投資組合建構方式；大中取小法則所建構的最佳投資組合是來自於給定報酬水準的條件下，最小化觀察期間內該投資組合的最大損失。

若將損失視為報酬為負值，即可將大中取小的觀念應用於投資組合的報酬方面，亦即最大化觀測期間中投資組合的最小報酬，此方法就是報酬小中取大的投資組合選取法。下面即是 Young 的小中取大數學模型：

模型四：Young 小中取大的線性規劃模型

$$\max \quad m$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho M \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j \ge m \qquad t = 1, 2, \cdots, T \tag{3.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le M \tag{3.8}$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, n \tag{3.9}$$

參數：

n　　投資標的之總數

r_j　　投資標的 S_j 之期望報酬率，即 $r_j = E(R_j)$

ρ　　投資者所要求的最小投資報酬率

M　　總投資金額

r_{jt}　　R_j 在時間 t 的報酬率

變數：

m　　投資組合在歷史資料期間 t 裡最小的報酬，即 $m = \min_t \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j$

x_j　　投資標的 S_j 之投資金額

此數學模型的目標函數為求取該投資組合於觀測期間中最小報酬 m 的最大值。限制式(3.1)表示投資組合的報酬須大於投資者所要求的最小投資報酬。限制式(3.7)表示在任何時間，該階段投資組合的報酬均須大於最小報酬 m。限制式(3.8)表示總投資金額為 M。限制式(3.9)表示投資標的 S_j 的投資金額限制。

在此，將風險之大中取小的線性規劃模型與 Markowitz 的二次規劃模型作一簡單比較。在投資標的報酬率是服從常態分配時，Young 利用大中取小模型所規劃出的投資組合效用非常近似於 Markowitz 所建構的投資組合。然而，當投資標

的報酬率為非常態分配的情況下，若採用大中取小的方法，則可避免忽略高報酬的情況，相較 Markowitz 的模型，將更符合投資者的投資心態。

3.5 XIA 等之投資組合模型

Xia 等(2000)提出在投資標的之期望報酬排序的基準下，作一投資組合選取。首先，分別針對投資標的於觀測期間內的實際平均報酬、投資標的在歷史紀錄中的報酬傾向，以及對投資標的未來報酬之預測值這三部分給予不同的權重。再以加權平均法，計算各投資標的 S_i 之期望報酬 R_i。其算式如下：

$$R_i = h_1 R_{ai} + h_2 R_{ti} + h_3 R_{fi}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$
$$h_1 + h_2 + h_3 = 1$$

R_{ai}　投資標的 S_i 在觀測期間中的實質平均報酬

R_{ti}　投資標的 S_i 的報酬變化傾向

R_{fi}　對於投資標的 S_i 的未來期望報酬之估計值

h_1　R_{ai} 的權重

h_2　R_{ti} 的權重

h_3　R_{fi} 的權重

下面即是期望報酬排序的數學模型。

模型五：Xia 等所提出之期望報酬排序的投資組合模型

$$\max \quad (1-w)\sum_{i=1}^{n} R_i x_i - w\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij} x_i x_j$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{3.10}$$

$$R_i \ge R_{i+1} \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{3.11}$$

$$a_i \le R_i \le b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.12}$$

$$x_i \ge 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.13}$$

參數：

w　投資者對風險的趨避因子，$0 \le w \le 1$

n　投資標的之總數

R_i　投資標的 S_i 的期望報酬

σ_{ij}　投資標的 S_i 與 S_j 之期望報酬的共變異數

$\sigma_{ij} = \frac{1}{mm}\sum_{k=1}^{mm}(R_{ik} - R_i)(R_{jk} - R_j)$ ，R_{ik} 是 S_i 第 k 期的實質報酬

a_i　標的物 S_i 可改變的期望報酬下限

b_i　標的物 S_i 可改變的期望報酬上限

變數：

x_i　投資標的 S_i 的投資比例

此模型的目標式是以目標規劃將投資組合之期望報酬與風險整合為單一函數。投資人可藉由調整風險趨避因子 w，於該數學模型中表現其對風險的容忍度。當 $w = 0$，目標函數為最大化投資組合的期望報酬，完全忽視投資風險，顯現出該投資人為極端風險偏好者。反之當 $w = 1$，則表示投資人為極端風險趨避者。限制式(3.10)表示投資組合中各標的物之投資比例和為一。限制式(3.11)表示將各投資標的之期望報酬 R_i 依遞減作排序。限制式(3.12)表示 R_i 可改變的範圍。

限制式(3.13)表示任一投資標的之投資比例大於零。完成模型五的數學規劃模型後，再以基因演算法(genetic algorithm)去求取模型五的最佳解。

本論文從模型五得自期望報酬排序之啟發，希望建構一組基金價值不斷成長的投資組合模型。因此於下一章，將分別以目標規劃與大中取小原則建立成長基金的投資組合。同時考慮歷史資料之時間關係對投資組合的影響，將原目標規劃模型改寫為考慮時間因素的成長基金模型。最後經由實證資料，比較此三組數學模型所建構的投資組合效能。