第二章　文獻回顧

在選擇權的評價過程中，有一個很重要的環節就是資產價格的動態過程與波動度的選取，若所選取的波動度能夠配適市場的隱含波動度，則我們可以得到良好的評價結果。在本章我們將回顧一些關於選擇權的評價方法，包含 Black-Scholes 的歐式選擇權評價公式，還原風險中立機率測度法與新的資產價格動態過程，我們將在以下說明。

2.1 Black 與 Scholes 之歐式選擇權評價公式

Blcak 與 Scholes（1973）提出建構於連續時間下的歐式選擇權評價公式，而該評價公式最爲人所熟悉且應用廣泛，包含股價選擇權、指數選擇權與利率選擇權等。該公式有下列基本假設：

1. 股票價格的過程爲幾何布朗運動

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

μ ：股票的期望報酬率

σ ：股票報酬率的波動度

W_t ：標準布朗運動（standard Brownian motion）

2. 股票交易連續進行，且股票具有可分割性（即可交易任何比率的股票）
3. 交易費用與交易稅不存在
4. 可無限放空股票及充分利用放空所得來的資金
5. 無風險利率存在
6. 標的股票在衍生性商品的存續時間內，不分配現金股息

Black 與 Scholes 利用上述假設，建構一投資組合並進行避險。在無套利機會之下，投資組合所帶來的報酬必等於無風險利率r。利用 Ito 引理（Ito's lemma），可得到歐式選擇權價格函數$C(S_t,t)$滿足下列偏微分方程式

$$C_t + C_s r S_t + \frac{1}{2} C_{ss} \sigma^2 S_t^{\ 2} - rC = 0$$

而到期時買權現金流量$C(S_T,T) = \max(S_T - K, 0)$為邊界條件（boundary condition），即可導出歐式買權的合理價格$C(S_t,t)$的公式解

$$C(S_t,t) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$N(\cdot)$：標準常態分配累積函數

$C(S_t,t)$：歐式買權於時點t的價格

S_t：標的資產於時點t的價格

T：歐式買權的到期日

K：履約價

r：無風險利率

σ：標的資產報酬率的瞬間波動度

而歐式賣權評價公式，可根據買賣權平價理論（put-call parity）導出，其中$P(S_t,t)$表示歐式賣權於時點t的價格

$$P(S_t,t) = -S_t N(-d_1) + K e^{-r(T-t)} N(-d_2)$$

其中各變數如上所述。

雖然 Blcak 與 Scholes 建構出如此完美的公式解，但其中假設標的資產報酬率的波動度卻是固定常數，已被證實為不合理的假設。因此，若是利用此模型來進行實務校準，可能會有很大的誤差產生。

2.2 Cox 與 Ross 之歐式選擇權評價公式

Cox 與 Ross（1976）提出了一個有別於 Black-Scholes 的歐式選擇權評價公式，其中最大的差別在於 Cox 與 Ross 假設股票價格的過程不為對數常態過程，且在選擇權到期之前，標的股票可以發放股利。

Case 1 假設股票價格的過程為

$$dS_t = \mu(S_t,t)dt + \sigma\sqrt{S_t}dW_t$$

其中 $\mu(S_t,t) = rS_t - b(S_t,t)$ ，股利 $b(S_t,t) = aS_t + c$ 。

接著建立一避險投資組合，則在無套利機會之下，投資組合所帶來的報酬必等於無風險利率 r 。利用 Ito 引理，可得到歐式選擇權價格函數 $P(S_t,t)$ 滿足下列偏微分方程式

$$P_t + \left[(r-a)S_t - c\right]P_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t P_{SS} - rP = 0$$

加上到期時買權現金流量 $P(S_T,T) = \max(S_T - K, 0)$ 為邊界條件，即可導出歐式買權價格 $P(S_t,t)$ 的公式解

$$P(S_t,t) = S_t e^{-a(T-t)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)e^{-y} y^{n+2c/\sigma^2} G(n+2,\theta K)}{\Gamma(n+2+2c/\sigma^2)}$$

$$-Ke^{-r(T-t)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-y} y^{n+1+2c/\sigma^2} G(n+1,\theta K)}{\Gamma(n+2+2c/\sigma^2)}$$

其中

$$\theta=\frac{2(r-a)}{\sigma^2[e^{(r-a)(T-t)}-1]}$$

$$y=\theta S_t e^{(r-a)(T-t)}$$

$G(m,x)=\dfrac{1}{\Gamma(m)}\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-z}z^{m-1}dz$ 爲 gamma 累積分配函數的補集

（即 $G(m,x)=1-\displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(m,z)dz$，$g(m,z)=\dfrac{e^{-z}z^{m-1}}{\Gamma(m)}$ 爲一 gamma 密度函數）

此外，在給定 S_t ，$t<T$ 之下，S_T 的機率密度函數爲

$$f(S_T\mid S_t)=\left(\frac{2(r-a)}{\sigma^2(e^{(r-a)(T-t)}-1)}\right)\left(\frac{S_t e^{(r-a)(T-t)}}{S_T}\right)^{\frac{1}{2}(1+2c/\sigma^2)}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{2(r-a)(S_t e^{(r-a)(T-t)}+S_T)}{\sigma^2(e^{(r-a)(T-t)}-1)}\right\}$$

$$\times I_{1+2c/\sigma^2}\left(\frac{4(r-a)(S_T S_t e^{(r-a)(T-t)})^{1/2}}{\sigma^2(e^{(r-a)(T-t)}-1)}\right)$$

其中 I_q 爲修正的 q 階第一類型 Bessel 函數（modified Bessel function of the first kind of order q ）。

Case 2 假設股票價格的過程爲

$$dS_t=\mu(S_t,t)dt+\sigma dW_t$$

其中 $\mu(S_t,t)=rS_t-b(S_t,t)$ ，股利 $b(S_t,t)=aS_t$ ，與股票價格成比例。該過程亦可視爲 Ornstein-Uhlenbeck 過程。

與 case 1 一樣，我們建立一避險投資組合，則在無套利機會之下，投資組合所帶來的報酬必等於無風險利率 r 。利用 Ito 引理，可得到歐式選擇權價格函數 $P(S_t,t)$ 滿足下列偏微分方程式

$$P_t + (r-a)S_t P_S + \frac{1}{2}\sigma^2 P_{SS} - rP = 0$$

加上到期時買權現金流量 $P(S_T, T) = \max(S_T - K, 0)$ 爲邊界條件，即可導出歐式買權價格 $P(S_t, t)$ 的公式解

$$P(S_t, t) = (S_t e^{-a(T-t)} - Ke^{-r(T-t)})N(y_1) + (S_t e^{-a(T-t)} + Ke^{-r(T-t)})N(y_2) + \upsilon[n(y_1) - n(y_2)]$$

其中

$N(\cdot)$ 爲標準常態累積分配函數

$n(\cdot)$ 爲標準常態分配密度函數

$$\upsilon = \sigma\left(\frac{e^{-2a(T-t)} - e^{-2r(T-t)}}{2(r-a)}\right)^{1/2}$$

$$y_1 = \frac{S_t e^{-a(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}}{\upsilon}$$

$$y_2 = \frac{-S_t e^{-a(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}}{\upsilon}$$ 。

此外，在給定 S_t ，$t < T$ 之下，S_T 的機率密度函數爲

$$f(S_T \mid S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Z}}\left[\exp\left\{-\frac{(S_T - S_t e^{(r-a)(T-t)})^2}{2Z}\right\} - \exp\left\{\frac{(S_T + S_t e^{(r-a)(T-t)})^2}{2Z}\right\}\right]$$

其中 $Z = \dfrac{\sigma^2}{2(r-a)}(e^{2(r-a)(T-t)} - 1)$ 。

雖然 Cox 與 Ross 提出了兩種新的股價動態過程，但是所提供用來校準的參數卻是常數，對於實務校準來說，卻顯得缺乏彈性。

2.3 Brigo 與 Mercurio 之位移過程評價方法

Brigo 與 Mercurio（2001）延伸了 Cox 與 Ross 的研究，爲了讓實務校準結果更令人滿意，Brigo 與 Mercurio 加入了位移技巧來讓資產價格的過程更貼近真實世界。所謂的位移技巧是指：假設資產價格爲

$$S_t = a_t + b_t X_t$$

其中過程 X 爲 Cox（1975）所提出的一般化候選 CEV 過程（general candidate CEV process）

$$dX_t = \gamma_t X_t dt + \eta_t X_t^{\rho} dW_t$$

經過運算與整理後，可以得到資產價格的動態過程爲

$$dS_t = \mu S_t dt + \eta_t (S_t - a_t)^{\rho} dW_t$$

Case 1 位移 CEV 過程

假設資產價格爲

$$S_t = P_t + \alpha e^{\mu t} \text{，} t \geq 0$$

其中 P 是一個 CEV 過程

$$dP_t = \mu P_t dt + \eta P_t^{\rho} dW_t$$

考慮一個歐式買權，其到期日爲 T 、履約價格爲 K ，則在 $\alpha e^{\mu T} < K$ 的假設之下，歐式買權的價格 C_t 在任意時間點 $t < T$ 爲

$$C_t = (S_t - \alpha e^{\mu t}) e^{(\mu - r)(T-t)} \sum_{n=0}^{+\infty} g(n+1, u) G\left(\xi, k(K - \alpha e^{\mu T})^{2(1-\rho)}\right)$$
$$- (K - \alpha e^{\mu T}) e^{-r(T-t)} \sum_{n=0}^{+\infty} g(\xi, u) G\left(n+1, k(K - \alpha e^{\mu T})^{2(1-\rho)}\right)$$

其中

$$k=\frac{\mu}{\eta^2(1-\rho)[e^{2\mu(1-\rho)(T-t)}-1]}$$

$$u=k(S_t-\alpha e^{\mu t})^{2(1-\rho)}e^{2\mu(1-\rho)(T-t)}$$

$$\xi=n+1+\frac{1}{2(1-\rho)}$$

$g(y,z)=\dfrac{e^{-z}z^{y-1}}{\Gamma(y)}$ 爲一 gamma 密度函數

$G(y,x)=\int_x^{+\infty}g(y,z)dz$ 爲 gamma 累積分配函數的補集

此外，在給定 S_t ，$t<T$ 之下， S_T 的條件密度函數爲

$$p_{S_T|S_t}(x)=2(1-\rho)k^{1/(2-2\rho)}(uw^{1-4\rho})^{1/(4-4\rho)}e^{-u-w}I_{1/(2-2\rho)}(2\sqrt{uw})$$

其中 $w=k(x-\alpha e^{\mu T})^{2(1-\rho)}$，$k$ 與 u 如上所述，I_q 爲修正的 q 階第一類型 Bessel 函數。

Case 2 位移對數常態過程

假設資產價格爲

$$S_t=X_t+\alpha e^{\mu t}$$

其中過程 X 在風險中立測度之下爲幾何布朗運動

$$dX_t=\mu X_t dt+\beta_t X_t dW_t$$

則資產價格的動態過程爲

$$dS_t=\mu S_t dt+\beta_t(S_t-\alpha e^{\mu t})dW_t$$

考慮一個歐式選擇權，其到期日爲 T 、履約價格爲 K ，則在 $\alpha e^{\mu T}<K$ 的假設之下，歐式選擇權的價格 O_t 在任意時間點 $t<T$ 爲

$$
O_t = \omega\left[(S_t-\alpha e^{\mu t})e^{(\mu-r)(T-t)}\Phi\left(\omega\frac{\ln\frac{S_t-\alpha e^{\mu t}}{K-\alpha e^{\mu T}}+\mu(T-t)+\frac{1}{2}V_t^2}{V_t}\right)\right]
$$

$$
-\omega\left[(K-\alpha e^{\mu T})e^{-r(T-t)}\Phi\left(\omega\frac{\ln\frac{S_t-\alpha e^{\mu t}}{K-\alpha e^{\mu T}}+\mu(T-t)-\frac{1}{2}V_t^2}{V_t}\right)\right]
$$

其中$\omega=1$表示買權，$\omega=-1$表示賣權，且Φ表示標準常態分配累積函數。

此外，在給定S_t，$t<T$之下，S_T的條件密度函數爲位移的對數常態分配（shifted lognormal distribution）

$$
p_{S_T|S_t}(x)=\frac{1}{(x-\alpha e^{\mu T})V_t\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x-\alpha e^{\mu T})-M_t}{V_t}\right)^2\right\}, \quad x>\alpha e^{\mu T}
$$

其中

$$
M_t=\ln(S_t-\alpha e^{\mu t})+\int_t^T\left(\mu-\frac{1}{2}\beta_u^2\right)du
$$

$$
V_t=\sqrt{\int_t^T\beta_u^2 du}
$$

Brigo 與 Mercurio 運用位移技巧所導出的歐式選擇權評價公式，改善了實務上的校準結果，因爲該選擇權評價公式所提供用來校準的參數，不再是固定的常數，而是時間的明確函數，比 Cox 與 Ross 所提供的參數更加彈性。因此，本文將以台指買權來實證 Brigo 與 Mercurio 的歐式選擇權評價公式。

2.4 Rubinstein 之還原測度評價方法

Rubinstein（1994）提出了一套新的選擇權評價方法，即還原風險中立機率測度法。該方法為先給定一組先驗風險中立機率函數，利用市場上所觀察到的選擇權價格，來反推求出另一組風險中立機率函數，再利用此組機率函數計算出選擇權的合理價格。

假設我們將二元樹展開至 n 期，S_j 為最後一期的資產價格且由最低至最高做排序，$j=0,\ldots,n$，而 P'_j 為對應 S_j 的先驗風險中立機率函數。同時假設 r 為無風險利率，δ 為標的資產的支付報酬率，S^a 與 S^b 為目前標的資產的賣價與買價，C_i^a 與 C_i^b 為在目前的標的資產價格下，履約價為 K_i 的選擇權賣價與買價，$i=0,\ldots,m$。

藉由以下模型找出一組與先驗機率 P'_j 差距最小的風險中立機率測度 P_j，進而求出選擇權的合理價格。

$$\min \quad \sum_{j=0}^{n}(P_j-P'_j)^2$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=0}^{n}P_j=1$$

$$S^b \le S \le S^a \text{ ， } S=\left(\delta^n\sum\nolimits_{j=0}^{n}P_jS_j\right)\Big/r^n$$

$$C_i^b \le C_i \le C_i^a \text{ ， } C_i=\left(\sum\nolimits_{j=0}^{n}P_j\max[S_j-K_i,0]\right)\Big/r^n \text{ ， } i=1,\ldots,m$$

$$P_j \ge 0 \text{ ， } j=0,\ldots,n$$

Rubinstein 提出的原風險中立機率測度法，雖然可以避免估計資產價格波動度的問題，但是卻要先給定一組先驗分配來反推風險中立機率函數。因此，若是

先驗分配取的不好，則依此先驗分配得到的風險中立機率函數不免令人懷疑其可靠性。而相關的實證結果可以在 Jackwerth 與 Rubinstein（1996）中看到。

2.5 Brigo 與 Mercurio 之混合過程評價方法

爲了讓資產價格過程更加符合真實世界，Brigo 與 Mercurio（2001）提出一種更一般化的資產價格過程，假設在風險中立測度之下，資產價格的邊際密度函數是某些已知的擴散過程的邊際密度函數的加權平均，即

$$p_t(y) = \frac{d}{dy} Q\left\{S_t \le y\right\} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \frac{d}{dy} Q\left\{S_t^i \le y\right\} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_t^i(y)$$

在此考慮一特殊情況，即在風險中立測度之下，考慮 N 個對數常態過程

$$dS_t^i = \mu S_t^i dt + \sigma_i(t) S_t^i dW_t \text{ ， } i = 1, \dots, N$$

且資產價格 S 的動態過程爲

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma(t, S_t) dW_t$$

則經過運算與整理之後，可得到

$$\sigma(t, S_t) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \sigma_i^2(t) \frac{1}{V_i(t)} \exp\left\{-\frac{1}{2V_i^2(t)}\left[\ln\frac{S_t}{S_0} - \mu t + \frac{1}{2}V_i^2(t)\right]^2\right\}}{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \frac{1}{V_i(t)} \exp\left\{-\frac{1}{2V_i^2(t)}\left[\ln\frac{S_t}{S_0} - \mu t + \frac{1}{2}V_i^2(t)\right]^2\right\}}}$$

其中

$$V_i(t) = \sqrt{\int_0^t \sigma_i^2(u) du}$$

當資產價格爲上述過程時，考慮一個歐式選擇權，其到期日爲 T 、履約價格爲 K ，則該歐式選擇權的價格 O 在時間 $t = 0$ 時爲 Black-Scholes 評價公式之凸性組合（convex combination）

$$O=\omega\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left[S_0e^{(\mu-r)T}\Phi\left(\omega\frac{\ln\frac{S_0}{K}+\left(\mu+\frac{1}{2}\eta_i^2\right)T}{\eta_i\sqrt{T}}\right)-Ke^{-rT}\Phi\left(\omega\frac{\ln\frac{S_0}{K}+\left(\mu-\frac{1}{2}\eta_i^2\right)T}{\eta_i\sqrt{T}}\right)\right]$$

其中$\omega=1$表示買權，$\omega=-1$表示賣權且

$$\eta_i=\frac{V_i(T)}{\sqrt{T}}=\sqrt{\frac{\int_0^T\sigma_i^2(u)du}{T}}$$

由 Brigo 與 Mercurio 所提出的歐式選擇權評價公式中可以發現，該評價公式爲大家所熟悉的 Black-Scholes 評價公式之凸性組合，除了運算上的方便之外，該評價公式也提供了許多參數來幫助實務上的校準，且所提供的參數亦爲時間的明確函數，比起位移 CEV 過程與位移對數常態過程來說，提供了更大的校準彈性。

因此，本文利用台指買權來實證 Brigo 與 Mercurio 所提出的三種歐式選擇權評價公式，我們想了解這三種評價公式，是否能有效校準一序列的台指買權，而相關的實證結果將在第四章詳述。