第四章 成長基金的數學模型

本章為成長基金的數學模型建構過程。在模型五投資標的之期望報酬排序的啟發下，希望以基金觀點建立投資組合，使該投資組合的價值呈現遞增狀態，同時每期該投資組合的效能亦會比標的指數的表現來的好。基於上述兩個觀念，建構出成長基金的初始數學模型，為模型六。

4.1 成長基金的目標規劃模型

模型六

$$\min \quad z=\sum_{t=1}^{T} d_{1t}+\sum_{t=1}^{T}\frac{MI_t}{I_1}d_{2t}$$

$$\text{s.t.} \quad V_t=\sum_{j=1}^{n} p_{jt}x_j \qquad t=1,2,\ldots,T \tag{4.1}$$

$$V_1=M \tag{4.2}$$

$$V_t \ge V_{t-1}-d_{1t} \qquad t=2,3,\ldots,T \tag{4.3}$$

$$\frac{V_t-V_{t-1}}{V_{t-1}} \ge \frac{I_t-I_{t-1}}{I_{t-1}}-d_{2t} \qquad t=2,3,\ldots,T \tag{4.4}$$

參數：

T 歷史資料的期數

n 投資標的之總數

p_{jt} 投資標的 S_j 在第 t 期的價格

V_t 投資組合在第 t 期的價值

M 總投資金額

I_t　　第 t 期末的標的指數

變數：

x_j　　投資標的 S_j 之投資股數

d_{1t}　　第 t 期的正偏差變數一

d_{2t}　　第 t 期的正偏差變數二

此模型的目標函數是採用目標規劃方式，為求取在觀測時間內，兩正偏差變數 d_{1t} 與 d_{2t} 的總和最小值。然而 d_{2t} 為一比率，此值過小易被忽略，故於目標函數中乘以權重 MI_t/I_1 ，使 d_{2t} 還原成價值差。限制式(4.1)表示投資組合在第 t 期的價值。限制式(4.2)表示投資組合的初始值，也就是總投資金額 M。限制式(4.3)表示所選取的投資組合於當期的價值高於前一期，也就是呈現遞增狀態；然而於現實狀況中，此限制過於嚴苛，恐導致模型無解，故放鬆限制，加入正偏差變數 d_{1t} ，使遞增條件容許些微的不滿足。限制式(4.4)表示該投資組合於當期的表現較標的指數佳。

由模型六，可發現當標的指數之表現為負值時，在限制式(4.3)的條件下，該投資組合的表現必為正值；若標的指數的表現為正值時，該投資組合的表現更被要求超越標的指數。故模型六可稱之為投資組合價值呈遞增狀態，且表現超越標的指數之成長基金模型。

不過，模型六的目標式及限制式(4.4)為分式型，為了簡化求解的過程，我們將略微修改模型六。首先，由限制式(4.4)著手，引進一參數 K_t，代表標的指數 I_t 在第 t 期的表現，即 $K_t = \dfrac{I_t - I_{t-1}}{I_{t-1}}$ ，那麼，限制式(4.4)即可改為限制式(4.5)。

$$V_t - V_{t-1} \ge K_t V_{t-1} - d_{2t} \qquad t = 2, 3, \ldots, T \tag{4.5}$$

如此一來，目標式亦同時以 d_{1t} 及 d_{2t} 簡單表示。接著基於作投資組合的實際考量，引入一個二元變數 y_j 來控制投資標的之選取種類數目；以及給予各投資標的之投資金額上限 U_j。加入上述條件即可將模型六修改成模型 A。

模型 A

$$\min \quad z = \sum_{t=1}^{T} d_{1t} + \sum_{t=1}^{T} d_{2t}$$

$$\text{s.t.} \quad V_t = \sum_{j=1}^{n} p_{jt} x_j \qquad t = 1, 2, \ldots, T \tag{4.1}$$

$$V_1 = M \tag{4.2}$$

$$V_t \ge V_{t-1} - d_{1t} \qquad t = 2, 3, \ldots, T \tag{4.3}$$

$$V_t - V_{t-1} \ge K_t V_{t-1} - d_{2t} \qquad t = 2, 3, \ldots, T \tag{4.5}$$

$$0 \le p_{j1} x_j \le U_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{4.6}$$

$$p_{j1} x_j \le M y_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{4.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \le N \tag{4.8}$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{4.9}$$

參數：

T	歷史資料的期數
n	投資標的之總數
p_{jt}	投資標的 S_j 在第 t 期的價格
V_t	投資組合在第 t 期的價值
M	總投資金額

K_t 標的指數 I_t 在第 t 期的表現，亦即 $K_t = \dfrac{I_t - I_{t-1}}{I_{t-1}}$

U_j 投資標的 S_j 之投資金額上限

N 投資種類的上限

變數：

x_j 投資標的 S_j 之投資股數

d_{1t} 第 t 期的正偏差變數一

d_{2t} 第 t 期的正偏差變數二

y_j 0/1 變數

模型 A 的目標函數是以目標規劃方式，於觀測時間內，求取兩正偏差變數 d_{1t} 與 d_{2t} 的總和最小值。限制式(4.1)表示投資組合在第 t 期的價值。限制式(4.2)表示投資組合的初始值，也就是總投資金額。限制式(4.3)表示所選取的投資組合於當期的價值高於前一期。限制式(4.5)表示該投資組合於當期的表現較標的指數佳。限制式(4.6)表示各標的物之投資金額上限為 U_j。限制式(4.7)表示當 $y_j = 0$ 時，$p_{j1}x_j = 0$，相當於 $x_j = 0$，亦即第 j 種投資標的不被選取；而當 $y_j = 1$ 時，$p_{j1}x_j \le M$，即第 j 種投資標的將被選取，且該項目投資金額小於總投資金額。限制式(4.8)表示投資組合所選取的投資標的總類數不超過 N 種。限制式(4.9)表示 y_j 為屬於 0/1 的二元變數。

由於各標的物之投資金額皆有上限，因此可將限制式(4.6)、(4.7)合併為限制式(4.10)。

$$0 \le p_{j1}x_j \le U_j y_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n \qquad (4.10)$$

4.2 大中取小的成長基金之數學模型

完成模型 A 的建構之後，本文想加入風險的概念；所以將 Young (1998)對於風險測度所提出的大中取小原則，應用於本篇論文。在歷史期間中，分別觀測投資組合於不同時間點的兩組正偏差變數 d_{1t} 與 d_{2t}，再各自取最大的正偏差變數作為目標函數，最後以目標規劃方式最小化此目標函數，即是大中取小的成長基金模型，其規劃模型如下。

模型 B

$$\min \quad z = z_1 + z_2$$

$$\text{s.t.} \quad V_t = \sum_{j=1}^{n} p_{jt} x_j \qquad t = 1, 2, \ldots, T \tag{4.1}$$

$$V_1 = M \tag{4.2}$$

$$V_t \geq V_{t-1} - d_{1t} \qquad t = 2, 3, \ldots, T \tag{4.3}$$

$$V_t - V_{t-1} \geq K_t V_{t-1} - d_{2t} \qquad t = 2, 3, \ldots, T \tag{4.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \leq N \tag{4.8}$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{4.9}$$

$$0 \leq p_{j1} x_j \leq U_j y_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{4.10}$$

$$z_1 \geq d_{1t} \qquad t = 1, 2, \ldots, T \tag{4.11}$$

$$z_2 \geq d_{2t} \qquad t = 1, 2, \ldots, T \tag{4.12}$$

參數：

T 歷史資料的期數

n　　投資標的之總數

p_{jt}　　投資標的 S_j 在第 t 期的價格

V_t　　投資組合在第 t 期的價值

M　　總投資金額

K_t　　標的指數 I_t 在第 t 期的表現，亦即 $K_t = \dfrac{I_t - I_{t-1}}{I_{t-1}}$

U_j　　投資標的 S_j 之投資金額上限

N　　投資種類的上限

變數：

x_j　　投資標的 S_j 之投資股數

d_{1t}　　第 t 期的正偏差變數一

d_{2t}　　第 t 期的正偏差變數二

y_j　　0/1 變數

z_1　　所有 d_{1t} 中的最大值，即 $z_1 = \max_t d_{1t}$

z_2　　所有 d_{2t} 中的最大值，即 $z_2 = \max_t d_{2t}$

限制式(4.11)表示在歷史期間中，觀測投資組合於不同時間點之限制式(4.3)的正偏差變數 d_{1t}，再取最大的正偏差變數 z_1 作為目標函數。同理，限制式(4.12)表示觀察限制式(4.5)在不同時間點的正偏差變數 d_{2t}，再取最大的正偏差變數 z_2 作為目標函數。而此模型的目標函數即為求取上述兩項正偏差變數 z_1 與 z_2 的最小值。

4.3 考慮時間因素的成長基金模型

投資組合的選取，其歷史資料來源為過去投資標的於交易市場中的價格，以此訊息去求得目標函數的最佳解，進而獲得最佳投資組合。實際上，投資標的之價格變動與時間是高度相關的；當取得的歷史資料越新，其影響投資標的價格變動之程度應該越大；反之，若歷史資料越久遠，其影響程度應較低，故將此一時間因素的影響加入模型 A 討論。於模型 A 的目標式，給定一介於 0 到 1 的時間參數θ，使得歷史資料久遠者，其比重較低；資料新穎者，其比重較高。如此，即將模型 A 改寫為模型 C，而模型 C 的限制式皆同模型 A。

模型 C

$$\min \quad z=\sum_{t=1}^{T}\theta^{T-t}(d_{1t}+d_{2t})$$

$$\text{s.t.} \quad V_t=\sum_{j=1}^{n}p_{jt}x_j \qquad t=1,2,\dots,T \tag{4.1}$$

$$V_1=M \tag{4.2}$$

$$V_t \ge V_{t-1}-d_{1t} \qquad t=2,3,\dots,T \tag{4.3}$$

$$V_t-V_{t-1} \ge K_tV_{t-1}-d_{2t} \qquad t=2,3,\dots,T \tag{4.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n}y_j \le N \tag{4.8}$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad j=1,2,\dots,n \tag{4.9}$$

$$0 \le p_{j1}x_j \le U_jy_j \qquad j=1,2,\dots,n \tag{4.10}$$

參數：

θ 時間參數，$0\le\theta\le1$

T　歷史資料的期數

n　投資標的之總數

p_{jt}　投資標的 S_j 在第 t 期的價格

V_t　投資組合在第 t 期的價值

M　總投資金額

K_t　標的指數 I_t 在第 t 期的表現，亦即 $K_t = \dfrac{I_t - I_{t-1}}{I_{t-1}}$

U_j　投資標的 S_j 之投資金額上限

N　投資種類的上限

變數：

x_j　投資標的 S_j 之投資股數

d_{1t}　第 t 期的正偏差變數一

d_{2t}　第 t 期的正偏差變數二

y_j　0/1 變數

模型 C 的目標式為考慮時間參數 θ 下，求取兩正偏差變數 d_{1t} 與 d_{2t} 的總和最小值。當 $\theta = 1$ 時，即不考慮時間對投資組合的影響，也就是在 4.1 節所討論的模型 A。