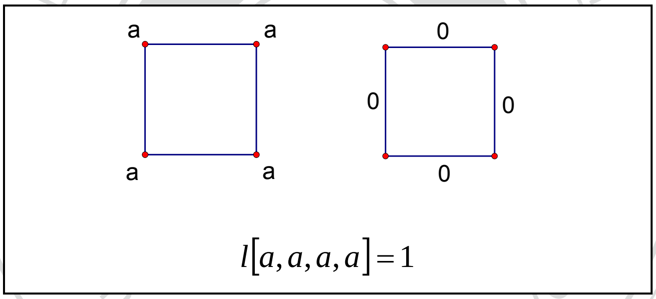
第三章　原始的研究方法

為了證明【定理 1.3】，先將迪菲方塊（DIFFY BOX）依據頂點數字相同與否，分類為兩種，分別為特殊型及一般型。在此歸納出所謂的特殊型有三種：（1）四個頂點數字都相同（2）四數中只有三個頂點數字相同（3）四數中只有兩個頂點數字相同，其他兩個不同（4）四數中只有兩個數字，分別各有兩個；而所謂的一般型即為四個頂點數皆不相同。

3.1　特殊型的迪菲方塊（DIFFY BOX）

3.1.1 四個頂點數字都相同

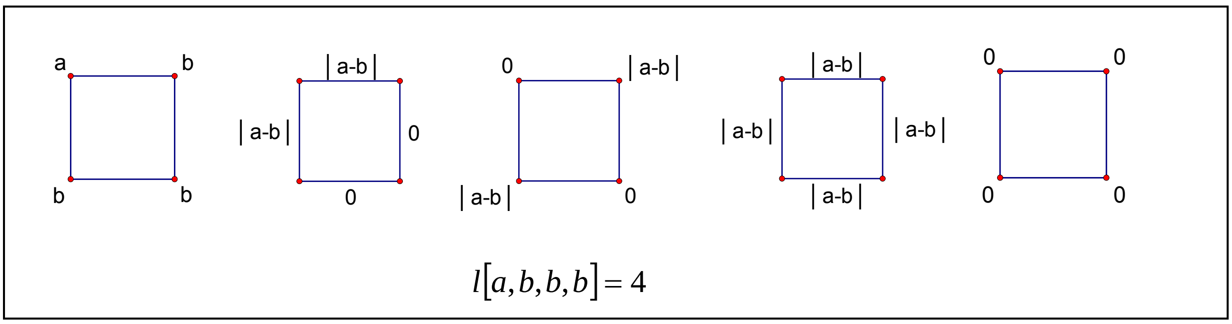
若四個頂點數字都相同，不失一般性，假定此數不為零。如圖 3.1，則只須做一次就可以得到四個”0 ” 。



（圖 3.1）

3.1.2 四數中只有三個頂點數字相同

若有三個頂點數字相同，不失一般性，假設左上角頂點為a，其餘為b，且$a \neq b$，如圖 3.2，則所有步驟如下：



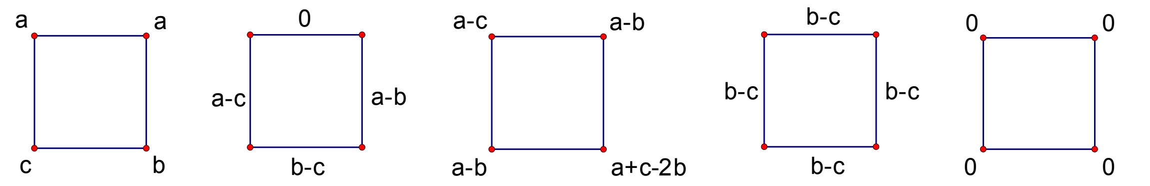
（圖 3.2）

3.1.3 四數中只有兩個頂點數字相同，其他兩個不同

若四數中只有兩個頂點數字相同，其他兩個不同，不失一般性，假設迪菲方塊(DIFFY BOX)為$[a,a,b,c]$和$[a,b,a,c]$，且$a \neq b \neq c$，$b > c$。

第一型：$[a,a,b,c]$

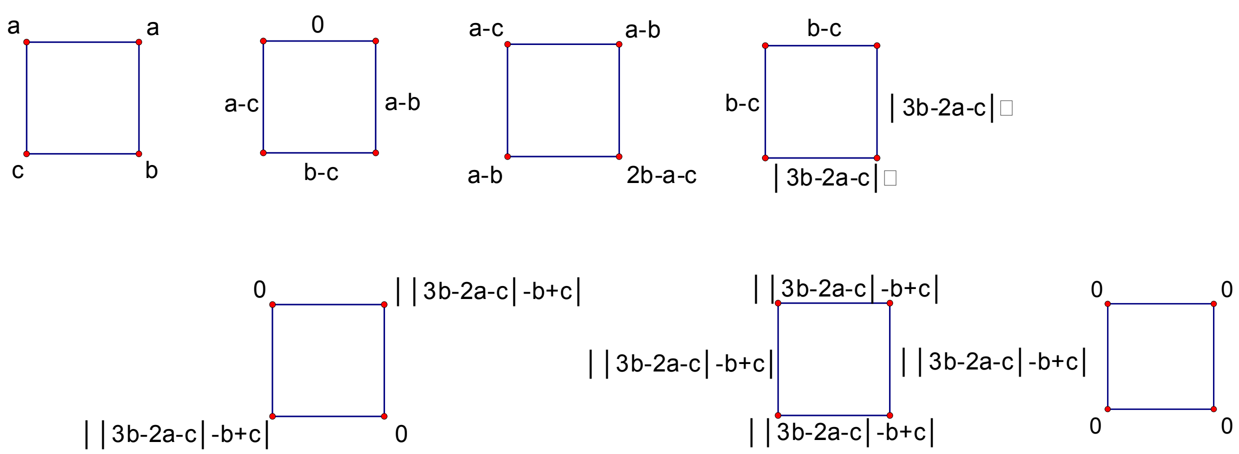
假如a最大，且$a+c-2b \geq 0$



$l[a,a,b,c]=4$ 當a最大且$a+c \geq 2b$

(圖 3.3)

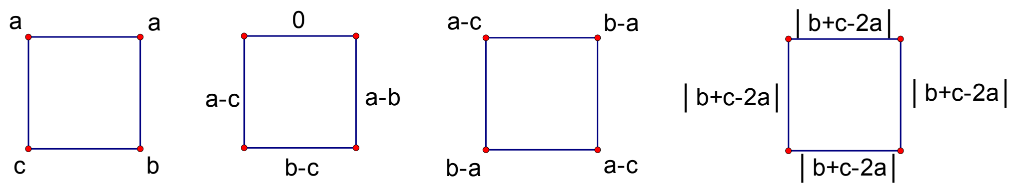
假如a最大，且$a+c-2b < 0$



$l[a,a,b,c]=6$ 當a最大且$a+c < 2b$

(圖 3.4)

假如$b > a > c$

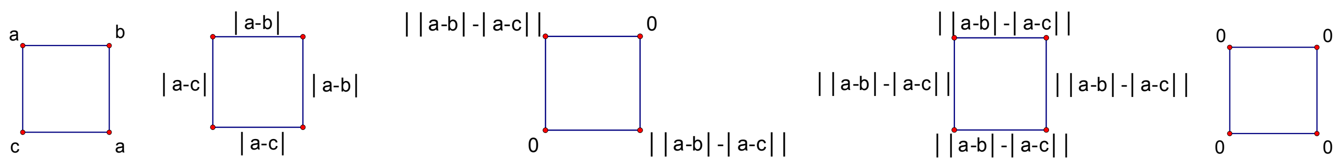


$l[a,a,b,c] = 4$　當$b > a > c$

（圖 3.5）

假如a最小，　此時a、b、c的大小關係為$b > c > a$，那麼將迪菲方塊（DIFFY BOX）$[a,a,b,c]$的四數同時被b減，變成$[b-a,b-a,0,b-c]$，再沿著鉛垂線翻轉一次變成$[b-a,b-a,b-c,0]$。此時，因為$b-a > b-c > 0$，所以此迪菲方塊（DIFFY BOX）為“a最大”的互補型，則根據翻轉不變律及互補不變律，$\begin{cases} b-a+0 \geq 2(b-c) \Rightarrow\ 4 \\ b-a+0 < 2(b-c) \Rightarrow\ 6 \end{cases}$，即$\begin{cases} a+b \leq 2c \Rightarrow\ 4 \\ a+b > 2c \Rightarrow\ 6 \end{cases}$。

第二型：$[a,b,a,c]$

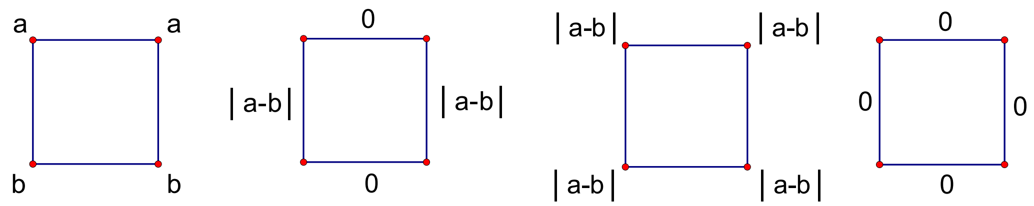


$$l[a,b,a,c] = \begin{cases} 2 & if\ |a-b| = |a-c| \\ 4 & if\ |a-b| \neq |a-c| \end{cases}$$

（圖 3.6）

3.1.4 四數中只有兩個數字，分別各有兩個

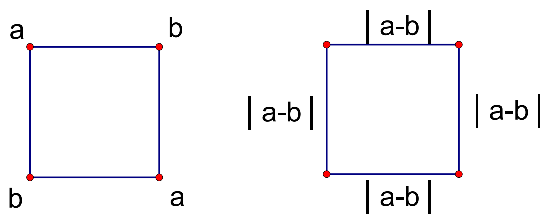
第一型：$[a,a,b,b]$



$$l[a,a,b,b]=3$$

（圖 3.7）

第二型：$[a,b,a,b]$

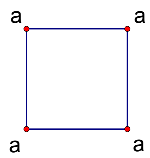
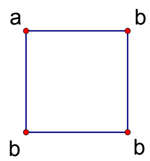
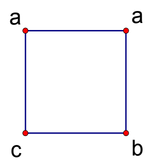
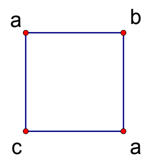
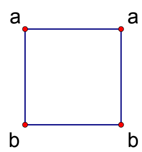
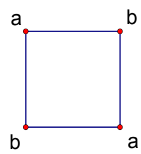


$$l[a,b,a,b]=2$$

（圖 3.8）

總結上面各情形，整理如下表：

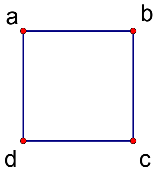
表 3.1　特殊型的迪菲方塊（DIFFY BOX）

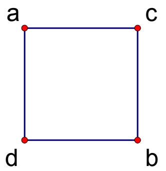
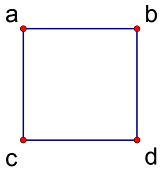
類型	迪菲方塊（DIFFY BOX）	長度
3.1.1 $[a,a,a,a]$		1
3.1.2 $[a,b,b,b]$		4
3.1.3 【第一型】$[a,a,b,c]$ $b>c$		a 最大，$\begin{cases} a+c \geq 2b \Rightarrow & 4 \\ a+c < 2b \Rightarrow & 6 \end{cases}$ $b>a>c$，　4 a 最小，$\begin{cases} a+b \leq 2c \Rightarrow & 4 \\ a+b > 2c \Rightarrow & 6 \end{cases}$
3.1.3 【第二型】$[a,b,a,c]$ $b>c$		$\begin{cases} if\ b+c=2a \Rightarrow & 2 \\ if\ b+c \neq 2a \Rightarrow & 4 \end{cases}$
3.1.4 【第一型】$[a,a,b,b]$		3
3.1.4 【第二型】$[a,b,a,b]$		2

3.2 一般型的迪菲方塊（DIFFY BOX）

接著，討論一般型的迪菲方塊（DIFFY BOX），也就是四個頂點數字都不相同的情形，假設此四數為a,b,c,d，且$a>b>c>d$，那麼不失一般性，用此四數排列迪菲方塊（DIFFY BOX）有下列三種組合：$[a,b,c,d]$、$[a,c,b,d]$和$[a,b,d,c]$。下表 3.2 為這三種組合在各個條件下的長度，證明過程於附錄一。

表 3.2　一般型的迪菲方塊（DIFFY BOX）

迪菲方塊（DIFFY BOX）	條件	長度
	$a+c>2b$ 、 $b+d>2c$ $\begin{cases} a+c+d\ge 3b 且 (a-d)>3(b-c) \\ a+c+d<3b 且 (a-d)>3(b-c)\begin{cases} 3b>a+2c \\ 3b=a+2c\begin{cases} b+2d\ge 3c \\ b+2d<3c \end{cases} \\ 3b<a+2c\begin{cases} (a-c)\ge 2(b-d) \\ (a-c)<2(b-d) \end{cases} \end{cases} \\ (a-d)=3(b-c)\begin{cases} b+2d\le 3c \\ b+2d>3c \end{cases} \\ a+c+d<3b 且 (a-d)<3(b-c)\begin{cases} a+d\le 2b \\ a+d>2b \end{cases} \end{cases}$	6 ≥ 7 7 9 7 9 6 8 6 8
	$a+c>2b$ 、 $b+d=2c$ 且 $\begin{cases} a+c+d>3b \\ a+c+d<3b \end{cases}$	5 7
	$a+c>2b$ 、 $b+d<2c$ 且 $\begin{cases} \lvert a+c+d-3b\rvert+\lvert a+b+d-3c\rvert=2\lvert a+d-b-c\rvert \\ \text{其餘} \end{cases}$	5 7
	$a+c=2b$ 且 $b+d>2c$	5
	$a+c=2b$ 且 $b+d=2c$	5
	$a+c=2b$ 、 $b+d<2c$ 且 $\begin{cases} a+b+d\ge 3c \\ a+b+d<3c \end{cases}$	7 5
	$a+c<2b$ 且 $b+d>2c$	5
	$a+c<2b$ 且 $b+d=2c$	5

	$a+c<2b$ 、 $b+d<2c$ $\begin{cases} a+b+d>3c\text{且}(a-d)>3(b-c)\begin{cases} a+d\geq 2c\text{且}2b+d>3c \\ a+d<2c\text{且}2b+d>3c \\ a+d<2c\text{且}2b+d=3c\begin{cases}3b\geq 2a+c \\ 3b<2a+c\end{cases} \\ a+d<2c\text{且}2b+d<3c\begin{cases}2(a-c)\leq(b-d) \\ 2(a-c)>(b-d)\end{cases}\end{cases} \\ a+b+d>3c\text{且}(a-d)=3(b-c)\begin{cases}3b\leq 2a+c \\ 3b>2a+c\end{cases} \\ a+b+d>3c\text{且}(a-d)<3(b-c)\begin{cases}a+d=2c \\ a+d\neq 2c\end{cases} \\ a+b+d\leq 3c \end{cases}$	7 ≥ 7 7 9 7 9 6 8 6 8 6
	$a+d=b+c$	3
	$a+d\neq b+c$	4
	$a+d>2b>2c$	6
	$a+d=2b>2c$	4
	$2b>a+d>2c\begin{cases}a+d=b+c \\ a+d\neq b+c\end{cases}$	3 4
	$2b>a+d=2c$	4
	$2b>2c>a+d$	6

3.3 遇到的問題

當初給科展定的題目為『層出不窮？！』，目的就是希望可以確定任給四個非負整數的迪菲方塊（DIFFY BOX），是否經過有限步驟，都一定會出現四個為零的整數；所以我使用上面土法煉鋼的方式，想證明此結果，並試圖找出所有的可能長度。從表 3.2 可以看出，大部分的迪菲方塊（DIFFY BOX）都會在有限層內出現四個為零的數，而且長度都在七以內。但有一部分的迪菲方塊（DIFFY BOX）其實是不確定它是否會在有限層內出現四個為零的數。因此再第四章，將使用其他方法來證明【定理 1.3】。