第三章　選擇權交易策略

關於如何使用線性規劃模型尋求選擇權最佳投資組合的問題，已有許多標準的交易公式可依循。本章針對整數線性規劃介紹選擇權交易策略，包含套利策略與線性規劃模型、大中取小模型、考慮比例制、固定制和混合制交易成本的整數線性規劃模型。

3.1. 套利策略與線性規劃模型

選擇權是一種買賣雙方約定的契約，買方支付權利金(premium)，取得契約上的權利但未必要履行義務；賣方則收取權利金，當買方要求執行權利時必須履行義務。歐式選擇權的買方，可以在約定的到期日(expiration date)，根據履約價格(strike price)，買進或賣出特定標的資產。以下將分別討論歐式買權與賣權到期時的價值與到期損益。

一般歐式選擇權的買權到期日價值可用數學式表示如下：

$$\begin{aligned} C_T &= \begin{cases} S_T - k & \text{當} S_T > k \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \\ &= \max\{S_T - k, 0\} \\ &= (S_T - k)^+ \end{aligned} \tag{1}$$

其中k為買權履約價格，T為到期日，S_T為標的股票到期時的股價，C_T為買權的到期價值且

$$(x)^+ = \begin{cases} x & \text{當 } x > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

式(1)表示當我們持有買權時，有兩種選擇：履約或者不履約。當$S_T > k$時，我們會選擇履約因為可獲利；反之如果當$S_T \le k$時，我們則選擇不履約。持有歐式選擇權的買權到期損益如圖 3-1：

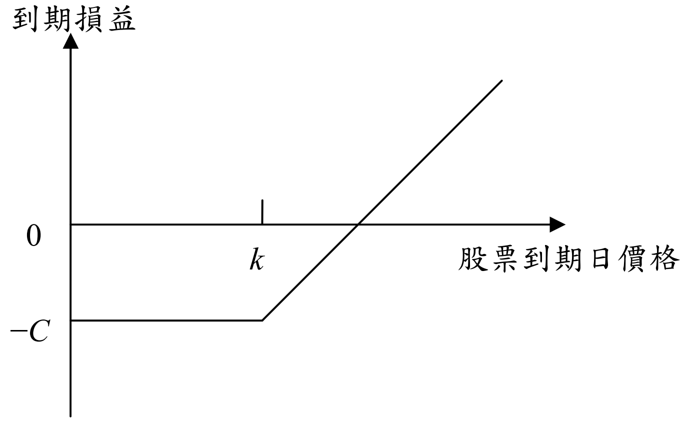

圖 3-1　買進買權的到期損益圖

同樣的，若我們擁有賣權時，也有履約或不履約兩種選擇。當$S_T < k$時，我們選擇履約因為可獲利；反之，如果當$S_T \geq k$時，我們則選擇不履約。一般歐式選擇權的賣權到期日價值可用數學式表示如下：

$$
\begin{aligned}
P_T &= \begin{cases} k - S_T & \text{當 } k > S_T \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \\
&= \max\{k - S_T, 0\} \\
&= (k - S_T)^+
\end{aligned}
$$

其中P_T為賣權的到期價值。持有歐式選擇權的賣權到期損益如圖 3-2：

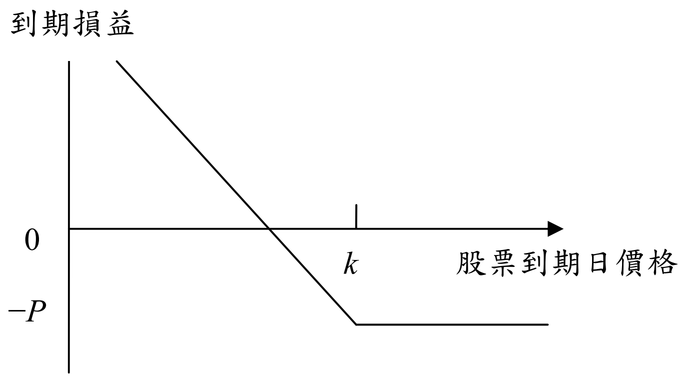

圖 3-2　買進賣權的到期損益圖

相同地，若我們考慮賣出歐式選擇權的買權，則到期損益如圖 3-3：

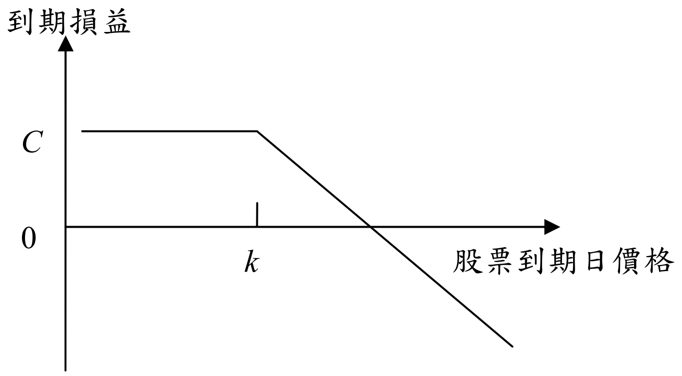

圖 3-3　賣出買權的到期損益圖

考慮賣出歐式選擇權的買權，則到期損益如圖 3-4：

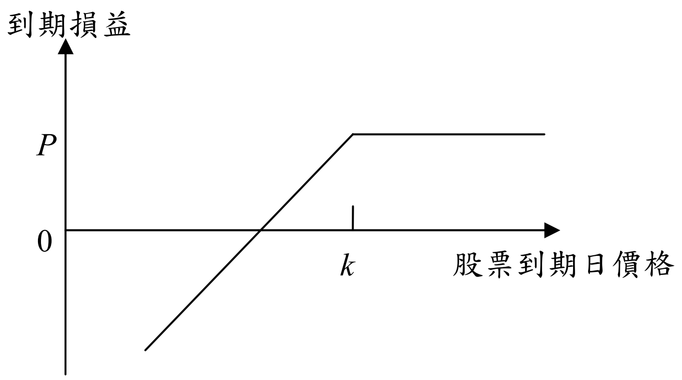

圖 3-4　賣出賣權的到期損益圖

我們可將買進買權、買進賣權、賣出買權、賣出賣權任意組合，形成不同的選擇權交易策略，當到期損益圖的損益線落在股票到期日價格(x-軸)之上，表示此投資組合具有套利機會。

楊靜宜 (2004)利用此概念，建構一整數線性規劃模型，尋求最佳選擇權套利策略。首先，給定下列基本假設並定義符號意義：

(1)只考慮單期的情況，即持有選擇權直到到期日。

(2)忽略交易費用及保證金的費用。

(3)選擇權皆為歐式選擇權。

k_i ：第 i 個選擇權的履約價，$i=1,2,\cdots,n$ ，$k_1<\cdots<k_n$

x_i ：選擇權組合中買權的數量，$i=1,2,\cdots,n$（若 x_i 為負，則代表賣出的口數）

y_i ：選擇權組合中賣權的數量，$i=1,2,\cdots,n$（若 y_i 為負，則代表賣出的口數）

c_i ：履約價為 k_i 的買權價格，$i=1,2,\cdots,n$

p_i ：履約價為 k_i 的賣權價格，$i=1,2,\cdots,n$

$V(S_T)$ ：當股價在到期日為 S_T 時，選擇權投資組合的損益情形。

M ：限制買權與賣權的購買數量，即 $-M\le x_i, y_i\le M$ ，$i=1,2,\cdots,n$

因為我們不知道到期日股價 S_T 為何，所以假設到期日股價 S_T 有 m 種情形，且 $S_1<S_2<\cdots<S_m$ 。另外，我們假設股票到期價值 S_j 的發生機率為 $\frac{1}{m}$ ，$j=1,2,\cdots,m$。已知選擇權投資組合到期的損益為買權、賣權的到期價值減去購買買權、賣權的成本，則此選擇權投資組合的到期損益 $V(S_T)$ 可表示如下：

$$
\begin{aligned}
V(S_T) &= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}V(S_j) \\
&= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}(k_i-S_j)^+y_i+\sum_{i=1}^{n}(S_j-k_i)^+x_i-\sum_{i=1}^{n}p_iy_i-\sum_{i=1}^{n}c_ix_i\right)
\end{aligned}
$$

令 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ ，$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ ，若投資組合 (X,Y) 滿足下列條件：

$$V(0)>0 \tag{2}$$

$$V(k_l)>0,\ l=1,2,\cdots,n \tag{3}$$

$$V'(S_T)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ge 0 \tag{4}$$

則可保證無論股價如何變動，此投資組合都有套利機會。

根據上述性質與假設條件，忽略常數$\frac{1}{m}$，可建構一整數線性規劃模型：

＜模型一＞

$$\max \ \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}(k_i - S_j)^+ y_i + \sum_{i=1}^{n}(S_j - k_i)^+ x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} k_i y_i - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i > 0$$

$$\sum_{i=l+1}^{n}(k_i - k_l) y_i + \sum_{i=1}^{l-1}(k_l - k_i) x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i > 0, \ \ l = 1, 2, \cdots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq 0$$

$$x_i, y_i \in \mathrm{Z} \cap [-M, M], \ \ i = 1, 2, \cdots, n$$

此模型利用整數線性規劃，提供一個簡明且容易運算的選擇權套利策略，文中以 Ericsson 的 2001 年 2 月 13 日選擇權來驗證，發現有套利機會。

3.2. 大中取小模型

Liu 與 Liu (2006)先假設股票到期價值 S_T 呈對數常態分配(lognormal distribution)，再根據平賭定價理論的概念，即選擇權最後價值折現後的期望值會和理論價值相同，建構一整數線性規劃模型。

＜模型二＞

$$\max \ \sum_{i=1}^{n}(\bar{p}_i - p_i)y_i + (\bar{c}_i - c_i)x_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n}k_i y_i - \sum_{i=1}^{n}p_i y_i - \sum_{i=1}^{n}c_i x_i \geq 0$$

$$\sum_{i=l+1}^{n}(k_i - k_l)y_i + \sum_{i=1}^{l-1}(k_l - k_i)x_i - \sum_{i=1}^{n}p_i y_i - \sum_{i=1}^{n}c_i x_i \geq 0, \quad l = 1, 2, \cdots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i \geq 0$$

$$x_i, y_i \in \mathrm{Z} \cap [-M, M], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

其中 $\bar{p}_i = E[e^{-r(T-t)}(k_i - S_T)^+]$ 和 $\bar{c}_i = E[e^{-r(T-t)}(S_T - k_i)^+]$ 表示賣權和買權在平賭測度下的理論價格。

此模型與楊靜宜的整數線性規劃模型架構相同，唯股票到期價格 S_T 是假設服從對數常態分配。但兩者均是對到期報酬求最大值，由於求得的最大報酬只是許多可能結果的一種情形且現實市場中股票到期價值 S_T 不一定呈對數常態分配，兩者所建構的模型與實際情況仍有落差。因此，Liu 與 Liu 為使模型求得的最後報酬更符合現實情況，提出大中取小模型(min-max regret model, MMR)。

＜模型三＞

$$\min \quad v$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} k_i y_i - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \geq 0$$

$$\sum_{i=l+1}^{n} (k_i - k_l) y_i + \sum_{i=1}^{l-1} (k_l - k_i) x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d_l = L, \;\; l = 1, 2, \cdots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq 0$$

$$d_l \leq v, \, l = 1, 2, \cdots, n$$

$$d_l \leq L$$

$$x_i, \, y_i \in Z \cap [-M, M], \, i = 1, 2, \cdots, n$$

其中 L 表示此投資組合的虛擬目標報酬，d_l 為實際報酬與虛擬目標報酬之差距。因為 MMR 模型以實際報酬與虛擬目標報酬的最大差距取極小值，所以名為大中取小模型。

下面我們將藉由圖 3-5與圖 3-6說明模型一與MMR模型之差異。如圖 3-5，模型一的目標函數是求選擇權到期損益的最大值，亦即所求得的最佳投資組合可讓損益曲線下的面積最大，但隨著到期日股價的不同，獲利也跟著不同。如圖 3-6，MMR模型則先假設一個極大的常數，我們稱之為虛擬目標報酬，而實際報酬與虛擬目標報酬的最大差距取極小值即為此模型的目標函數。藉由實際報酬與虛擬目標報酬之差距取極小值，原本高高低低的獲利曲線被拉成一直線，表示無論未來股價如何變動，所求得的投資組合有穩定獲利，相當於去除了市場中的不確定因素，且無需考慮股票到期價值 S_T 的分配情形，又能存在套利機會。

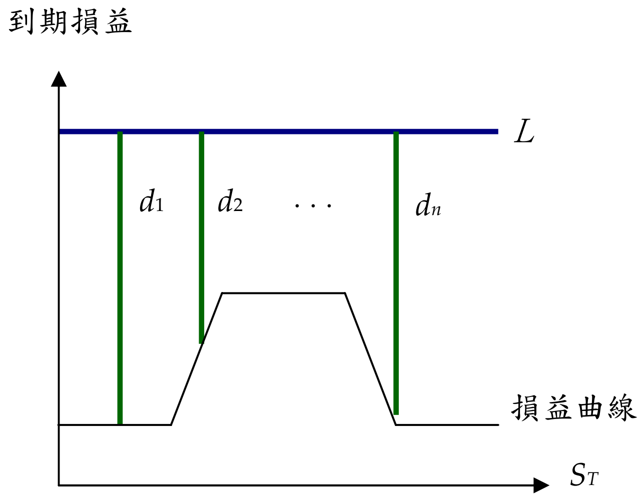

圖 3-5　選擇權投資組合到期損益圖(模型一)

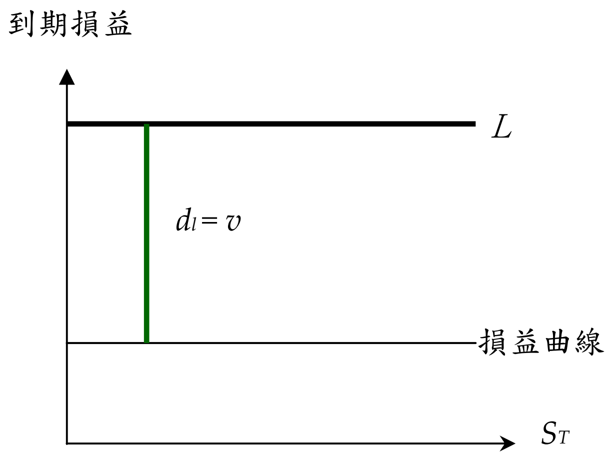

圖 3-6　選擇權投資組合到期損益圖(MMR 模型)

由實證結果得知，MMR 模型建構出的投資組合比模型一和模型二所建構的投資組合，更能符合投資者的預期。本論文將使用模型一與 MMR 模型，不必考慮股價的變動是哪一種分配型態，建構出考慮交易成本之整數線性規劃模型，尋求最佳選擇權套利策略。

3.3. 考慮交易成本的規劃模型

在這一小節中，我們考慮交易成本，建立選擇權交易策略的線性規劃模型。首先，我們探討加入交易成本後的投資組合，仍有套利機會存在的條件。由 3.1 節我們知道，當投資組合(X,Y)滿足式(2)、式(3)和式(4)時，有套利機會存在。令交易成本為$C(X,Y)$，則當考慮交易成本$C(X,Y)$時，投資組合(X,Y)滿足下列條件：

$$V(0)-C(X,Y)>0 \tag{5}$$
$$V(k_l)-C(X,Y)>0,\ \ l=1,2,\cdots,n \tag{6}$$

$$V'(S_T)=\sum_{i=1}^{n}x_i \geq 0 \tag{4}$$

即可保證無論股價如何變動，此投資組合都有套利機會。由於交易成本與標的資產價格互相獨立，所以式(4)不受考慮交易成本的影響。

由前面的文獻回顧中，我們發現交易成本在選擇權評價理論或選擇權避險策略上，大都是比例制的成本型態，而在實際市場中即為交易過程中投資者需付一定比例的賦稅與固定手續費。因此，我們考慮交易成本的三種形式：比例制、固定制和混合制。

若我們考慮比例制交易成本，令α表示投資者需支付一定比例的稅金，亦即交易成本在交易總金額中所佔的比例，因為買進或賣出選擇權都需支付交易成本，所以選擇權交易數量以$|y_i|$與$|x_i|$表示，則$\alpha p_i|y_i|$與$\alpha c_i|x_i|$即為應交付之比例制交易成本。

接著，若我們考慮交易成本為固定制，即每交易一口選擇權需支付固定金額β，且買進或賣出選擇權皆需支付交易成本，則我們可用$\beta|y_i|$和$\beta|x_i|$來表示固定制交易成本。

最後，若我們考慮交易成本中含有比例制的稅賦α和每口交易需支付的固定金額β，在本文中我們稱之為混合制交易成本，且買進或賣出選擇權皆需支付交

易成本，則我們可用$(\alpha p_i+\beta)|y_i|$和$(\alpha c_i+\beta)|x_i|$來表示交易成本。

我們歸納交易成本$C(X,Y)$的形式如下：

(1)比例制交易成本：$\alpha p_i|y_i|+\alpha c_i|x_i|$

(2)固定制交易成本：$\beta|y_i|+\beta|x_i|$

(3)混合制交易成本：$(\alpha p_i+\beta)|y_i|+(\alpha c_i+\beta)|x_i|$

我們考慮交易成本$C(X,Y)$，延伸模型一所建構之數學規劃模型如下：

＜模型四＞

$$\max \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}(k_i-S_j)^+ y_i+\sum_{i=1}^{n}(S_j-k_i)^+ x_i-\sum_{i=1}^{n}p_i y_i-\sum_{i=1}^{n}c_i x_i\right)-C(X,Y)$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{i=1}^{n}k_i y_i-\sum_{i=1}^{n}p_i y_i-\sum_{i=1}^{n}c_i x_i-C(X,Y)>0$$

$$\sum_{i=l+1}^{n}(k_i-k_l)y_i+\sum_{i=1}^{l-1}(k_l-k_i)x_i-\sum_{i=1}^{n}p_i y_i-\sum_{i=1}^{n}c_i x_i-C(X,Y)>0,\ \ l=1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\geq 0$$

$$x_i, y_i\in \mathrm{Z}\cap[-M, M],\ \ i=1,2,\cdots,n$$

接下來，我們將 MMR 模型加上交易成本$C(X,Y)$，建構另一考慮交易成本的線性規劃模型如下：

＜模型五＞

$$\min \quad v$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} k_i y_i - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - C(X,Y) \geq 0 \tag{7}$$

$$\sum_{i=l+1}^{n} (k_i - k_l) y_i + \sum_{i=1}^{l-1} (k_l - k_i) x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - C(X,Y) + d_l = L, \tag{8}$$

$$l = 1, 2, \cdots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq 0$$

$$d_l \leq v, l = 1, 2, \cdots, n \tag{9}$$

$$d_l \leq L \tag{10}$$

$$x_i, y_i \in Z \cap [-M, M], i = 1, 2, \cdots, n$$

式(7)表示當選擇權到期時，扣除交易成本後的價值非負，式(8)表示實際報酬與虛擬目標報酬的最大差距為d_l，式(9)則表示v為所有差距值d_l之最大值，式(10)規範d_l應小於或等於L，係為保證選擇權投資組合的報酬非負。

交易成本中出現$|y_i|$與$|x_i|$，若把$|y_i|$與$|x_i|$加入模型中，得到的並非線性規劃模型，為了使考慮交易成本的規劃模型為線性規劃，我們利用變數變換將絕對值符號去掉。若將x_i為正值或負值時，分別以x_i^+與$-x_i^-$表示，則$x_i = x_i^+ - x_i^-$且$|x_i| = x_i^+ + x_i^-$，其中$x_i^+ \geq 0, x_i^- \geq 0$。同樣的，考慮非負整數$y_i^+$與$y_i^-$分別表示$y_i$為正值或負值時，則$y_i = y_i^+ - y_i^-$且$|y_i| = y_i^+ + y_i^-$，其中$y_i^+ \geq 0, y_i^- \geq 0$。如此一來，我們將交易成本經過變數變換後加入規劃模型中，即可得到一線性規劃模型。我們將上述三種交易成本經變數變換後整理成如下：

(1)比例制交易成本：$\alpha p_i(y_i^+ + y_i^-) + \alpha c_i(x_i^+ + x_i^-)$

(2)固定制交易成本：$\beta(y_i^+ + y_i^-) + \beta(x_i^+ + x_i^-)$

(3)混合制交易成本：$(\alpha p_i+\beta)(y_i^+ + y_i^-)+(\alpha c_i+\beta)(x_i^+ + x_i^-)$

最後，我們考慮變數變換後的混合制交易成本$C(X,Y)$分別延伸模型一與 MMR 模型，建立含交易成本之選擇權交易策略的線性規劃模型。

我們考慮混合制交易成本$C(X,Y)$，延伸模型一所建構之數學規劃模型如下：

＜模型六＞

$$\max \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}(k_i-S_j)^+(y_i^+ - y_i^-)+\sum_{i=1}^{n}(S_j-k_i)^+(x_i^+ - x_i^-)-\sum_{i=1}^{n}p_i(y_i^+ - y_i^-)-\sum_{i=1}^{n}c_i(x_i^+ - x_i^-)\right)$$

$$-\sum_{i=1}^{n}(\alpha p_i+\beta)(y_i^+ + y_i^-)-\sum_{i=1}^{n}(\alpha c_i+\beta)(x_i^+ + x_i^-)$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{i=1}^{n}(k_i-p_i)(y_i^+ - y_i^-)-\sum_{i=1}^{n}c_i(x_i^+ - x_i^-)-\sum(\alpha p_i+\beta)(y_i^+ + y_i^-)$$

$$-\sum_{i=1}^{n}(\alpha c_i+\beta)(x_i^+ + x_i^-)>0$$

$$\sum_{i=l+1}^{n}(k_i-k_l-p_i)(y_i^+ - y_i^-)+\sum_{i=1}^{l-1}(k_l-k_i-c_i)(x_i^+ - x_i^-)$$

$$-\sum_{i=1}^{n}(\alpha p_i+\beta)(y_i^+ + y_i^-)-\sum_{i=1}^{n}(\alpha c_i+\beta)(x_i^+ + x_i^-)>0\text{，}\ l=1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^+ - x_i^-)\ge 0$$

$$y_i^+ + y_i^- \le M,\ \ i=1,2,\cdots,n$$

$$x_i^+ + x_i^- \le M,\ \ i=1,2,\cdots,n$$

$$y_i^+,\ y_i^-,\ x_i^+,\ x_i^- \ge 0,\ \ i=1,2,\cdots,n$$

同樣地，我們用 MMR 模型建構模型七，來研究混合制交易成本的情況，模型如下：

＜模型七＞

$$\min \quad v$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n}(k_i - p_i)(y_i^+ - y_i^-) - \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i^+ - x_i^-)$$

$$- \sum_{i=1}^{n}(\alpha p_i + \beta)(y_i^+ + y_i^-) - \sum_{i=1}^{n}(\alpha c_i + \beta)(x_i^+ + x_i^-) \geq 0$$

$$\sum_{i=l+1}^{n}(k_i - k_l - p_i)(y_i^+ - y_i^-) + \sum_{i=1}^{l-1}(k_l - k_i - c_i)(x_i^+ - x_i^-)$$

$$- \sum_{i=1}^{n}(\alpha p_i + \beta)(y_i^+ + y_i^-) - \sum_{i=1}^{n}(\alpha c_i + \beta)(x_i^+ + x_i^-) + d_l = L \text{ ，} l = 1, 2, \cdots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^+ - x_i^-) \geq 0$$

$$d_l \leq v, l = 1, 2, \cdots, n$$

$$d_l \leq L$$

$$y_i^+ + y_i^- \leq M, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$x_i^+ + x_i^- \leq M, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$y_i^+,\ y_i^-,\ x_i^+,\ x_i^- \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$