第三章　主要理論介紹

爲了讓資產價格過程更加符合真實世界，本章將完整介紹 Brigo 與 Mercurio（2001）所提出的三種新資產價格過程，分別是位移 CEV 過程、位移對數常態過程與混合對數常態過程，與其所推導出之歐式選擇權評價公式，且這三種過程分別提供不同的參數來幫助實務上的校準，讓選擇權的評價能夠更加準確。

3.1 取代資產價格過程

假設 S 爲資產價格的過程，r 爲利率且爲一大於零的常數。若我們假設資產價格在風險中立的測度之下，則我們可以得到資產價格的動態過程

$$dS_t = \mu S_t dt + \nu(t, S_t) dW_t \tag{3.1}$$

其中 S_0 爲給定且明確的，W 爲一標準布朗運動，ν 是時間 t 與資產價格 S_t 的平滑函數，μ 爲風險中立下過程 S 的漂移率（drift rate）且爲一實數。舉例來說，假如資產爲股票且該股票支付連續股利率 q，則 $\mu = r - q$。假如資產爲外匯，則 $\mu = r - r_f$，其中 r_f 爲外國之無風險利率。

我們想要利用一個仿射變換（affine transformation）來決定擴散係數（diffusion coefficient）ν，該變換是藉由一個擴散過程（diffusion process）X 來決定資產過程 S，其中 X 的邊際密度函數爲已知的。而資產過程 S 的邊際密度函數將透過位移過程 X 的邊際密度函數來得到。我們想要找到明確的時間函數 a 與 b 使得

$$S_t = a_t + b_t X_t$$

其中過程 X 滿足

$$dX_t = \varphi(t, X_t) dt + \psi(t, X_t) dW_t$$

且 φ 與 ψ 爲正規函數（regular function）使得 X 的邊際密度函數爲已知。

藉由 Ito 引理，我們可以得到

$$dS_t = \left[a_t' + b_t' X_t + b_t \varphi(t, X_t)\right] dt + b_t \psi(t, X_t) dW_t \tag{3.2}$$

其中 ´ 表示對時間 t 的微分。與 (3.1) 式比較，我們可以得到函數 a 與 b 必需滿足

$$a_t' + b_t' X_t + b_t \varphi(t, X_t) = \mu S_t \tag{3.3}$$

爲了讓條件 (3.3) 式更加清楚，我們考慮過程 X 爲 Cox（1975）所提出的一般化候選 CEV 過程

$$dX_t = \gamma_t X_t dt + \eta_t X_t^{\rho} dW_t \tag{3.4}$$

其中 γ_t 與 η_t 爲時間的明確函數，ρ 爲 $\left[1/2, 1\right]$ 之間的實數。在此，我們假設 $\gamma_t \geq 0$ 。

在模型 (3.4) 式之下，資產價格過程 (3.2) 式變成

$$dS_t = \left[a_t' - a_t \left(\frac{b_t'}{b_t} + \gamma_t \right) + \left(\frac{b_t'}{b_t} + \gamma_t \right) S_t \right] dt + b_t \eta_t \left(\frac{S_t - a_t}{b_t} \right)^{\rho} dW_t \tag{3.5}$$

使得條件 (3.3) 式等價於

$$\begin{cases} a_t' - a_t \left(\dfrac{b_t'}{b_t} + \gamma_t \right) = 0 \\ \dfrac{b_t'}{b_t} + \gamma_t = \mu \end{cases}$$

而其解爲

$$\begin{cases} a_t = a_0 e^{\mu t} \\ b_t = b_0 e^{\int_0^t (\mu - \gamma_u) du} \end{cases}$$

其中 a_0 與 b_0 爲任意的實數常數。在不失一般性的情況下，我們可以假設在任一時間點 t 時，$b_t = 1$ 。因此，我們得到資產價格的動態過程如下

$$dS_t = \mu S_t dt + \eta_t (S_t - a_t)^{\rho} dW_t \tag{3.6}$$

事實上，當 b 是更一般的情況時，我們可以把它合併到 η 中。

3.1.1 明確係數下的位移 CEV 過程

我們現在假設，在任一時間點t時，η_t爲一常數且等於η。同時，我們也假設$\rho \neq 1$，這是爲了避免資產價格爲對數常態分配。在此前提下，Brigo 與 Mercurio（2001）推導出資產價格的邊際密度函數如下：

定理 3.1

假設令$\alpha = a_0$，則隨機微分方程（SDE）(3.6) 式將存在唯一的強解

$$S_t = P_t + \alpha e^{\mu t} \text{ ， } t \geq 0 \tag{3.7}$$

其中P是一個 CEV 過程

$$dP_t = \mu P_t dt + \eta P_t^{\rho} dW_t \tag{3.8}$$

此外，在給定S_t，$t < T$之下，S_T的條件密度函數爲

$$p_{S_T|S_t}(x) = 2(1-\rho)k^{1/(2-2\rho)}(uw^{1-4\rho})^{1/(4-4\rho)}e^{-u-w}I_{1/(2-2\rho)}(2\sqrt{uw}) \tag{3.9}$$

其中

$$\begin{aligned} k &= \frac{\mu}{\eta^2(1-\rho)[e^{2\mu(1-\rho)(T-t)}-1]} \\ u &= k(S_t - \alpha e^{\mu t})^{2(1-\rho)}e^{2\mu(1-\rho)(T-t)} \\ w &= k(x-\alpha e^{\mu T})^{2(1-\rho)} \end{aligned} \tag{3.10}$$

且I_q爲修正的q階第一類型 Bessel 函數。

定義$g(y,z) = \dfrac{e^{-z}z^{y-1}}{\Gamma(y)}$爲一 gamma 密度函數且$G(y,x) = \int_x^{+\infty} g(y,z)dz$爲 gamma 累積分配函數的補集，則在資產價格的動態過程爲(3.7)式下，Brigo 與 Mercurio（2001）推導出到期日爲T、履約價格爲K的無套利歐式買權評價公式如下：

定理 3.2

在資產價格的動態過程爲(3.7)式下，考慮一個歐式買權，其到期日爲T、履約價格爲K，則在$\alpha e^{\mu T} < K$的假設之下，歐式買權的價格C_t在任意時間點$t < T$爲

$$C_t = (S_t - \alpha e^{\mu t})e^{(\mu - r)(T-t)}\sum_{n=0}^{+\infty} g(n+1,u)G\left(\xi, k(K-\alpha e^{\mu T})^{2(1-\rho)}\right)$$
$$-(K-\alpha e^{\mu T})e^{-r(T-t)}\sum_{n=0}^{+\infty} g(\xi,u)G\left(n+1, k(K-\alpha e^{\mu T})^{2(1-\rho)}\right) \qquad (3.11)$$

其中k與u爲(3.10)式中之定義，$\xi = n+1+\dfrac{1}{2(1-\rho)}$。

由選擇權評價公式(3.11)式所求得的隱含波動度結構會呈現傾斜的狀態，且該評價公式提供三個參數α、η與ρ，讓我們能夠配適市場的波動度結構。

3.1.2 位移對數常態過程

在本節，我們考慮一個特殊的情況，假設過程X在風險中立測度之下爲幾何布朗運動

$$dX_t = \mu X_t dt + \beta_t X_t dW_t \qquad (3.12)$$

使得資產價格$S_t = X_t + \alpha e^{\mu t}$，則在風險中立測度之下，資產價格的動態過程爲

$$dS_t = \mu S_t dt + \beta_t (S_t - \alpha e^{\mu t})dW_t \qquad (3.13)$$

由以上假設，Brigo 與 Mercurio（2001）推導出資產價格的邊際密度函數如下：

定理 3.3

根據(3.13)式，資產價格 S 能夠被明確的寫成

$$S_t = \alpha e^{\mu t} + (S_0 - \alpha) e^{\int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2}\beta_u^2\right) du + \int_0^t \beta_u dW_u} \tag{3.14}$$

且在給定 S_t ， $t < T$ 之下， S_T 的條件密度函數為位移的對數常態分配

$$p_{S_T|S_t}(x) = \frac{1}{(x - \alpha e^{\mu T}) V_t \sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x - \alpha e^{\mu T}) - M_t}{V_t} \right)^2 \right\} \text{，} \ x > \alpha e^{\mu T} \tag{3.15}$$

其中

$$\begin{aligned} M_t &= \ln(S_t - \alpha e^{\mu t}) + \int_t^T \left(\mu - \frac{1}{2}\beta_u^2 \right) du \\ V_t &= \sqrt{\int_t^T \beta_u^2 du} \end{aligned} \tag{3.16}$$

在資產價格的動態過程為(3.14)式下，Brigo 與 Mercurio（2001）推導出到期日為 T ，履約價格為 K 的歐式選擇權價公式如下：

定理 3.4

在資產價格的動態過程為(3.14)式下，考慮一個歐式選擇權，其到期日為 T 、履約價格為 K，則在 $\alpha e^{\mu T} < K$ 的假設之下，歐式選擇權的價格 O_t 在任意時間點 $t < T$ 為

$$\begin{aligned} O_t = \omega &\left[(S_t - \alpha e^{\mu t}) e^{(\mu - r)(T-t)} \Phi\left(\omega \frac{\ln \frac{S_t - \alpha e^{\mu t}}{K - \alpha e^{\mu T}} + \mu(T-t) + \frac{1}{2} V_t^2}{V_t} \right) \right] \\ &- \omega \left[(K - \alpha e^{\mu T}) e^{-r(T-t)} \Phi\left(\omega \frac{\ln \frac{S_t - \alpha e^{\mu t}}{K - \alpha e^{\mu T}} + \mu(T-t) - \frac{1}{2} V_t^2}{V_t} \right) \right] \end{aligned} \tag{3.17}$$

其中 $\omega = 1$ 表示買權， $\omega = -1$ 表示賣權，且 Φ 表示標準常態分配累積函數。

仔細觀察選擇權評價公式(3.17)式，可以發現，它其實就是 Black-Scholes 的選擇權評價公式，只不過現在的資產價格改爲 $S_t-\alpha e^{\mu t}$ ，履約價格改爲 $K-\alpha e^{\mu T}$ ，而波動度改爲 $\sqrt{\frac{1}{T-t}\int_t^T \beta_u^2 du}$ 。

模型(3.13)是一個簡單的 Black-Scholes 模型的推廣，同時由選擇權評價公式(3.17)式所求得的隱含波動度結構亦呈現傾斜的狀態。雖然該評價公式比(3.11)式少了一個參數（因爲 $\rho=1$ ），但是 β_t 爲時間 t 的明確函數，依然讓我們能夠配適市場的波動度結構。

3.2 一般化混合動態過程

在本節，我們考慮一個新的資產價格動態過程，以期許能夠更符合一般化的波動度結構，即假設在風險中立測度之下，資產價格 S 的邊際密度函數是某些已知的擴散過程的邊際密度函數的加權平均。

在風險中立測度之下，考慮 N 個擴散過程

$$dS_t^i=\mu S_t^i dt+\upsilon_i(t,S_t^i)dW_t \text{ ， } i=1,\ldots,N \tag{3.18}$$

其中起始值給定爲 S_0^i ，W 爲在風險中立測度 Q 之下的標準布朗運動， $\upsilon_i(t,y)$ 爲實值函數且滿足正規條件（regularity conditions）以保證隨機微分方程(3.18)式存在唯一解。Brigo 與 Mercurio（2001）假設存在一個適當的 $L_i>0$ ，使得以下線性增長條件成立

$$\upsilon_i^2(t,y)\le L_i(1+y^2) \tag{3.19}$$

對於每個時間點 t ，定義 $p_t^i(\cdot)$ 爲 S_t^i 的密度函數，也就是 $p_t^i(y)=d\left(Q\left\{S_i^t\le y\right\}\right)/dy$ ，

其中 $p_0^i(y)$ 爲中心在 S_0^i 的 $\delta-$Dirac 函數。

Brigo 與 Mercurio（2001）亦假設在風險中立測度 Q 之下，資產價格 S 的動態過程爲

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma(t, S_t) S_t dW_t \tag{3.20}$$

且存在一個適當的 $L > 0$ ，使得 $\sigma(\cdot,\cdot)$ 滿足線性增長條件

$$\sigma^2(t, y) y^2 \le L(1 + y^2) \tag{3.21}$$

該線性增長條件能保證(3.20)式存在一個強解。此外，σ 亦滿足局部 Lipschitz 條件（local Lipschitz condition）以保證(3.20)式解的唯一性。

現在想要克服的問題是，如何導出局部波動度（local volatility）$\sigma(t, S_t)$ 使得在風險中立測度之下，資產價格 S 的密度函數會滿足

$$p_t(y) = \frac{d}{dy} Q\left\{S_t \le y\right\} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \frac{d}{dy} Q\left\{S_t^i \le y\right\} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_t^i(y) \tag{3.22}$$

其中令每一個 $S_0^i = S_0$ ，且每一個 λ_i 爲大於零的常數並滿足 $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$ 。

$\sigma(t, S_t)$ 能夠藉由求解 Fokker-Planck 方程（Fokker-Planck equation）來得到

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(y) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu y p_t(y)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma^2(t, y) y^2 p_t(y)\right) \tag{3.23}$$

同時每一個密度函數 $p_t^i(y)$ 亦滿足自身的 Fokker-Planck 方程

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t^i(y) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu y p_t^i(y)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\upsilon_i^2(t, y) p_t^i(y)\right) \tag{3.24}$$

應用(3.22)式與微分的線性運算，(3.23)式可以被改寫成

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \frac{\partial}{\partial t} p_t^i(y) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left[-\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu y p_t^i(y)\right)\right] + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma^2(t, y) y^2 p_t^i(y)\right)\right]$$

將之與(3.24)式比較可以得到

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\upsilon_i^2(t,y)p_t^i(y)\right)\right]=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma^2(t,y)y^2p_t^i(y)\right)\right]$$

再次應用微分的線性運算可得到

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\upsilon_i^2(t,y)p_t^i(y)\right]=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\sigma^2(t,y)y^2\sum_{i=1}^{N}\lambda_i p_t^i(y)\right]$$

若將上式視爲$\sigma(t,\cdot)$的二階微分方程，則可以得到該方程的一般解

$$\sigma^2(t,y)y^2\sum_{i=1}^{N}\lambda_i p_t^i(y)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\upsilon_i^2(t,y)p_t^i(y)+A_t y+B_t \tag{3.25}$$

其中A與B爲時間的實值函數。

Brigo 與 Mercurio（2001）指出在正規條件(3.19)式與(3.21)式之下，當$y\to\infty$時，(3.25)式的左式極限爲零，因此(3.25)式的右式極限亦須爲零，所以對任意時間點t，$A_t=B_t=0$。因此，對$(t,y)>(0,0)$，我們得到了$\sigma(t,y)$的表示式如下：

$$\sigma(t,y)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\upsilon_i^2(t,y)p_t^i(y)}{\sum_{i=1}^{N}\lambda_i y^2 p_t^i(y)}} \tag{3.26}$$

若對$i=1,\dots,N$與$(t,y)>(0,0)$，令

$$\Lambda_i(t,y)=\frac{\lambda_i p_t^i(y)}{\sum_{i=1}^{N}\lambda_i p_t^i(y)} \tag{3.27}$$

則(3.26)式可以改寫成

$$\sigma^2(t,y)=\sum_{i=1}^{N}\Lambda_i(t,y)\frac{\upsilon_i^2(t,y)}{y^2} \tag{3.28}$$

使得波動度σ的平方是過程(3.18)式中波動度的平方的凸性組合，也就是對任意的(t,y)與i，$\Lambda_i(t,y)\ge 0$且$\sum_{i=1}^{N}\Lambda_i(t,y)=1$。此外，藉由(3.19)式與令$L=\max_{i=1,\dots N}L_i$，正規條件(3.21)依然成立，因爲

$$\sigma^2(t,y)y^2=\sum_{i=1}^{N}\Lambda_i(t,y)\upsilon_i^2(t,y)\le\sum_{i=1}^{N}\Lambda_i(t,y)L_i(1+y^2)\le L(1+y^2)$$

因此，在風險中立測度Q之下，(3.26) 式將導致以下的資產價格動態過程

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \upsilon_i^2(t, S_t) p_t^i(S_t)}{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i S_t^2 p_t^i(S_t)}} S_t dW_t \tag{3.29}$$

且該過程的邊際密度函數將滿足 (3.22) 式。在資產過程爲 (3.29) 式之下，考慮一個歐式選擇權，其到期日爲T、履約價格爲K，則該歐式選擇權的價格O在時間$t=0$時爲

$$\begin{aligned} O &= e^{-rT} E^Q \left\{ \left[\omega(S_T - K) \right]^+ \right\} \\ &= e^{-rT} \int_0^{+\infty} \left[\omega(S_T - K) \right]^+ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_T^i(y) dy \\ &= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e^{-rT} \int_0^{+\infty} \left[\omega(S_T - K) \right]^+ p_T^i(y) dy \\ &= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i O_i \end{aligned} \tag{3.30}$$

其中E^Q爲在測度Q之下的期望值，O_i表示由 (3.18) 式所引導出的選擇權價格，$\omega = 1$表示買權，$\omega = -1$表示賣權。

3.2.1 混合對數常態過程

在本節，我們考慮一個特別的過程，也就是所有的過程S^i皆爲對數常態分配，亦即我們假設對所有的i

$$\upsilon_i(t, y) = \sigma_i(t) y \tag{3.31}$$

則在給定S_0之下，S^i的邊際密度函數爲

$$\begin{aligned} p_t^i(y) &= \frac{1}{y V_i(t) \sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2V_i^2(t)} \left[\ln\frac{y}{S_0} - \mu t + \frac{1}{2} V_i^2 \right]^2 \right\} \\ V_i(t) &= \sqrt{\int_0^t \sigma_i^2(u) du} \end{aligned} \tag{3.32}$$

Brigo 與 Mercurio（2001）更進一步得到以下結果：

定理 3.5

對 $i=1,\ldots,N$，假設 σ_i 是連續的且存在 $\varepsilon>0$，使得當 t 介於 $[0,\varepsilon]$ 時，$\sigma_i(t)=\sigma_0>0$。當 $(t,y)>(0,0)$ 時，若令

$$\sigma(t,y)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\sigma_i^2(t)\frac{1}{V_i(t)}\exp\left\{-\frac{1}{2V_i^2(t)}\left[\ln\frac{y}{S_0}-\mu t+\frac{1}{2}V_i^2(t)\right]^2\right\}}{\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\frac{1}{V_i(t)}\exp\left\{-\frac{1}{2V_i^2(t)}\left[\ln\frac{y}{S_0}-\mu t+\frac{1}{2}V_i^2(t)\right]^2\right\}}} \tag{3.33}$$

其中當 $(t,y)=(0,S_0)$ 時，$\sigma(t,y)=\sigma_0$，則隨機微分方程(3.20)式將有唯一強解且其邊際密度函數爲混合對數常態分配

$$p_t(y)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\frac{1}{yV_i(t)\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2V_i^2(t)}\left[\ln\frac{y}{S_0}-\mu t+\frac{1}{2}V_i^2(t)\right]^2\right\} \tag{3.34}$$

此外，當 $(t,y)>(0,0)$ 時，可得到

$$\sigma^2(t,y)=\sum_{i=1}^{N}\Lambda_i(t,y)\sigma_i^2(t) \tag{3.35}$$

其中對每一個 (t,y) 與 i ，$\Lambda_i(t,y)\geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^{N}\Lambda_i(t,y)=1$。最後一個結果是，對每一個 t 、 $y>0$

$$0<\tilde{\sigma}\leq\sigma(t,y)\leq\hat{\sigma}<+\infty \tag{3.36}$$

其中

$$\tilde{\sigma}=\inf_{t\geq 0}\left\{\min_{i=1,\ldots,N}\sigma_i(t)\right\}$$
$$\hat{\sigma}=\sup_{t\geq 0}\left\{\max_{i=1,\ldots,N}\sigma_i(t)\right\}$$

假設一個歐式選擇權的標的資產過程爲(3.20)式且滿足(3.33)式，Brigo 與 Mercurio（2001）推導出到期日爲 T ，履約價格爲 K 的歐式選擇權價公式如下：

定理 3.6

考慮一個歐式選擇權，其到期日爲T、履約價格爲K，則該歐式選擇權的價格O在時間$t=0$時爲 Black-Scholes 評價公式之凸性組合

$$O=\omega\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left[S_0e^{(\mu-r)T}\Phi\left(\omega\frac{\ln\frac{S_0}{K}+\left(\mu+\frac{1}{2}\eta_i^2\right)T}{\eta_i\sqrt{T}}\right)-Ke^{-rT}\Phi\left(\omega\frac{\ln\frac{S_0}{K}+\left(\mu-\frac{1}{2}\eta_i^2\right)T}{\eta_i\sqrt{T}}\right)\right] \tag{3.37}$$

其中$\omega=1$表示買權，$\omega=-1$表示賣權且

$$\eta_i=\frac{V_i(T)}{\sqrt{T}}=\sqrt{\frac{\int_0^T\sigma_i^2(u)du}{T}} \tag{3.38}$$

由選擇權評價公式(3.37)式所求得的隱含波動度結構將會呈現微笑的狀態，且當履約價格等於資產的遠期價格（forward price）$S_0e^{\mu T}$時，會有最小的隱含波動度。同時，該選擇權評價模型亦提供了許多參數讓我們能夠配適市場的波動度結構。