3 機率模式下之計算公式

假設一份試卷是由$t(\geq 1)$則題組所構成，每題組中分別有$r_i(\geq 1)$道子題，各題組包含子題數可相同，亦可不同，且每子題均有$s(\geq 2)$個選項。

3.1 符號

令

$$
\begin{aligned}
n_{ijk} &\equiv \text{在題組}\,i\,\text{之第}\,j\,\text{道子題中，選擇第}\,k\,\text{選項的人數} \\
p_{ijk} &\equiv \text{在題組}\,i\,\text{之第}\,j\,\text{道子題中，選擇第}\,k\,\text{選項的機率} \\
& \quad j = 1, \ldots, r_i \ \ ; \ \ i = 1, \ldots, t \ \ ; \ \ k = 1, \ldots, s. \\
n_{i,j+1,k^*|ijk} &\equiv \text{在題組}\,i\,\text{中，第}\,j\,\text{子題選擇第}\,k\,\text{選項，而第}\,j+1\,\text{子題選擇第}\,k^*\,\text{選項的人數} \\
p_{i,j+1,k^*|ijk} &\equiv \text{在題組}\,i\,\text{中，第}\,j\,\text{子題選擇第}\,k\,\text{選項，而第}\,j+1\,\text{子題選擇第}\,k^*\,\text{選項的機率} \\
\mathbf{n}_{i,j+1|ijk} &\equiv (n_{i,j+1,1|ijk}, \ldots, n_{i,j+1,k^*|ijk}, \ldots, n_{i,j+1,s|ijk}) \\
\mathbf{P}_{i,j+1|ijk} &\equiv (p_{i,j+1,1|ijk}, \ldots, p_{i,j+1,k^*|ijk}, \ldots, p_{i,j+1,s|ijk}) \\
& \quad j = 1, \ldots, r_i - 1 \ \ ; \ \ i = 1, \ldots, t \ \ ; \ \ k, k^* = 1, \ldots, s.
\end{aligned}
$$

3.2 機率模式之假設

假設有n位受測學生，對每道試題皆有作答，而且對題組型試題均依序回答，同時

(1) 題組間作答情況是獨立。

(2) 每一題組中，第一子題各選項人數服從多項分配，即

$$(n_{i11}, \cdots, n_{i1k}, \cdots, n_{i1s}) \sim M(n, p_{i11}, \cdots, p_{i1k}, \cdots, p_{i1s}) \tag{3.1}$$

$$i = 1, \ldots, t.$$

(3) 每一題組中，第 $j+1$ 子題作答情況至多只與第 j 子題作答情況有關。

(4) 在題組 i 之第 j 子題中，已知第 k 選項人數為 n_{ijk} 時，該 n_{ijk} 位學生於第下一子題各選項的選擇人數服從多項分配，即

$$\mathbf{n}_{i,j+1|ijk}|n_{ijk} \sim M(n_{ijk}, \mathbf{P}_{i,j+1|ijk}) \tag{3.2}$$

$$j = 1, \ldots, r_i - 1 \;\; ; \;\; i = 1, \ldots, t \;\; ; \;\; k = 1, \ldots, s.$$

對於非題組型選擇題，本身只有一道題目，可視為題組中只有一道子題來處理。

由式子 (3.1) 可得 p_{i1k} 的最大概似估計，如下：

$$\hat{p}_{i1k} = \frac{n_{i1k}}{n}$$

$$i = 1, \ldots, t \;\; ; \;\; k = 1, \ldots, s.$$

由式子 (3.2) 可得 $p_{i,j+1,k^*|ijk}$ 的最大概似估計，如下：

$$\hat{p}_{i,j+1,k^*|ijk} = \frac{n_{i,j+1,k^*|ijk}}{n_{ijk}}$$

$$j = 1, \ldots, r_i - 1 \;\; ; \;\; i = 1, \ldots, t \;\; ; \;\; k^*, k = 1, \ldots, s.$$

3.3 答對題數之機率分配

令

$$C_{ij} = \begin{cases} 1\text{，} & \text{當題組 } i \text{ 中第 } j \text{ 子題答對} \\ 0\text{，} & \text{當題組 } i \text{ 中第 } j \text{ 子題答錯} \end{cases}$$

$$j = 1, \ldots, r_i \;\; ; \;\; i = 1, \ldots, t.$$

且

$$\begin{aligned} C_i &\equiv \text{題組 } i \text{ 中答對題數} \quad i = 1, \ldots, t. \\ X &\equiv \text{整份試卷答對總題數} \end{aligned}$$

則

$$C_i = \sum_{j=1}^{r_i} C_{ij} \quad , \quad X = \sum_{i=1}^{t} C_i$$

爲了計算X的機率分配，我們引入機率生成函數，其定義如下：

定義**3.1** 假設Y為一離散型隨機變數，其機率質量函數為$f(y)$，則稱$G_Y(t)$=$E(t^Y)$為Y的機率生成函數，即$G_Y(t)$=$\sum f(y)t^y$。

由定義3.1可得C_i的機率生成函數，如下：

$$\begin{aligned}
& G_{C_i}(t) \\
= \; & E(t^{C_i}) \\
= \; & E(t^{\sum_{j=1}^{r_i} C_{ij}}) \\
= \; & E(t^{C_{i1}+\cdots+C_{i,r_i}}) \\
= \; & \sum_{m=0}^{r_i} \sum_{d_{i1}+\ldots+d_{i,r_i}=m} P(C_{i1}=d_{i1},\ldots,C_{i,r_i}=d_{i,r_i})t^m \\
= \; & \sum_{m=0}^{r_i} \sum_{d_{i1}+\ldots+d_{i,r_i}=m} P(C_{i,r_i}=d_{i,r_i}|C_{i,r_i-1}=d_{i,r_i-1}) \times \cdots \\
& \times P(C_{i2}=d_{i2}|C_{i1}=d_{i1})P(C_{i1}=d_{i1})t^m \\
= \; & \sum_{m=0}^{r_i} \sum_{d_{i1}+\ldots+d_{i,r_i}=m} P(C_{i1}=d_{i1})[\prod_{j=1}^{r_i-1} P(C_{i,j+1}=d_{i,j+1}|C_{ij}=d_{ij})]t^m \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

其中 d_{ij}的值爲0或1。
題組所含子題數即爲該題組答對題數之機率生成函數的次數，且t^m的係數即代表答對題數m的機率。

接著說明如何求式子(3.3)中$P(C_{i,j+1}=d_{i,j+1}|C_{ij}=d_{ij})$之值。爲了方便討論起見，假設題組中每道子題的正確答案均是第一選項。根據3.2節中機率架構之假設，可推得下列結果：

(i)

$$P(C_{i,j+1}=1|C_{ij}=1) = p_{i,j+1,1|ij1} \qquad j=1,\ldots,r_i-1.$$

此即爲題組i之第j子題答對情況下，第$j+1$子題答對之機率。

(ii)

$$
\begin{aligned}
P(C_{i,j+1}=0|C_{ij}=1) &= 1-P(C_{i,j+1}=1|C_{ij}=1)\\
&= 1-p_{i,j+1,1|ij1} \quad j=1,\ldots,r_i-1.
\end{aligned}
$$

此即爲題組i之第j子題答對情況下，第$j+1$子題答錯之機率。

(iii)

$$
\begin{aligned}
P(C_{i,j+1}=1|C_{ij}=0) &= p_{i,j+1,1|ij2}+p_{i,j+1,1|ij3}+\cdots+p_{i,j+1,1|ijs}\\
&= \sum_{k=2}^{s} p_{i,j+1,1|ijk} \quad j=1,\ldots,r_i-1.
\end{aligned}
$$

此即爲題組i之第j子題答錯情況下，第$j+1$子題答對之機率。

(iv)

$$
\begin{aligned}
P(C_{i,j+1}=0|C_{ij}=0) &= 1-P(C_{i,j+1}=1|C_{ij}=0)\\
&= 1-\sum_{k=2}^{s} p_{i,j+1,1|ijk} \quad j=1,\ldots,r_i-1.
\end{aligned}
$$

此即爲題組i之第j子題答錯情況下，第$j+1$子題答錯之機率。故C_i之機率生成函數可完全求得。

引理**3.2** 若$Y_1,\ldots,Y_t$為獨立離散型隨機變數且$Y=\sum_{i=1}^{t} Y_i$，則$E(t^Y)=E(t^{Y_1})\cdots E(t^{Y_t})$。

因整份試卷是由數則獨立題組組成，由引理3.2可得整份試卷答對題數的機率生成函數是各題組答對題數的機率生成函數之乘積，即

$$
\begin{aligned}
G_X(t) &= E(t^X)\\
&= E(t^{\sum_{i=1}^{t} C_i})\\
&= E(t^{C_1})\cdots E(t^{C_t})\\
&= G_{C_1}(t)\cdots G_{C_t}(t) \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

因此由式子(3.4)之係數可求得答對題數X的機率分配函數。

3.4 機率模式下難度指標與鑑別度指標之計算公式

依照傳統模式，題組 i 中第 j 子題的難度指標 P_{ij} 與鑑別度指標 D_{ij} 定義如下：

$$P_{ij} = \frac{P_{ij}^{[H]} + P_{ij}^{[L]}}{2} \tag{3.5}$$

$$D_{ij} = P_{ij}^{[H]} - P_{ij}^{[L]} \tag{3.6}$$

$$j = 1, \ldots, r_i \ \ ; \ \ i = 1, \ldots, t.$$

式子 (3.5) 與 (3.6) 中之 $P_{ij}^{[H]}$ 與 $P_{ij}^{[L]}$ 分別是高分群 (H) 與低分群 (L) 學生在題組 i 第 j 子題的答對率，即

$$P_{ij}^{[H]} = P(\text{答對題組}\, i \,\text{之第}\, j \,\text{子題} \mid \text{高分群}\,(H))$$

$$P_{ij}^{[L]} = P(\text{答對題組}\, i \,\text{之第}\, j \,\text{子題} \mid \text{低分群}\,(L))$$

$$j = 1, \ldots, r_i \ \ ; \ \ i = 1, \ldots, t.$$

通常高(低)分群是成績爲前(後) $q \times 100\%$ 的受測學生，其中 $\frac{1}{4} \leq q \leq \frac{1}{3}$，本文中爲了推導難度指標與鑑別度指標計算公式，高(低)分群是以答對題數表現。

令

$$x^{[H]} = \text{高分群至少答對之總題數}$$

$$x^{[L]} = \text{低分群至多答對之總題數}$$

則 $P_{ij}^{[H]}$ 可表示如下：

$$P_{ij}^{[H]} = \frac{P(X \geq x^{[H]} \text{且} C_{ij} = 1)}{P(X \geq x^{[H]})} = \frac{P(X \geq x^{[H]} | C_{ij} = 1)}{P(X \geq x^{[H]})} \times P(C_{ij} = 1) \tag{3.7}$$

$$j = 1, \ldots, r_i \ \ ; \ \ i = 1, \ldots, t.$$

同理，$P_{ij}^{[L]}$ 可表示如下：

$$P_{ij}^{[L]} = \frac{P(X \leq x^{[L]} \text{且} C_{ij} = 1)}{P(X \leq x^{[L]})} = \frac{P(X \leq x^{[L]} | C_{ij} = 1)}{P(X \leq x^{[L]})} \times P(C_{ij} = 1) \tag{3.8}$$

$$j = 1, \ldots, r_i \ \ ; \ \ i = 1, \ldots, t.$$

式子(3.7)中之$P(X \geq x^{[H]})$可由X的機率生成函數(式子(3.4))之次數至少爲$x^{[H]}$的各項係數和獲得；同理，式子(3.8)中之$P(X \leq x^{[L]})$可由X的機率生成函數(式子(3.4))之次數至多爲$x^{[L]}$的各項係數和獲得。

接著計算式子(3.7)中的$\mathrm{P}(X \geq x^{[H]}|C_{ij} = 1)$與式子(3.8)中的$\mathrm{P}(X \leq x^{[L]}|C_{ij} = 1)$，需先求：在題組$i$之第$j$子題答對情況下，$X$的條件分配函數。而此條件分配可由下列機率生成函數獲得，即

$$\begin{aligned} E(t^X|C_{ij}=1) &= E(t^{C_1+\cdots+C_t}|C_{ij}=1) \\ &= \prod_{i=1}^{t} E(t^{C_i}|C_{ij}=1) \\ &= [\prod_{h\neq i} E(t^{C_h})] \cdot E(t^{C_i}|C_{ij}=1) \end{aligned} \quad (3.9)$$

當$h \neq i$時，$E(t^{C_h})$表示題組h中答對題數C_h的機率生成函數，可由式子(3.3)獲得。而

$$\begin{aligned} & E(t^{C_i}|C_{ij}=1) \\ =& \sum_{m=1}^{r_i} \sum_{\substack{d_{i1}+\cdots+d_{i,r_i}=m \\ d_{ij}=1}} [P(C_{i1}=d_{i1},\ldots,C_{ij}=d_{ij},\ldots,C_{i,r_i}=d_{i,r_i}|C_{ij}=1)]t^m \\ =& \sum_{m=1}^{r_i} \sum_{\substack{d_{i1}+\cdots+d_{i,r_i}=m \\ d_{ij}=1}} \frac{P(C_{i1}=d_{i1},\ldots,C_{ij}=1,\ldots,C_{i,r_i}=d_{i,r_i})}{P(C_{ij}=1)} t^m \\ =& \frac{1}{P(C_{ij}=1)} [\sum_{m=1}^{r_i} \sum_{\substack{d_{i1}+\cdots+d_{i,r_i}=m \\ d_{ij}=1}} P(C_{i1}=d_{i1})P(C_{i2}=d_{i2}|C_{i1}=d_{i1}) \times \cdots \\ & \times P(C_{ij}=1|C_{i,j-1}=d_{i,j-1}) \times P(C_{i,j+1}=d_{i,j+1}|C_{ij}=1) \times P(C_{i,j+2}=d_{i,j+2}|C_{i,j+1}=d_{i,j+1}) \\ & \times \cdots \times P(C_{i,r_i}=d_{i,r_i}|C_{i,r_i-1}=d_{i,r_i-1})]t^m \\ =& \sum_{m=1}^{r_i} \sum_{\substack{d_{i1}+\cdots+d_{i,r_i}=m \\ d_{ij}=1}} [P(C_{i1}=d_{i1}) \prod_{g=1}^{r_i-1} P(C_{i,g+1}=d_{i,g+1}|C_{ig}=d_{ig})]t^m / P(C_{ij}=1) \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中 d_{ig}的值爲0或1。

因此式子(3.9)可以完全獲得，即可算出 $C_{ij}=1$時，X之條件機率生成函數。而式子(3.7)中$\mathrm{P}(X \geq x^{[H]}|C_{ij}=1)$可由此條件機率生成函數(式子(3.9))之

次數至少為$x^{[H]}$之各項係數和獲得；同理，式子(3.8)中$\mathrm{P}(X \leq x^{[L]}|C_{ij}=1)$可由該條件機率生成函數(式子(3.9))之次數至多為$x^{[L]}$之各項係數和獲得。

最後，說明如何計算$P(C_{ij}=1)$之值。當第j子題各選項之機率$(p_{ij1},\ldots,p_{ijs})$已知時，下一子題各選項之機率則可由下列關係式獲得：

$$p_{i,j+1,k^*} = \sum_{k=1}^{s} p_{ijk}p_{i,j+1,k^*|ijk}$$

由題組第一子題各選項機率$(p_{i11},\ldots,p_{i1s})$開始，根據上式結果，依序可得第二子題、$\cdots$、第r_i子題各選項機率。故第i題組之第j子題答對機率$P(C_{ij}=1)$因而可獲得。

事實上，$P_{ij}^{[H]}$與$P_{ij}^{[L]}$之分子部份，即$\mathrm{P}(X \geq x^{[H]}|C_{ij}=1)\times P(C_{ij}=1)$與$\mathrm{P}(X \leq x^{[L]}|C_{ij}=1)\times P(C_{ij}=1)$，可以另一較快方式獲得，茲說明如下：

由式子(3.9)與(3.10)可得：

$$\begin{aligned} E(t^X|C_{ij}=1) &= [\prod_{h\neq i} G_{C_h}(t)]\cdot E(t^{C_i}|C_{ij}=1) \\ &= [\prod_{h\neq i} G_{C_h}(t)]\cdot G_{ij}^*(t)/P(C_{ij}=1) \end{aligned}$$

其中

$$G_{ij}^*(t) = \sum_{m=1}^{r_i} \sum_{\substack{d_{i1}+\cdots+d_{i,r_i}=m \\ d_{ij}=1}} [P(C_{i1}=d_{i1})\prod_{g=1}^{r_i-1} P(C_{i,g+1}=d_{i,g+1}|C_{ig}=d_{ig})]t^m$$

令

$$F_{ij}(t) = [\prod_{h\neq i} G_{C_h}(t)]\cdot G_{ij}^*(t) \tag{3.11}$$

則

$$E(t^X|C_{ij}=1) = F_{ij}(t)/P(C_{ij}=1) \tag{3.12}$$

由式子(3.12)知$P(X \geq x^{[H]}|C_{ij}=1)\times P(C_{ij}=1)$之值，即$P(X \geq x^{[H]}$且$C_{ij}=1)$之值，可由(3.11)式中$F_{ij}(t)$次數至少為$x^{[H]}$之各項係數和獲得；同理，$P(X \leq x^{[L]}|C_{ij}=1)\times P(C_{ij}=1)$之值，即$P(X \leq x^{[L]}$且$C_{ij}=1)$之值，可由(3.11)式中$F_{ij}(t)$次數至多為$x^{[L]}$之各項係數和獲得。

在機率模式下，兩非題組型試題有相同答對率時，其對應之難度指標與鑑別度指標值亦相同。今說明如下：假設 $i \neq i^*$ 且 $P(C_{i1}=1)=P(C_{i^*1}=1)$。因兩指標值是高(低)分群於某試題答對率之和、差運算，故只需證明 $P_{i1}^{[H]}$=$P_{i^*1}^{[H]}$ 與 $P_{i1}^{[L]}$=$P_{i^*1}^{[L]}$ 即可。由式子(3.7)可得：

$$\begin{aligned} P_{i1}^{[H]} &= \frac{P(X \geq x^{[H]}|C_{i1}=1)}{P(X \geq x^{[H]})} \times P(C_{i1}=1) \\ P_{i^*1}^{[H]} &= \frac{P(X \geq x^{[H]}|C_{i^*1}=1)}{P(X \geq x^{[H]})} \times P(C_{i^*1}=1) \end{aligned}$$

從上兩式可知，欲證明 $P_{i1}^{[H]}$=$P_{i^*1}^{[H]}$，只需證明 $P(X \geq x^{[H]}|C_{i1}=1)$ 與 $P(X \geq x^{[H]}|C_{i^*1}=1)$ 等值。又 $P(X \geq x^{[H]}|C_{i1}=1)$ 及 $P(X \geq x^{[H]}|C_{i^*1}=1)$ 分別爲多項式 $E(t^X|C_{i1}=1)$ 與 $E(t^X|C_{i^*1}=1)$ 之次數至少爲 $x^{[H]}$ 的各項係數和。因此，若能證明 $E(t^X|C_{i1}=1)$=$E(t^X|C_{i^*1}=1)$，則可得 $P(X \geq x^{[H]}|C_{i1}=1)$=$P(X \geq x^{[H]}|C_{i^*1}=1)$。

$$\begin{aligned} E(t^X|C_{i1}=1) &= [\prod_{h \neq i} E(t^{C_{h1}})] \cdot E(t^{C_{i1}}|C_{i1}=1) \\ &= [\prod_{h \neq i,i^*} E(t^{C_{h1}})] \cdot E(t^{C_{i1}}|C_{i1}=1) \cdot E(t^{C_{i^*1}}) \\ &= [\prod_{h \neq i,i^*} E(t^{C_{h1}})] \cdot [P(C_{i1}=1)t] \cdot [P(C_{i^*1}=0)+P(C_{i^*1}=1)t] \\ &= [\prod_{h \neq i,i^*} E(t^{C_{h1}})] \cdot [P(C_{i1}=1)P(C_{i^*1}=0)t+P(C_{i1}=1)P(C_{i^*1}=1)t^2] \end{aligned}$$

同理，可證

$$E(t^X|C_{i^*1}=1) = [\prod_{l \neq i,i^*} E(t^{C_{l1}})] \cdot [P(C_{i^*1}=1)P(C_{i1}=0)t+P(C_{i1}=1)P(C_{i^*1}=1)t^2]$$

又 $P(C_{i1}=1)P(C_{i^*1}=0)$ 與 $P(C_{i^*1}=1)P(C_{i1}=0)$ 相等，故 $E(t^X|C_{i1}=1) = E(t^X|C_{i^*1}=1)$，因而，$P_{i1}^{[H]}$=$P_{i^*1}^{[H]}$。同理可證，$P_{i1}^{[L]}$=$P_{i^*1}^{[L]}$。

3.5 範例

本節中，我們將列出計算各試題難度指標與鑑別度指標值的步驟，並舉一簡單例子說明如何操作。

題組 i 之第 j 子題難度指標值 P_{ij} 與鑑別度指標值 D_{ij} 的計算過程如下：

步驟一 ： 求整份試卷答對總題數 X 的機率生成函數 $G_X(t)$，即計算式子 (3.4)。

步驟二 ： 求式子 (3.11) 中之多項式 $F_{ij}(t)$。

步驟三 ： 利用步驟一的機率生成函數，求式子 (3.7) 與 (3.8) 中 $P(X \geq x^{[H]})$ 與 $P(X \leq x^{[L]})$ 之值。將 $G_X(t)$ 中次數至少為 $x^{[H]}$ 之各項係數加總即為 $P(X \geq x^{[H]})$；同理，將 $G_X(t)$ 中次數至多為 $x^{[L]}$ 之各項係數加總即為 $P(X \leq x^{[L]})$。

步驟四 ： 利用步驟二的多項式，求式子 (3.7) 與 (3.8) 中 $P(X \geq x^{[H]}$ 且 $C_{ij} = 1)$ 與 $P(X \leq x^{[L]}$ 且 $C_{ij} = 1)$ 之值。將 $F_{ij}(t)$ 中次數至少為 $x^{[H]}$ 之各項係數加總即為 $P(X \geq x^{[H]}$ 且 $C_{ij} = 1))$；同理，$F_{ij}(t)$ 中次數至多為 $x^{[L]}$ 之各項係數加總即為 $P(X \leq x^{[L]}$ 且 $C_{ij} = 1)$。

步驟五 ： 利用步驟三與步驟四之結果，計算高 (低) 分群於題組 i 之第 j 子題的答對率，即 $P_{ij}^{[H]}(P_{ij}^{[L]})$ 之值。

步驟六 ： 利用步驟五之結果，計算題組 i 之第 j 子題難度指標 P_{ij} 與鑑別度指標 D_{ij} 之值，即 $P_{ij} = \frac{1}{2}(P_{ij}^{[H]} + P_{ij}^{[L]})$ 與 $D_{ij} = P_{ij}^{[H]} - P_{ij}^{[L]}$。

於執行上述步驟中，未知參數均以適當估計值取代。

在不更動例題1作答內容情況下，將其改以題組型態呈現，如例 2所示，並以此例題說明機率模式下難度指標與鑑別度指標值之計算過程。

例2

假設有十二位學生回答一份試卷，此試卷共有三則題組，題組一有一道子

題，題組二有兩道子題，題組三有三道子題，且每道試題均有四個選項。以答對題數來呈現本例之高分群設定時，則爲答對 5 題以上 (含)(即 $x^{[H]}=5$)，低分群爲答對 1 題以下 (含)(即 $x^{[L]}=1$)。學生作答情形依照答對題數由高至低依序排列，如表 4。

表 4　例 2 作答情況

學生編號		題組一	題組二		題組三			答對題數
		1	1	2	1	2	3	
高分群	1	C	B	D	A	D	B	6
	2	C	B	D	A	D	D	5
	3	A	B	D	A	D	B	5
	4	C	B	C	A	D	B	5
中段生	5	C	B	D	A	A	D	4
	6	C	D	C	A	D	D	3
	7	C	B	C	A	A	D	3
	8	A	D	C	A	D	D	2
低分群	9	A	B	C	B	A	D	1
	10	C	D	C	B	A	D	1
	11	A	D	C	A	A	D	1
	12	A	D	C	B	A	D	0
	正確答案	C	B	D	A	D	B	
	答對率	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{3}{12}$	

本例中僅以題組三之各子題說明難度指標與鑑別度指標值的計算過程，其餘題組中各子題均仿照此計算方法。

步驟一：　求整份試卷答對總題數的機率生成函數 $G_X(t)$

題組一中答對題數 C_1 的機率生成函數爲 $\frac{7}{12}t+\frac{5}{12}$。

題組二中答對兩題之機率：

$$\begin{aligned}
& P(C_{21}=1, C_{22}=1) \\
= \;& P(C_{22}=1|C_{21}=1)P(C_{21}=1) \\
= \;& \frac{4}{7} \times \frac{7}{12} = \frac{4}{12}
\end{aligned}$$

題組二中答對一題之機率：

$$\begin{aligned}
& P(C_{21}=1, C_{22}=0) + P(C_{21}=0, C_{22}=1) \\
= \;& P(C_{22}=0|C_{21}=1)P(C_{21}=1) + P(C_{22}=1|C_{21}=0)P(C_{21}=0) \\
= \;& \frac{3}{7} \times \frac{7}{12} + 0 = \frac{3}{12}
\end{aligned}$$

題組二中答對零題之機率：

$$\begin{aligned}
& P(C_{21}=0, C_{22}=0) \\
= \;& P(C_{22}=0|C_{21}=0)P(C_{21}=0) \\
= \;& \frac{5}{5} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

故題組二中答對題數 C_2的機率生成函數為 $\frac{4}{12}t^2 + \frac{3}{12}t + \frac{5}{12}$。

題組三中答對三題之機率：

$$\begin{aligned}
& P(C_{31}=1, C_{32}=1, C_{33}=1) \\
= \;& P(C_{33}=1|C_{32}=1)P(C_{32}=1|C_{31}=1)P(C_{31}=1) \\
= \;& \frac{3}{6} \times \frac{6}{9} \times \frac{9}{12} = \frac{3}{12}
\end{aligned}$$

題組三中答對兩題之機率：

$$\begin{aligned}
& P(C_{31}=1, C_{32}=1, C_{33}=0) + P(C_{31}=1, C_{32}=0, C_{33}=1) \\
& +P(C_{31}=0, C_{32}=1, C_{33}=1) \\
= \;& P(C_{33}=0|C_{32}=1)P(C_{32}=1|C_{31}=1)P(C_{31}=1) \\
& +P(C_{33}=1|C_{32}=0)P(C_{32}=0|C_{31}=1)P(C_{31}=1) \\
& +P(C_{33}=1|C_{32}=1)P(C_{32}=1|C_{31}=0)P(C_{31}=0) \\
= \;& \frac{3}{6} \times \frac{6}{9} \times \frac{9}{12} + 0 \times \frac{3}{9} \times \frac{9}{12} + 0 \times \frac{0}{3} \times \frac{3}{12} = \frac{3}{12}
\end{aligned}$$

題組三中答對一題之機率：

$$\begin{aligned}
& P(C_{31}=1, C_{32}=0, C_{33}=0)+P(C_{31}=0, C_{32}=1, C_{33}=0) \\
& +P(C_{31}=0, C_{32}=0, C_{33}=1) \\
= \ & P(C_{33}=0|C_{32}=0)P(C_{32}=0|C_{31}=1)P(C_{31}=1) \\
& +P(C_{33}=0|C_{32}=1)P(C_{32}=1|C_{31}=0)P(C_{31}=0) \\
& +P(C_{33}=1|C_{32}=0)P(C_{32}=0|C_{31}=0)P(C_{31}=0) \\
= \ & \frac{3}{3}\times\frac{3}{9}\times\frac{9}{12}+0\times\frac{0}{3}\times\frac{3}{12}+\frac{0}{3}\times\frac{3}{3}\times\frac{3}{12}=\frac{3}{12}
\end{aligned}$$

題組三中答對零題之機率：

$$\begin{aligned}
& P(C_{31}=0, C_{32}=0, C_{33}=0) \\
= \ & P(C_{33}=0|C_{32}=0)P(C_{32}=0|C_{31}=0)P(C_{31}=0) \\
= \ & \frac{3}{3}\times\frac{3}{3}\times\frac{3}{12}=\frac{3}{12}
\end{aligned}$$

故題組三中答對題數 C_3的機率生成函數爲 $\frac{3}{12}t^3+\frac{3}{12}t^2+\frac{3}{12}t+\frac{3}{12}$。

即

$$\begin{aligned}
G_X(t) &= (\frac{7}{12}t+\frac{5}{12})(\frac{4}{12}t^2+\frac{3}{12}t+\frac{5}{12})(\frac{3}{12}t^3+\frac{3}{12}t^2+\frac{3}{12}t+\frac{3}{12}) \\
&= \frac{7}{144}t^6+\frac{23}{192}t^5+\frac{119}{576}t^4+\frac{1}{4}t^3+\frac{29}{144}t^2+\frac{25}{192}t+\frac{25}{576}
\end{aligned}$$

步驟二： 求多項式 $F_{31}(t)$、$F_{32}(t)$ 與 $F_{33}(t)$

$$F_{31}(t)=G_{C_1}(t)\cdot G_{C_2}(t)\cdot G^*_{31}(t)$$

其中

$$\begin{aligned}
G_{C_1}(t) &= \frac{7}{12}t+\frac{5}{12} \\
G_{C_2}(t) &= \frac{4}{12}t^2+\frac{3}{12}t+\frac{5}{12}
\end{aligned}$$

而 $G^*_{31}(t)$

$$
\begin{aligned}
&= P(C_{31}=1, C_{32}=0, C_{33}=0)t \\
&\quad +[P(C_{31}=1, C_{32}=1, C_{33}=0)+P(C_{31}=1, C_{32}=0, C_{33}=1)]t^2 \\
&\quad +P(C_{31}=1, C_{32}=1, C_{33}=1)t^3 \\
&= P(C_{31}=1)P(C_{32}=0|C_{31}=1)P(C_{33}=0|C_{32}=0)t \\
&\quad +[P(C_{31}=1)P(C_{32}=1|C_{31}=1)P(C_{33}=0|C_{32}=1) \\
&\quad +P(C_{31}=1)P(C_{32}=0|C_{31}=1)P(C_{33}=1|C_{32}=0)]t^2 \\
&\quad +P(C_{31}=1)P(C_{32}=1|C_{31}=1)P(C_{33}=1|C_{32}=1)t^3 \\
&= \frac{3}{12}t^3+\frac{3}{12}t^2+\frac{3}{12}t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{故 } F_{31}(t) &= (\frac{7}{12}t+\frac{5}{12})(\frac{4}{12}t^2+\frac{3}{12}t+\frac{5}{12})(\frac{3}{12}t^3+\frac{3}{12}t^2+\frac{3}{12}t) \\
&= \frac{7}{144}t^6+\frac{23}{192}t^5+\frac{119}{576}t^4+\frac{29}{144}t^3+\frac{25}{192}t^2+\frac{25}{576}t
\end{aligned}
$$

同理，可得

$$
\begin{aligned}
F_{32}(t) &= \frac{7}{144}t^6+\frac{23}{192}t^5+\frac{91}{576}t^4+\frac{25}{192}t^3+\frac{25}{576}t^2 \\
F_{33}(t) &= \frac{7}{144}t^6+\frac{41}{576}t^5+\frac{25}{288}t^4+\frac{25}{576}t^3
\end{aligned}
$$

步驟三： 求 $P(X \geq 5)$ 與 $P(X \leq 1)$

將步驟一所得機率生成函數 $G_X(t)$ 中次數至少爲五次之各項係數加總，可得

$$P(X \geq 5)=\frac{7}{144}+\frac{23}{192}=\frac{97}{576}$$

將步驟一所得機率生成函數 $G_X(t)$ 中次數至多爲一次之各項係數加總，可得

$$P(X \leq 1)=\frac{25}{192}+\frac{25}{576}=\frac{25}{144}$$

步驟四： 求 $P(X \geq 5 且 C_{31}=1)$ 與 $P(X \leq 1 且 C_{31}=1)$

將步驟二所得多項式 $F_{31}(t)$ 中次數至少爲五次之各項係數加總，可得

$$P(X \geq 5 且 C_{31}=1)=\frac{7}{144}+\frac{23}{192}=\frac{97}{576}$$

將步驟二所得多項式$F_{31}(t)$中次數至多爲一次之各項係數加總，可得

$$P(X \leq 1 \text{且} C_{31}=1) = \frac{25}{576}$$

同理，可得

$$\begin{aligned} P(X \geq 5 \text{且} C_{32}=1) &= \frac{97}{576} \quad , \quad P(X \leq 1 \text{且} C_{32}=1) = 0 \\ P(X \geq 5 \text{且} C_{33}=1) &= \frac{23}{192} \quad , \quad P(X \leq 1 \text{且} C_{33}=1) = 0 \end{aligned}$$

步驟五： 利用步驟三與步驟四之結果計算$P_{31}^{[H]}$、$P_{31}^{[L]}$；$P_{32}^{[H]}$、$P_{32}^{[L]}$與$P_{33}^{[H]}$、$P_{33}^{[L]}$

$$\begin{aligned} P_{31}^{[H]} &= \frac{P(X \geq 5 \text{且} C_{31}=1)}{P(X \geq 5)} \\ &= (\frac{97}{576})/(\frac{97}{576}) \\ &= 1.0000 \\ P_{31}^{[L]} &= \frac{P(X \leq 1 \text{且} C_{31}=1)}{P(X \leq 1)} \\ &= (\frac{25}{576})/(\frac{25}{144}) \\ &= 0.2500 \end{aligned}$$

同理，可得

$$\begin{aligned} P_{32}^{[H]} &= 1.0000 \quad , \quad P_{32}^{[L]} = 0.0000 \\ P_{33}^{[H]} &= 0.7113 \quad , \quad P_{33}^{[L]} = 0.0000 \end{aligned}$$

步驟六： 利用步驟五之結果計算P_{31}、D_{31}；P_{32}、D_{32}與P_{33}、D_{33}

$$\begin{aligned} P_{31} &= \frac{1}{2}(P_{31}^{[H]} + p_{31}^{[L]}) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{4}) \\ &= 0.6250 \\ D_{31} &= P_{31}^{[H]} - p_{31}^{[L]} \\ &= 1 - \frac{1}{4} \\ &= 0.7500 \end{aligned}$$

同理，可得

$$P_{32} = 0.5000 \quad , \quad D_{32} = 1.0000$$
$$P_{33} = 0.8557 \quad , \quad D_{33} = 0.7113$$

我們將例 2 中各試題難度指標與鑑別度指標整理於表 5。

表5　機率模式下例 2 各子題之難度指標與鑑別度指標值

題號		高分群答對率	低分群答對率	難度指標	鑑別度指標
題組一	1	0.7938	0.3500	0.5719	0.4438
題組二	1	1.0000	0.4500	0.7250	0.5500
	2	0.7835	0.0000	0.3918	0.7835
題組三	1	1.0000	0.2500	0.6250	0.7500
	2	1.0000	0.0000	0.5000	1.0000
	3	0.7113	0.0000	0.3557	0.7113