第四章　實證研究

本章將探討第三章所介紹的三種歐式選擇權評價公式，分別是 (3.11) 式、(3.17) 式與 (3.37) 式，並以台指買權為實證對象。根據台灣期貨交易所網站所提供的選擇權每日交易簡表，買權的標的資產為台灣股票市場加權股價指數，收集 2004 年起至 2008 年 8 月之間的歷史資料，共有 1153 個交易日。我們以台指買權的最後成交價為市場價格，選取交易量大於 10000 且最接近到期日的買權序列。在校準時，我們將採用最小相對誤差平方和為準則來進行參數選取。

4.1 位移 CEV 過程校準結果

在本節，我們假設股價加權指數 S 的過程為 (3.7) 式

$$S_t = P_t + \alpha e^{\mu t} \text{，} t \geq 0$$

其中 P 是一個 CEV 過程

$$dP_t = \mu P_t dt + \eta P_t^{\rho} dW_t$$

在此假之下，考慮一個歐式買權，其到期日為 T 、履約價格為 K ，且在 $\alpha e^{\mu T} < K$ 的條件之下，歐式買權的理論價格 C_t 在任意時間點 $t < T$ 為 (3.11) 式

$$C_t = (S_t - \alpha e^{\mu t}) e^{(\mu - r)(T-t)} \sum_{n=0}^{+\infty} g(n+1, u) G\left(\xi, k(K - \alpha e^{\mu T})^{2(1-\rho)}\right)$$
$$- (K - \alpha e^{\mu T}) e^{-r(T-t)} \sum_{n=0}^{+\infty} g(\xi, u) G\left(n+1, k(K - \alpha e^{\mu T})^{2(1-\rho)}\right)$$

其中 k 、 u 與 ξ 為 (3.11) 式中之定義。

我們想要找到一組參數 (ρ, α, η) 使得該組參數能配適市場的波動度結構。我們利用以下模型來求解參數 (ρ, α, η) 。首先定義各變數名稱如下：

N：所選取的買權序列個數。

T：買權距離到期日所剩餘的時間。

S_t：在時間點 t 時，股價指數的加權價格，$t<T$。

K_i：買權序列的履約價，$i=1,\ldots,N$。

M_{t,K_i}：在時間點 t 時，履約價爲 K_i 的買權市場價格，$t<T$。

C_{t,K_i}：在時間點 t 時，履約價爲 K_i 的買權理論價格，$t<T$。

r：無風險利率。在此用台灣銀行、合作金庫銀行、第一銀行、華南銀行與彰化銀行五家銀行的一年期固定定存利率之平均。

μ：過程 S 的漂移率。

v_{M,K_i}：當履約價爲 K_i 時，市場的隱含波動度。

v_{C,K_i}：當履約價爲 K_i 時，配適的隱含波動度。

e_i：當履約價爲 K_i 時，理論價格的相對誤差，$e_i=\left|\dfrac{C_{t,K_i}-M_{t,K_i}}{M_{t,K_i}}\right|$。

E_i：當履約價爲 K_i 時，配適的隱含波動度之相對誤差，$E_i=\left|\dfrac{v_{C,K_i}-v_{M,K_i}}{v_{M,K_i}}\right|$。

定義完上述變數後，我們建立非線性規劃模型如下：

$$\min \quad e=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{C_{t,K_i}-M_{t,K_i}}{M_{t,K_i}}\right)^2=\sum_{i=1}^{N}e_i^2$$

$$\text{s.t.} \quad C_{t,K_i}=(S_t-\alpha e^{\mu t})e^{(\mu-r)(T-t)}\sum_{n=0}^{+\infty}g(n+1,u)G\left(\xi,k(K_i-\alpha e^{\mu T})^{2(1-\rho)}\right)$$

$$-(K_i-\alpha e^{\mu T})e^{-r(T-t)}\sum_{n=0}^{+\infty}g(\xi,u)G\left(n+1,k(K_i-\alpha e^{\mu T})^{2(1-\rho)}\right)$$

$$\alpha e^{\mu T}<\min_{i=1,\ldots,N}\left(K_i\right)$$

$$\rho\in\left[1/2,1\right)，\alpha\in\Re，\eta>0$$

爲了求解上的方便，我們假設現在時點$t=0$且漂移率μ等於無風險利率r。在求解參數時，我們以局部搜尋法（local search method）來求解，即先猜測一組可能的參數當作起始解，經過疊代運算之後即可得到答案。以 2008 年 7 月 21 日爲例，將該日的資料輸入 Matlab 軟體所寫成的數學模型求解，並將結果列於表 4-1 與圖 4-1，且求解步驟如下：

Step 1 猜測一組可能的參數爲起始解$y_o=(\rho_0,\alpha_0,\eta_0)$

假如一次變動三個參數，則會增加校準上的困難，因此，我們傾向先固定兩個參數，藉由調整第三個參數來校準。在此，我們先固定ρ_0與η_0。

$\rho_0=0.5$

$\alpha_0=\left[\min_{i=1,\ldots,N}\left(K_i\right)e^{-\mu T}\right]$，其中$[\cdot]$爲高斯符號

$\eta_0=0.6S^{1-\rho_0}$

Step 2 根據 Step 1 的起始解，經過疊代後所得到的解$y=(\rho,\alpha,\eta)$與理論價格的相對誤差平方和$e=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{C_{t,K_i}-M_{t,K_i}}{M_{t,K_i}}\right)^2$。

Step 3 檢視由 Step 2 所得到之理論價格的相對誤差平方和e。若認爲誤差範圍是可接受的，則$y=(\rho,\alpha,\eta)$即爲最佳解，否則將α_0減少100個單位並重複 Step 1。

由於校準位移 CEV 過程需耗費較長久的時間，因此α的變動間隔取的較大些，雖然可能造成準確度降低，但爲了時間效益考量，如此變通是可行的。假如變動α之後還是無法得到滿意的答案，可以嘗試重新調整ρ_0與η_0來改善校準結果。

根據上述步驟，我們得到參數 $\rho = 5.0000\text{e-}1$ 、 $\alpha = 5.5492\text{e+}3$ 與 $\eta = 4.2845\text{e+}1$，且理論價格的相對誤差平方和$e = 4.6615\text{e-}4$，最大相對誤差平方亦只有1.8179e-4，而用該組參數來配適市場的隱含波動度也得到了非常好的結果，配適的隱含波動度之相對誤差平方和爲8.9417e-5，最大相對誤差平方亦只有3.2981e-5。同時我們可以從圖 4-1 中發現，由(3.11) 式所求的隱含波動度，確實呈現傾斜狀態。

表 4-1 位移 CEV 過程之校準結果

S_t	7085.67					
T	31/365（年）					
r	2.72％					
(ρ,α,η)	(5.0000e-1, 5.5492e+3, 4.2845e+1)					
K_i	M_{t,K_i}	C_{t,K_i}	e_i^2	v_{M,K_i}	v_{C,K_i}	E_i^2
7100	195	1.9549e+2	6.2133e-6	2.3554e-1	2.3613e-1	6.2844e-6
7200	153	1.5256e+2	8.1668e-6	2.3879e-1	2.3826e-1	5.0719e-6
7300	118	1.1715e+2	5.1391e-5	2.4134e-1	2.4025e-1	2.0557e-5
7400	89	8.8540e+1	2.6667e-5	2.4277e-1	2.4212e-1	7.1177e-6
7500	65	6.5876e+1	1.8179e-4	2.4248e-1	2.4388e-1	3.2981e-5
7600	48.5	4.8270e+1	2.2564e-5	2.4595e-1	2.4553e-1	2.9613e-6
7700	34.5	3.4845e+1	1.0000e-4	2.4634e-1	2.4709e-1	9.4474e-6
7800	25	2.4792e+1	6.9395e-5	2.4912e-1	2.4857e-1	4.9962e-6
相對誤差平方和			4.6615e-4			8.9417e-5

註 1、 C_{t,K_i} 爲根據參數$(\rho,\alpha,\eta) = (5.0000\text{e-}1,\ 5.5492\text{e+}3,\ 4.2845\text{e+}1)$所計算出來的理論價格。

2、 v_{M,K_i} 爲當市場價格爲 M_{t,K_i} ，利用 Black-Scholes 選擇權評價公式所求得之市場隱含波動度。

3、 v_{C,K_i} 爲當理論價格爲 C_{t,K_i} ，利用 Black-Scholes 選擇權評價公式所求得之配適的隱含波動度。

圖 4-1 位移 CEV 過程之市場與配適的波動度之比較

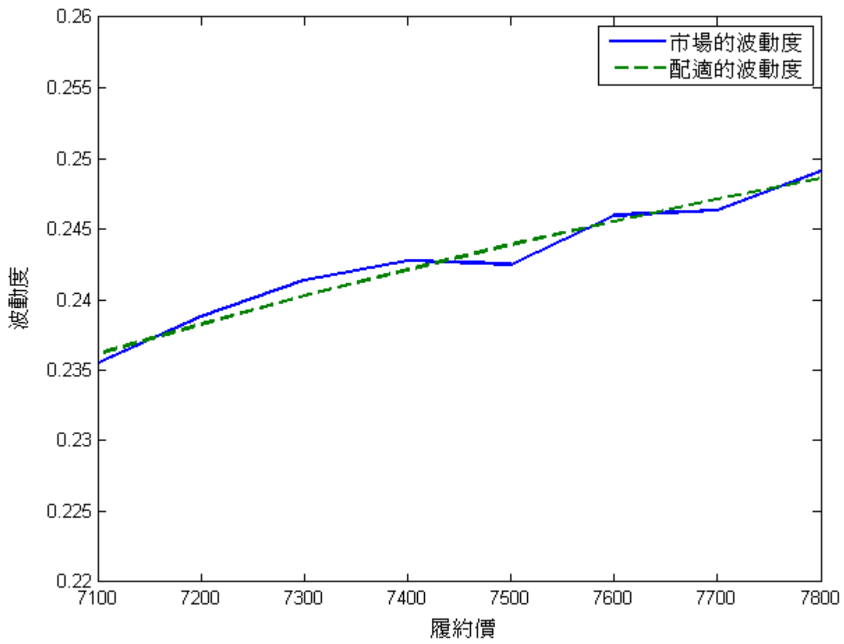

表 4-2 整理出從 2004 年起至 2008 年 8 月之間的每月平均校準結果：

表 4-2 位移 CEV 過程之每月平均校準結果

月份	2004 年	2005 年	2006 年	2007 年	2008 年
1 月	6.5277e-003	1.0057e-002	1.1864e-001	1.2522e-001	9.2636e-002
2 月	5.6766e-003	2.1162e-003	9.6630e-003	2.7077e-002	7.5080e-002
3 月	1.6933e-001	1.9622e-002	2.8663e-003	9.4454e-002	4.3966e-002
4 月	6.4393e-003	1.2857e-002	3.1855e-002	4.6364e-002	1.6081e-002
5 月	1.7262e-002	2.2218e-003	1.1181e-001	8.7739e-002	2.0066e-001
6 月	8.3745e-003	2.8072e-003	6.8390e-002	1.9987e-002	1.9901e-002
7 月	1.1364e-003	9.0418e-003	3.8051e-002	4.7852e-002	1.3609e-001
8 月	8.4512e-004	6.5054e-002	8.6725e-003	1.1813e-001	2.3721e-002
9 月	4.3795e-003	4.9017e-002	2.8751e-002	3.3447e-002	
10 月	1.4539e-002	2.3198e-001	4.3443e-002	4.4116e-002	
11 月	8.6711e-003	6.6219e-003	3.7298e-002	1.2222e-001	
12 月	1.2022e-002	1.4914e-002	5.8392e-002	8.0266e-002	
年平均	2.2712e-002	3.5669e-002	4.5731e-002	7.4175e-002	7.6528e-002

（表格內的數字爲理論價格的相對誤差平方和）

4.2 位移對數常態過程校準結果

在本節，我們假設股價加權指數 S 的過程爲 (3.13) 式

$$dS_t = \mu S_t dt + \beta_t (S_t - \alpha e^{\mu t}) dW_t$$

在此假之下，考慮一個歐式買權，其到期日爲 T 、履約價格爲 K ，且在 $\alpha e^{\mu T} < K$ 的條件之下，歐式買權的理論價格 C_t 在任意時間點 $t < T$ 爲 (3.17) 式

$$C_t = (S_t - \alpha e^{\mu t}) e^{(\mu - r)(T-t)} \Phi\left(\frac{\ln \dfrac{S_t - \alpha e^{\mu t}}{K - \alpha e^{\mu T}} + \mu(T-t) + \dfrac{1}{2} V_t^2}{V_t} \right)$$

$$-(K - \alpha e^{\mu T}) e^{-r(T-t)} \Phi\left(\frac{\ln \dfrac{S_t - \alpha e^{\mu t}}{K - \alpha e^{\mu T}} + \mu(T-t) - \dfrac{1}{2} V_t^2}{V_t} \right)$$

其中 Φ 表示標準常態分配累積函數，且 $V_t = \sqrt{\int_t^T \beta_u^2 du}$ 。

我們建立以下非線性規劃模型來求解參數 (α, β_t) ：

$$\min \quad e = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{C_{t,K_i} - M_{t,K_i}}{M_{t,K_i}} \right)^2 = \sum_{i=1}^{N} e_i^2$$

$$\text{s.t.} \quad C_{t,K_i} = (S_t - \alpha e^{\mu t}) e^{(\mu - r)(T-t)} \Phi\left(\frac{\ln \dfrac{S_t - \alpha e^{\mu t}}{K_i - \alpha e^{\mu T}} + \mu(T-t) + \dfrac{1}{2} V_t^2}{V_t} \right)$$

$$-(K_i - \alpha e^{\mu T}) e^{-r(T-t)} \Phi\left(\frac{\ln \dfrac{S_t - \alpha e^{\mu t}}{K_i - \alpha e^{\mu T}} + \mu(T-t) - \dfrac{1}{2} V_t^2}{V_t} \right)$$

$$\alpha e^{\mu T} < \min_{i=1,\ldots,N} \left(K_i \right)$$

$$\alpha \in \Re \text{ ， } \beta_t > 0$$

其中各變數之定義如 4.1 節中所述。

爲了求解上的方便，我們假設現在時點$t=0$、漂移率μ等於無風險利率r且在買權的存續期間內$\beta_t=\beta$爲一固定常數。我們將以局部搜尋法來求解參數(α,β)。以 2008 年 7 月 21 日爲例，將該日的資料輸入 Matlab 軟體所寫成的數學模型求解，並將結果列於表 4-3 與圖 4-2 且求解步驟如下：

Step 1 先利用觀察到的市場價格M_{t,K_i}，反求市場的隱含波動度，並判斷市場的隱含波動度結構爲左高右低傾斜，或爲左低右高傾斜，或爲微笑狀態。

Step 2 猜測一組可能的參數爲起始解$y_o=(\alpha_0,\beta_0)$

爲了降低校準上的困難，在此，我們先固定$\beta_0=60\ \%$（或者以買權序列的隱含波動度之平均取代）。

a、當隱含波動度結構爲左低右高傾斜，或爲微笑狀態時

$\alpha_0=\left[\min\limits_{i=1,\ldots,N}\left(K_i\right)e^{-\mu T}\right]$，其中$[\cdot]$爲高斯符號

b、當隱含波動度結構爲左高右低傾斜時

$\alpha_0=0$

Step 3 根據 Step 2 的起始解，經過疊代後所得到的解$y=(\alpha,\beta)$與理論價格的相對誤差平方和$e=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{C_{t,K_i}-M_{t,K_i}}{M_{t,K_i}}\right)^2$。

Step 4 檢視由 Step 3 所得到之理論價格的相對誤差平方和e。若認爲誤差範圍是可接受的，則$y=(\alpha,\beta)$即爲我們的最佳解，否則將α_0減少 1 個單位並重複 Step 2。

由於在校準位移對數常態過程時，所需時間比位移 CEV 過程縮短不少，因此在α的變動間隔以 1 爲單位。假如變動α之後還是無法得到滿意的答案，可以嘗試重新調整β_0來改善校準結果。

根據上述步驟，我們得到參數$\alpha = 3.7772\text{e+3}$與$\beta = 5.0707\text{e+1}$，且理論價格的相對誤差平方和$e = 4.3392\text{e-4}$，最大相對誤差平方亦只有1.5233e-4，而用該組參數來配適市場的隱含波動度也得到了非常好的結果，配適的隱含波動度之相對誤差平方和爲9.4726e-5，最大相對誤差平方亦只有2.7644e-5。同時我們可以從圖 4-2 中發現，由(3.17)式所求的隱含波動度，確實呈現傾斜狀態。

表 4-3 位移對數常態過程之校準結果

S_t	7085.67					
T	31/365（年）					
r	2.72％					
(α, β)	(3.7772e+3, 5.0707e+1)					
K_i	M_{t,K_i}	C_{t,K_i}	e_i^2	v_{M,K_i}	v_{C,K_i}	E_i^2
7100	195	1.9584e+2	1.8450e-5	2.3554e-1	2.3656e-1	1.8661e-5
7200	153	1.5271e+2	3.6958e-6	2.3879e-1	2.3843e-1	2.2952e-6
7300	118	1.1716e+2	5.0649e-5	2.4134e-1	2.4026e-1	2.0260e-5
7400	89	8.8479e+1	3.4321e-5	2.4277e-1	2.4203e-1	9.1618e-6
7500	65	6.5802e+1	1.5233e-4	2.4248e-1	2.4376e-1	2.7644e-5
7600	48.5	4.8220e+1	3.3276e-5	2.4595e-1	2.4544e-1	4.3686e-6
7700	34.5	3.4839e+1	9.6606e-5	2.4634e-1	2.4708e-1	9.1272e-6
7800	25	2.4833e+1	4.4591e-5	2.4912e-1	2.4868e-1	3.2079e-6
相對誤差平方和			4.3392e-4			9.4726e-5

註 1、C_{t,K_i} 爲根據參數$(\alpha, \beta) = (3.7772\text{e+3}, 5.0707\text{e+1})$所計算出來的理論價格。

2、v_{M,K_i} 爲當市場價格爲M_{t,K_i}，利用 Black-Scholes 選擇權評價公式所求得之市場隱含波動度。

3、v_{C,K_i} 爲當理論價格爲C_{t,K_i}，利用 Black-Scholes 選擇權評價公式所求得之配適的隱含波動度。

圖 4-2 位移對數常態過程之市場與配適的波動度之比較

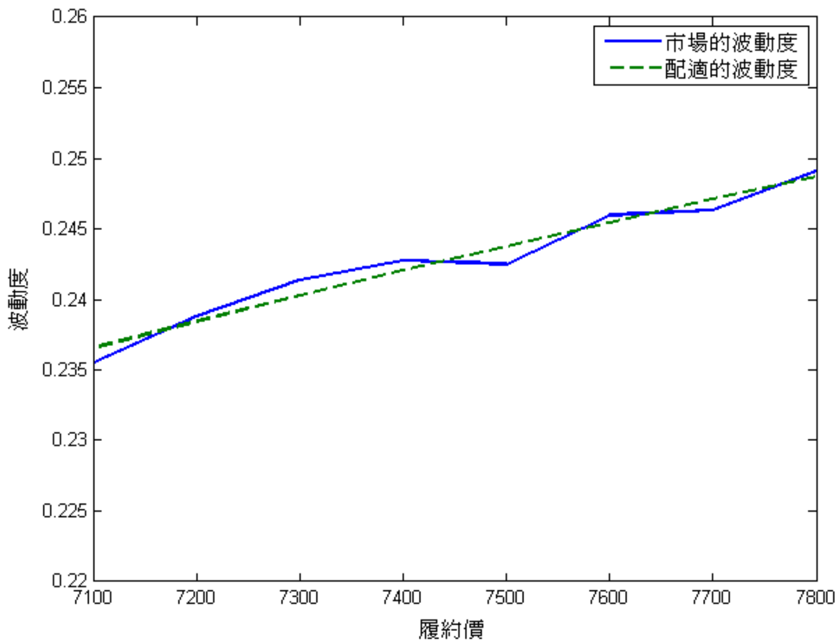

表 4-4 整理出從 2004 年起至 2008 年 8 月之間的每月平均校準結果：

表 4-4 位移對數常態過程之每月平均校準結果

月份	2004 年	2005 年	2006 年	2007 年	2008 年
1 月	4.1264e-003	5.2701e-002	1.2517e-001	1.2523e-001	1.0314e-001
2 月	4.2823e-003	1.4032e-003	2.9647e-002	2.1710e-002	7.1468e-002
3 月	1.8796e-001	4.1099e-002	5.4527e-003	1.7569e-001	3.6627e-002
4 月	4.5446e-003	3.2705e-002	4.5817e-002	4.6709e-002	1.3355e-002
5 月	1.9522e-002	1.5331e-002	1.3758e-001	9.9960e-002	2.2000e-001
6 月	1.1262e-002	1.6002e-002	9.6257e-002	1.7544e-002	4.7682e-002
7 月	1.4876e-003	3.2651e-002	7.6913e-002	7.9234e-002	2.4118e-001
8 月	6.2608e-004	9.1686e-002	7.5095e-003	1.2250e-001	2.6710e-002
9 月	3.1495e-003	9.2290e-002	2.3198e-002	2.4860e-002	
10 月	2.2750e-002	2.6854e-001	5.0250e-002	4.1851e-002	
11 月	7.3853e-003	6.2286e-003	4.8228e-002	1.3131e-001	
12 月	1.9562e-002	1.0238e-002	7.5670e-002	9.1986e-002	
年平均	2.5583e-002	5.5626e-002	5.9234e-002	8.6725e-002	9.6979e-002

（表格內的數字為理論價格的相對誤差平方和）

4.3 混合對數常態過程校準結果

在本節，我們假設股價加權指數 S 的過程爲(3.20) 式

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma(t, S_t) dW_t$$

其中

$$\sigma(t, S_t) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i^2(t) \frac{1}{V_i(t)} \exp\left\{-\frac{1}{2V_i^2(t)}\left[\ln\frac{S_t}{S_0} - \mu t + \frac{1}{2}V_i^2(t)\right]^2\right\}}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{1}{V_i(t)} \exp\left\{-\frac{1}{2V_i^2(t)}\left[\ln\frac{S_t}{S_0} - \mu t + \frac{1}{2}V_i^2(t)\right]^2\right\}}}$$

且

$$V_i(t) = \sqrt{\int_0^t \sigma_i^2(u) du}$$

在此假之下，考慮一個歐式買權，其到期日爲 T 、履約價格爲 K ，則該歐式買權的理論價格 C_t 在時間點 $t < T$ 爲(3.37) 式

$$C_t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[S_0 e^{(\mu - r)(T-t)} \Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + \left(\mu + \frac{1}{2}\eta_i^2\right)(T-t)}{\eta_i \sqrt{T-t}} \right) - K e^{-r(T-t)} \Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + \left(\mu - \frac{1}{2}\eta_i^2\right)(T-t)}{\eta_i \sqrt{T-t}} \right) \right]$$

其中

$$\eta_i = \frac{V_i(T-t)}{\sqrt{T-t}} = \sqrt{\frac{\int_t^T \sigma_i^2(u) du}{T-t}}$$

我們建立以下非線性規劃模型來求解參數(λ_i,σ_i)，$i=1,\ldots,n$：

$$\min \quad e=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{C_{t,K_i}-M_{t,K_i}}{M_{t,K_i}}\right)^2=\sum_{i=1}^{N}e_i^2$$

s.t.

$$C_{t,K_i}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left[S_0e^{(\mu-r)(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K_i}+\left(\mu+\frac{1}{2}\eta_i^2\right)(T-t)}{\eta_i\sqrt{T-t}}\right)-K_ie^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K_i}+\left(\mu-\frac{1}{2}\eta_i^2\right)(T-t)}{\eta_i\sqrt{T-t}}\right)\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$$

$$\lambda_i\in(0,1)\text{ ， }\sigma_i(t)>0\text{ ， }i=1,\ldots,n$$

其中各變數之定義如 4.1 節中所述。

爲了求解上的方便，我們假設現在時點$t=0$、漂移率μ等於無風險利率r且在買權的存續期間內每一個$\sigma_i(t)=\sigma_i$爲一固定常數。 Brigo 與 Mercurio（2002）指出，在實務上只需要令$n=3$就可以得到很好的效果。我們將以局部搜尋法來求解參數(λ_i,σ_i)，$i=1,2,3$。以 2008 年 7 月 21 日爲例，將該日的資料輸入 Matlab 軟體所寫成的數學模型求解，將結果列於表 4-5 與圖 4-3 且求解步驟如下：

Step 1 猜測一組可能的參數爲起始解$y_o=(\lambda_{1,0},\lambda_{2,0},\lambda_{3,0},\sigma_{1,0},\sigma_{2,0},\sigma_{3,0})$

爲了降低校準上的困難，在此，我們先固定$(\sigma_{1,0},\sigma_{2,0},\sigma_{3,0})=(60,60,60)$，

其中σ_i之單位爲%，$i=1,2,3$。

$\lambda_{1,0}=0.05$

$\lambda_{2,0}=0.05$

$\lambda_{3,0}=1-\lambda_{1,0}-\lambda_{2,0}$且$\lambda_{3,0}>0$

Step 2 根據 Step 1 的起始解，經過疊代後所得到的解爲 $y=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ 與理論價格的相對誤差平方和 $e=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{C_{t,K_i}-M_{t,K_i}}{M_{t,K_i}}\right)^2$。

Step 3 檢視由 Step 2 所得到之理論價格的相對誤差平方和 e。若認爲誤差範圍是可接受的，則 $y=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ 即爲最佳解，否則將 $\lambda_{1,0}$ 增加 0.05 個單位並重複 Step 1，或將 $\lambda_{2,0}$ 增加 0.05 個單位並重複 Step 1。

在校準混合對數常態過程時，所需時間最短，結果也是較好的。雖然參數使用得越多，會得到較好的校準結果，但是當 $n>3$ 以後，對於準確度的提升卻是非常有限的，反而會因爲過多的參數而增加校準上的困難。因此，當 $n=3$ 時，既可以得到理想的校準結果，又可以減少校準上的困難度。假如變動 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 之後還是無法得到滿意的答案，可以嘗試重新調整 $(\sigma_{1,0},\sigma_{2,0},\sigma_{3,0})$ 來改善校準結果。

根據上述步驟，我們得到參數 $\lambda_1=9.4990\text{e-}1$、$\lambda_2=4.1409\text{e-}2$、$\lambda_3=8.6869\text{e-}3$、$\sigma_1=2.4093\text{e+}1$、$\sigma_2=1.1609\text{e-}3$ 與 $\sigma_3=8.8201\text{e+}1$，且理論價格的相對誤差平方和 $e=3.3939\text{e-}4$，最大相對誤差平方亦只有 $1.1887\text{e-}4$，而用該組參數來配適市場的隱含波動度也得到了非常好的結果，配適的隱含波動度之相對誤差平方和爲 $7.6379\text{e-}5$，最大相對誤差平方亦只有 $2.1579\text{e-}5$。同時我們可以從圖 4-3 中發現，由 (3.37) 式所求的隱含波動度，確實呈現傾斜狀態（可視爲微笑狀態的特例）。

表 4-5 混合對數常態過程之校準結果

S_t	7085.67					
T	31/365（年）					
r	2.72％					
$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$	(9.4990e-1, 4.1409e-2, 8.6869e-3)					
$(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$	(2.4093e+1, 1.1609e-3, 8.8201e+1)					
K_i	M_{t,K_i}	C_{t,K_i}	e_i^2	v_{M,K_i}	v_{C,K_i}	E_i^2
7100	195	1.9583e+2	1.8303e-5	2.3554e-1	2.3655e-1	1.8513e-5
7200	153	1.5291e+2	3.6763e-7	2.3879e-1	2.3868e-1	2.2830e-7
7300	118	1.1735e+2	3.0741e-5	2.4134e-1	2.4050e-1	1.2295e-5
7400	89	8.8522e+1	2.8902e-5	2.4277e-1	2.4209e-1	7.7147e-6
7500	65	6.5709e+1	1.1887e-4	2.4248e-1	2.4361e-1	2.1579e-5
7600	48.5	4.8075e+1	7.6677e-5	2.4595e-1	2.4517e-1	1.0076e-5
7700	34.5	3.4757e+1	5.5704e-5	2.4634e-1	2.4690e-1	5.2676e-6
7800	25	2.4922e+1	9.8070e-6	2.4912e-1	2.4891e-1	7.0433e-7
相對誤差平方和			3.3939e-4			7.6379e-5

註 1、C_{t,K_i} 爲根據參數 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(9.4990\text{e-}1,\ 4.1409\text{e-}2,\ 8.6869\text{e-}3)$ 與 $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(2.4093\text{e+}1,\ 1.1609\text{e-}3,\ 8.8201\text{e+}1)$ 所計算出來的理論價格。

2、v_{M,K_i} 爲當市場價格爲 M_{t,K_i} ，利用 Black-Scholes 選擇權評價公式所求得之市場隱含波動度。

3、v_{C,K_i} 爲當理論價格爲 C_{t,K_i} ，利用 Black-Scholes 選擇權評價公式所求得之配適的隱含波動度。

圖 4-3 混合對數常態過程之市場與配適的波動度之比較

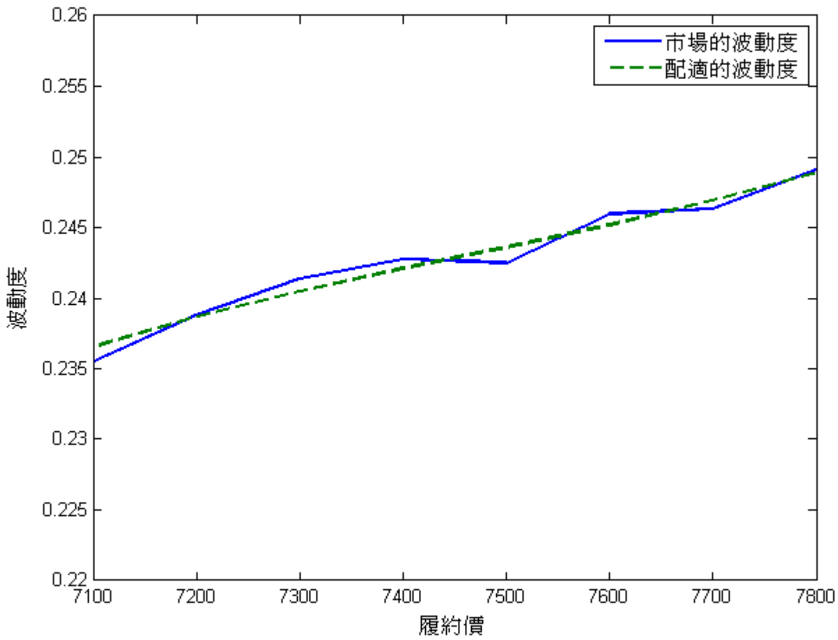

表 4-6 整理出從 2004 年起至 2008 年 8 月之間的每月平均校準結果：

表 4-6 混合對數常態過程之每月平均校準結果

月份	2004 年	2005 年	2006 年	2007 年	2008 年
1 月	4.9979e-003	5.2610e-003	2.0721e-002	3.1579e-002	3.8020e-002
2 月	3.1012e-003	1.4613e-003	6.4870e-003	1.7555e-002	2.9915e-002
3 月	1.6357e-002	1.0342e-003	9.9168e-004	5.5149e-003	3.9941e-002
4 月	5.4133e-003	5.0419e-003	3.2534e-003	1.6857e-002	1.3360e-002
5 月	3.4176e-003	1.8123e-003	1.6524e-002	2.1545e-002	4.0887e-002
6 月	1.7629e-003	5.2514e-003	1.7107e-002	1.4076e-002	9.6883e-003
7 月	3.3258e-004	6.1081e-003	2.2897e-003	4.9704e-003	7.3935e-003
8 月	7.9391e-004	3.3004e-003	6.9468e-003	5.0252e-002	6.6657e-003
9 月	3.7022e-003	2.5944e-003	2.1977e-002	2.8078e-002	
10 月	5.9264e-003	8.5365e-003	1.5937e-002	2.9490e-002	
11 月	6.5666e-003	4.7896e-003	1.3816e-002	2.3595e-002	
12 月	1.6410e-003	1.2086e-002	2.8450e-002	3.0158e-002	
年平均	4.5711e-003	4.8540e-003	1.2826e-002	2.3079e-002	2.2940e-002

（表格內的數字爲理論價格的相對誤差平方和）

4.4 實證結果分析

首先，我們在表 4-7 整理出從 2004 年起至 2008 年 8 月之間的每年平均校準結果：

表 4-7 三種過程之每年平均校準結果

年份	位移 CEV 過程	位移對數常態過程	混合對數常態過程
2004 (250)	2.2712e-002	2.5583e-002	4.5711e-003
2005 (247)	3.5669e-002	5.5626e-002	4.8540e-003
2006 (248)	4.5731e-002	5.9234e-002	1.2826e-002
2007 (245)	7.4175e-002	8.6725e-002	2.3079e-002
2008 (163)	7.6528e-002	9.6979e-002	2.2940e-002
平均 (1153)	4.8982e-002	6.2342e-002	1.2937e-002

（表格內的數字爲理論價格的相對誤差平方和）

由表 4-7 中可以發現，不論是哪一年份，校準的結果均是混合對數常態過程優於位移 CEV 過程，且位移 CEV 過程優於位移對數常態過程。這個結果可以歸因於參數使用的多寡，使用的參數越多，所得到的結果越好。

但是我們發現，並不是每天的校準結果都是非常好的，我們整理出校準結果統計天數如下：

表 4-8 位移 CEV 過程之統計結果

年份	$\geq 10^{-1}$	$10^{-2} \sim 10^{-1}$	$10^{-3} \sim 10^{-2}$	$10^{-4} \sim 10^{-3}$	$< 10^{-4}$
2004 (250)	6 (2.4)	38 (15.2)	87 (34.8)	60 (24)	59 (23.6)
2005 (247)	7 (2.83)	64 (25.91)	88 (35.63)	44 (17.81)	44 (17.81)
2006 (248)	16 (6.45)	105 (42.34)	69 (27.82)	42 (16.94)	16 (6.45)
2007 (245)	25 (10.20)	122 (49.80)	70 (28.57)	22 (8.98)	6 (2.49)
2008 (163)	15 (9.20)	78 (47.85)	49 (30.06)	21 (12.88)	0 (0)
總和(1153)	69 (5.98)	407 (35.30)	363 (31.48)	189 (16.39)	125 (10.84)

（表格內之數字爲天數，括號內之數字爲該天數佔該年天數的百分比）

表 4-9 位移對數常態過程之統計結果

年份	$\geq 10^{-1}$	$10^{-2} \sim 10^{-1}$	$10^{-3} \sim 10^{-2}$	$10^{-4} \sim 10^{-3}$	$< 10^{-4}$
2004 (250)	7 (2.8)	26 (10.4)	83 (33.2)	66 (26.4)	68 (27.2)
2005 (247)	16 (6.48)	77 (31.17)	88 (35.63)	35 (14.17)	31 (12.55)
2006 (248)	18 (7.26)	96 (38.71)	82 (33.06)	39 (15.73)	13 (5.24)
2007 (245)	27 (11.02)	108 (44.08)	78 (31.84)	23 (9.39)	9 (3.67)
2008 (163)	20 (12.27)	67 (41.10)	53 (32.52)	21 (12.88)	2 (1.27)
總和(1153)	88 (7.63)	374 (32.44)	384 (33.30)	184 (15.96)	123 (10.67)

（表格內之數字爲天數，括號內之數字爲該天數佔該年天數的百分比）

表 4-10 混合對數常態過程之統計結果

年份	$\geq 10^{-1}$	$10^{-2} \sim 10^{-1}$	$10^{-3} \sim 10^{-2}$	$10^{-4} \sim 10^{-3}$	$< 10^{-4}$
2004 (250)	1 (0.4)	22 (8.8)	89 (35.6)	56 (22.4)	82 (32.8)
2005 (247)	0 (0)	38 (15.38)	97 (39.27)	47 (19.03)	65 (26.32)
2006 (248)	3 (1.21)	91 (36.69)	68 (27.42)	43 (17.34)	43 (17.34)
2007 (245)	8 (3.27)	116 (47.35)	75 (30.61)	27 (11.02)	19 (7.76)
2008 (163)	9 (5.52)	72 (44.17)	49 (30.06)	30 (18.40)	3 (1.84)
總和(1153)	21 (1.82)	339 (29.40)	378 (32.78)	203 (17.61)	212 (18.39)

（表格內之數字爲天數，括號內之數字爲該天數佔該年天數的百分比）

表 4-11 三種過程之比較

模型	$\geq 10^{-1}$	$10^{-2} \sim 10^{-1}$	$10^{-3} \sim 10^{-2}$	$10^{-4} \sim 10^{-3}$	$< 10^{-4}$
位移 CEV 過程	69 (5.98)	407 (35.30)	363 (31.48)	189 (16.39)	125 (10.84)
位移對數常態過程	88 (7.63)	374 (32.44)	384 (33.30)	184 (15.96)	123 (10.67)
混合對數常態過程	21 (1.82)	339 (29.40)	378 (32.78)	203 (17.61)	212 (18.39)

（表格內之數字爲天數，括號內之數字爲該天數佔總實證天數的百分比）

由表 4-11 中可發現，雖然校準結果並不是每天都很好，但是以長時間來看，約有 30%的天數其理論價格的誤差平方和小於10^{-3}，此校準結果是令人滿意的。而約有 30%的天數其理論價格的誤差平方和介於$10^{-3} \sim 10^{-2}$，此校準結果算是可以接受的範圍。最後約有 40%的天數其理論價格的誤差平方和大於10^{-2}，此校準結果算是表現較差的。

更精確一點表示，就位移 CEV 過程來說，有 27.23%的天數其理論價格的誤差平方和小於10^{-3}，有 31.48%的天數其理論價格的誤差平方和介於$10^{-3} \sim 10^{-2}$之間，而有 41.28%的天數其理論價格的誤差平方和大於10^{-2}。就位移對數常態過程來說，有 26.63%的天數其理論價格的誤差平方和小於10^{-3}，有 33.30%的天數其理論價格的誤差平方和介於$10^{-3} \sim 10^{-2}$之間，而有 40.07%的天數其理論價格的誤差平方和大於10^{-2}。就混合對數常態過程來說，有 36.00%的天數其理論價格的誤差平方和小於10^{-3}，有 32.78%的天數其理論價格的誤差平方和介於$10^{-3} \sim 10^{-2}$之間，而有 31.22%的天數其理論價格的誤差平方和大於10^{-2}。因此，就實證結果而言，混合對數常態過程的表現結果，明顯優於位移 CEV 過程與位移對數常態過程。

在本節的最後，我們想要探討爲何會產生較差的校準結果。經過了 1153 個校準天數，我們歸納出校準結果較差的原因：當市場的隱含波動度起伏較大時，隱含波動度曲線較不平滑，在此情況之下，校準結果大都較差。若是市場隱含波動度呈現穩定的傾斜狀態時，校準結果大多不錯。