第四章　研究方法

4.1　使用數學歸納法來證明【定理 1.3】

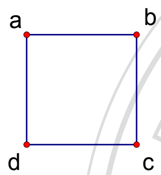
首先，用數學歸納法來證明最後一定會出現四個都為零的數。

【定理 1.3】任意一個非負整數的迪菲方塊(DIFFY BOX)，會在有限步驟內得到四個為零的數。

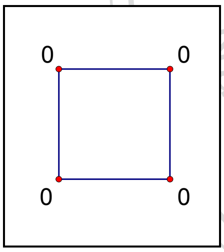
也就是當 $[a,b,c,d] \in \mathrm{D}^{\mathrm{N}\cup\{0\}}$ 時，$l[a,b,c,d] < +\infty$。

【證明】

如下圖，a,b,c,d 為非負整數，且令 $n = \max\{a,b,c,d\}$。



當 $n = 0$ 時，如下圖 4.1，成立。



（圖 4.1）

假設當 $n = 0 \sim k$ 時都成立，

則 $n = k + 1$ 時，

若 $a \times b \times c \times d > 0$，則四數都減”1”，此時 $\max = k$，根據數學歸納法成立。

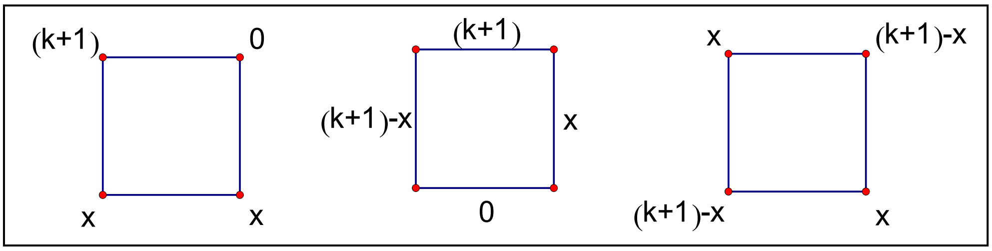
若 $a \times b \times c \times d = 0$，則 a,b,c,d 四數至少有一個為”0”，此時不能四數減”1”，因為減”1”後，會有負數出現在迪菲方塊（DIFFY BOX）中，則不滿足迪菲方塊（DIFFY BOX）屬於 $\mathrm{D}^{\mathrm{N}\cup\{0\}}$ 的最初條件，所以接下來討論 a,b,c,d 為”0”的狀況。然而此時最大數為 $(k+1)$，所以下面的分類至少須有一個”$(k+1)$”和一個”0”，下表 4.1 將所有組合列出來。

表 4.1　有”$(k+1)$”和”0　”的組合類型

組　合　類　型	迪 菲 方 塊 （DIFFY BOX）
4.1.1　只有一個”$(k+1)$”和只有一個”0”	4.1.1.1　$[k+1,0,x,x]$ 不失一般性，$0<x<k+1$
	4.1.1.2　$[k+1,0,x,y]$ 不失一般性，$0<x,y<k+1$ 且 $x\neq y$
	4.1.1.3　$[k+1,x,0,x]$ 不失一般性，$0<x<k+1$
	4.1.1.4　$[k+1,x,0,y]$ 不失一般性，$0<x<y<k+1$
4.1.2　只有一個”$(k+1)$”和只有二個”0”	4.1.2.1　$[k+1,0,0,x]$ 不失一般性，$0<x<k+1$
	4.1.2.2　$[k+1,0,x,0]$ 不失一般性，$0<x<k+1$
4.1.3　只有一個”$(k+1)$”和三個”0　”	4.1.3.1　$[k+1,0,0,0]$
4.1.4　只有二個”$(k+1)$”和只有一個”0”	4.1.4.1　$[k+1,k+1,0,x]$ 不失一般性，$0<x<k+1$
	4.1.4.2　$[k+1,0,k+1,x]$ 不失一般性，$0<x<k+1$
4.1.5　二個”$(k+1)$”和二個”0　”	4.1.5.1　$[k+1,k+1,0,0]$ 不失一般性，$0<x<k+1$
	4.1.5.2　$[k+1,0,k+1,0]$ 不失一般性，$0<x<k+1$
4.1.6　三個”$(k+1)$”和一個”0　”	4.1.6.1　$[k+1,k+1,k+1,0]$ 不失一般性，$0<x<k+1$

4.1.1 只有一個”$(k+1)$”和只有一個”0”

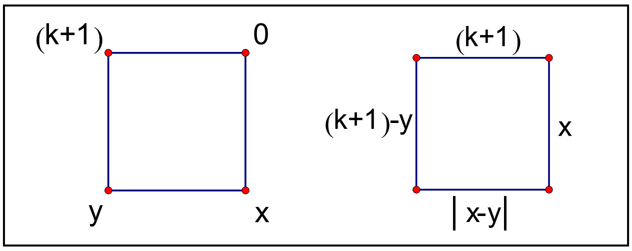
4.1.1.1 $[k+1,0,x,x]$



（圖 4.2）

此時，$0<\max\le k$，所以根據數學歸納法，成立。

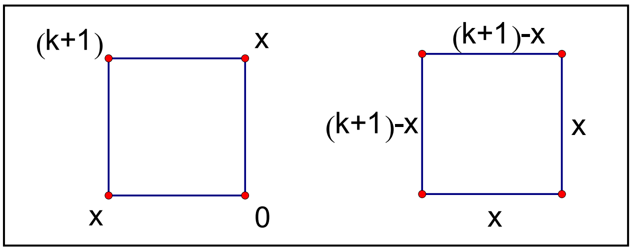
4.1.1.2 $[k+1,0,x,y]$



（圖 4.3）

此時，四數同時減”1”，$\max=k$，所以根據數學歸納法，成立。

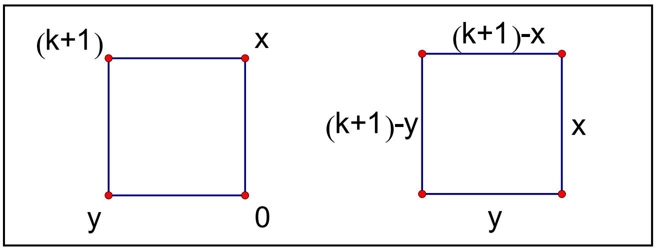
4.1.1.3 $[k+1,x,0,x]$



（圖 4.4）

此時，$0<\max\le k$，所以根據數學歸納法，成立。

4.1.1.4 $[k+1, x, 0, y]$

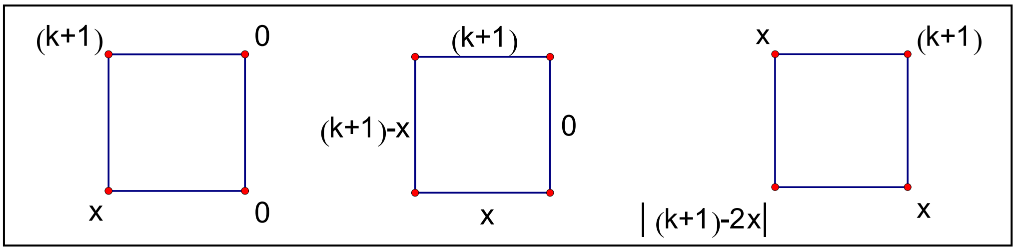


（圖 4.5）

此時，$0 < \max \le k$ ，所以根據數學歸納法，成立。

4.1.2 只有一個” $(k+1)$ ”和只有二個” 0 ”

4.1.2.1 $[k+1, 0, 0, x]$

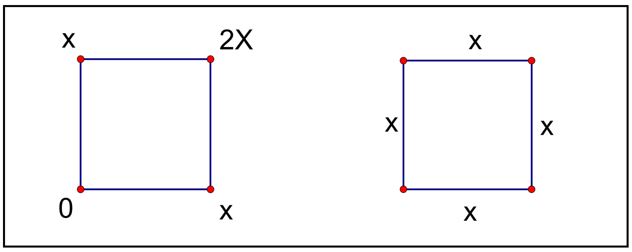


（圖 4.6）

此時需繼續討論$|(k+1)-2x|$是否等於” 0 ”的狀況，

如果$|(k+1)-2x| \neq 0$，四數同時減” 1 ”，$\max = k$ ，所以根據數學歸納法，成立。

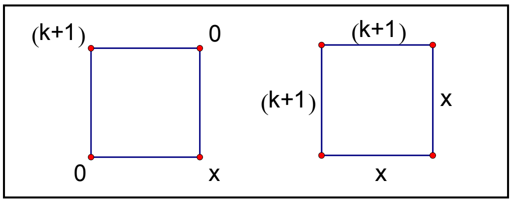
如果$|(k+1)-2x| = 0$，則迪菲方塊（DIFFY BOX）可改寫成如下：



（圖 4.7）

此時， $0 < \max \le k$ ，所以根據數學歸納法，成立。

4.1.2.2 $[k+1,0,x,0]$

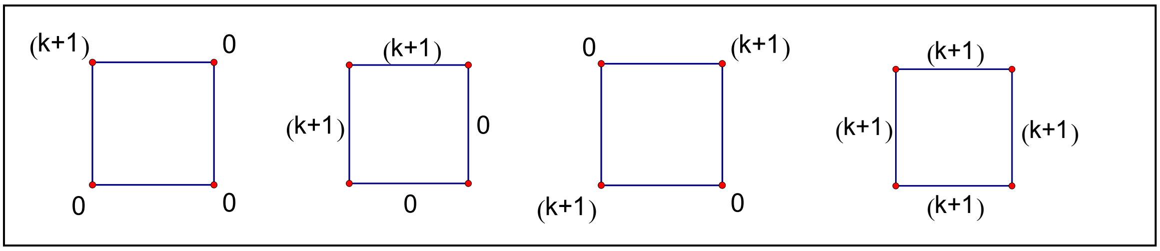


（圖 4.8）

此時，四數同時減"1"，$\max=k$，所以根據數學歸納法，成立。

4.1.3 只有一個"$(k+1)$"和三個"0"

4.1.3.1 $[k+1,0,0,0]$



（圖 4.9）

此時，四數同時減"1"，$\max=k$，所以根據數學歸納法，成立。

4.1.4 只有二個"$(k+1)$"和只有一個"0"

4.1.4.1 $[k+1,k+1,0,x]$

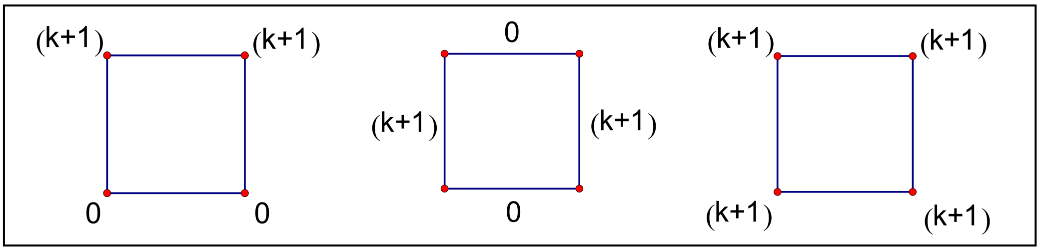
此類型若四數同時用$(k+1)$去減，可變成$[0,0,k+1,k+1-x]$，也就是與 4.1.2.1 $[k+1,0,0,x]$互補，根據互補不變律與 4.1.2.1 $[k+1,0,0,x]$ 的證明過程，4.1.4.1 $[k+1,k+1,0,x]$也有相同的結論與長度。

4.1.4.2 $[k+1,0,k+1,x]$

此類型若四數同時用$(k+1)$去減，可變成$[0,k+1,0,k+1-x]$，也就是與$[k+1,0,k+1,x]$互補，根據互補不變律與 4.1.2.2 $[k+1,0,x,0]$ 的證明過程，4.1.4.2 $[k+1,0,k+1,x]$也有相同的結論與長度。

4.1.5 二個”$(k+1)$”和二個”0 ”

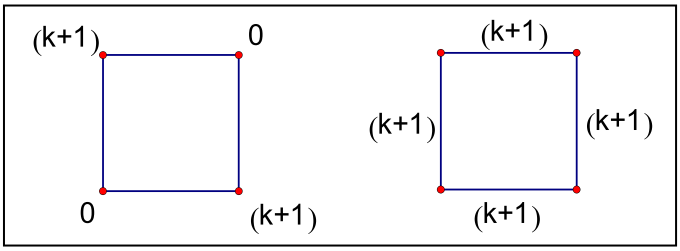
4.1.5.1 $[k+1, k+1, 0, 0]$



（圖 4.10）

此時，四數同時減”1 ”，$\max = k$，所以根據數學歸納法，成立。

4.1.5.2 $[k+1, 0, k+1, 0]$



（圖 4.11）

此時，四數同時減”1 ”，$\max = k$，所以根據數學歸納法，成立。

4.1.6 三個”$(k+1)$”和一個”0 ”

4.1.6.1 $[k+1, k+1, k+1, 0]$

此類型若四數同時用$(k+1)$去減，可變成$[0, 0, 0, k+1]$，也就是與 4.1.3.1 $[k+1, k+1, k+1, 0]$互補，根據互補不變律與 4.1.3.1 的證明過程，4.1.6.1 $[k+1, k+1, k+1, 0]$也有相同的結論與長度。

4.2 用遞減數列的概念來證明【定理 1.3】

接下來，用遞減的概念來思考，並解釋最後一定會出現四個皆為零的數。在此，我們先定義一些符號：

【定義 4.1】B_0 為一開始的迪菲方塊（DIFFY BOX），B_1 為第一步驟的迪菲方塊（DIFFY BOX），依此類推，則 B_m 為第 m 步驟的迪菲方塊（DIFFY BOX）。

【定義 4.2】n_0 為 B_0 中四數的最大值，n_1 為 B_1 中四數的最大值，依此類推，則 n_m 為 B_m 中四數的最大值。

【定理 1.3】任意一個非負整數的迪菲方塊(DIFFY BOX)，會在有限步驟內得到四個為零的數。也就是當 $[a,b,c,d]\in \mathrm{D}^{\mathrm{N}\cup\{0\}}$ 時，$l[a,b,c,d]<+\infty$。

【證明】

有了上面的定義後，我們不難發現 $\{\mathrm{n}_m\}$ 為一個遞減數列。

如果 $\{\mathrm{n}_m\}$ 為一個嚴格遞減數列，則經過有限步驟後，一定可以讓 $\mathrm{n}_m=0$，一旦 $\mathrm{n}_m=0$，因為 n_m 為 B_m 中四數的最大值，則其他三數也為零，故得證。

如果 $\{\mathrm{n}_m\}$ 不為一個嚴格遞減數列，表示至少有一個 k，使得 $\mathrm{n}_k=n_{k+1}$，也就是在 B_k 一定有一個數字為零，那麼再往前推至 B_{k-1} 時，就會有兩個相鄰的數字相同，這時就可以用 §3.1 的結論，即一定會在有限長度內出現四個為零的數。

4.3 整數的迪菲方塊(DIFFY BOX)

【定義 4.3】若一個迪菲方塊(DIFFY BOX)定義為$[a,b,c,d]$，且a,b,c,d為四個整數時，定義符號D^{Z}，且用$[a,b,c,d]\in \mathrm{D}^{\mathrm{Z}}$來表示此迪菲方塊(DIFFY BOX)為一個整數的迪菲方塊(DIFFY BOX)。

【定理 4.4】若$[a,b,c,d]\in \mathrm{D}^{\mathrm{Z}}$時，則迪菲方塊（DIFFY BOX）$[a,b,c,d]$的長度也會$<+\infty$。

【證明】

根據【定義 1.1】，迪菲方塊（DIFFY BOX）的運算方式為相鄰兩數相減的絕對值，則$[a,b,c,d]$經過第一個步驟後必定會出現四個非負整數，那麼根據【定理 1.3 】可推知，若$[a,b,c,d]\in \mathrm{D}^{\mathrm{Z}}$，則迪菲方塊（DIFFY BOX）$[a,b,c,d]$的長度也會$<+\infty$。

4.4 有理數的迪菲方塊(DIFFY BOX)

【定義 4.5】若一個迪菲方塊(DIFFY BOX)定義為$\left[a,b,c,d\right]$，且a,b,c,d為四個有理數時，定義符號D^{Q}，且用$\left[a,b,c,d\right]\in \mathrm{D}^{\mathrm{Q}}$來表示此迪菲方塊(DIFFY BOX)為一個有理數的迪菲方塊(DIFFY BOX)。

【定理 4.6】若$\left[a,b,c,d\right]\in \mathrm{D}^{\mathrm{Q}}$，則一定可以找到一個迪菲方塊(DIFFY BOX)屬於D^{Z}，使得$\left[a,b,c,d\right]$與它有相同的長度。

【證明】

若a,b,c,d為有理數，則根據有理數的定義，可以將a,b,c,d分別表示成分數型式為$\frac{n_1}{m_1},\frac{n_2}{m_2},\frac{n_3}{m_3},\frac{n_4}{m_4}$。接著，將此四數通分成分母為$m_1,m_2,m_3,m_4$的最小公倍數$m$，此時$a=\frac{a^{'}}{m},b=\frac{b^{'}}{m},c=\frac{c^{'}}{m},d=\frac{d^{'}}{m}$，且$a^{'},b^{'},c^{'},d^{'}$為整數。則取$[a^{'},b^{'},c^{'},d^{'}]$為一個整數的迪菲方塊(DIFFY BOX)，那麼$l[a,b,c,d]=l[a^{'},b^{'},c^{'},d^{'}]$。因為當$\left[a,b,c,d\right]$化成$[\frac{a^{'}}{m},\frac{b^{'}}{m},\frac{c^{'}}{m},\frac{d^{'}}{m}]$在運算時，它的分母可以永遠保持$m$，而只做分子的運算，如同作$[a^{'},b^{'},c^{'},d^{'}]$的運算；所以當$[a^{'},b^{'},c^{'},d^{'}]$得到四個為零的數時，$\left[a,b,c,d\right]$也會變成四個為零的數。

【定義 4.7】從【定理 5.4】的證明過程中，將一個屬於D^{Q}的迪菲方塊(DIFFY BOX) $\left[a,b,c,d\right]$化成$[\frac{a^{'}}{m},\frac{b^{'}}{m},\frac{c^{'}}{m},\frac{d^{'}}{m}]$（其中$a^{'},b^{'},c^{'},d^{'}$為整數)時，用$[a,b,c,d]\approx[a^{'},b^{'},c^{'},d^{'}]$表示迪菲方塊(DIFFY BOX)在$\mathrm{D}^{\mathrm{Q}}$與$\mathrm{D}^{\mathrm{Z}}$之間的轉換關係，且$l[a,b,c,d]=l[a^{'},b^{'},c^{'},d^{'}]$。

4.5 縮放不變律及一般型迪菲方塊(DIFFY BOX)的轉換

【定理 4.8 縮放不變定律】

迪菲方塊(DIFFY BOX) $[a,b,c,d]\in \mathrm{D}^{\mathrm{Q}}$，則將此迪菲方塊(DIFFY BOX)同時乘或除一個正整數α後，產生的新迪菲方塊（DIFFY　BOX）與原迪菲方塊（DIFFY　BOX）有相同的結論與長度。

【證明】

因為$[a,b,c,d]=[\frac{a'}{m},\frac{b'}{m},\frac{c'}{m},\frac{d'}{m}]$，所以$[a,b,c,d]\approx[a',b',c',d']$且$l[a,b,c,d]=l[a',b',c',d']$

若 $[\alpha a,\alpha b,\alpha c,\alpha d]=[\frac{\alpha a'}{m},\frac{\alpha b'}{m},\frac{\alpha c'}{m},\frac{\alpha d'}{m}]$，

則 $[\alpha a,\alpha b,\alpha c,\alpha d]\approx[a',b',c',d']$ 且$l[\alpha a,\alpha b,\alpha c,\alpha d]=l[a',b',c',d']$

若 $[\frac{a}{\alpha},\frac{b}{\alpha},\frac{c}{\alpha},\frac{d}{\alpha}]=[\frac{a'}{\alpha m},\frac{b'}{\alpha m},\frac{c'}{\alpha m},\frac{d'}{\alpha m}]$，

則 $[\frac{a}{\alpha},\frac{b}{\alpha},\frac{c}{\alpha},\frac{d}{\alpha}]\approx[a',b',c',d']$ 且 $l[\frac{a}{\alpha},\frac{b}{\alpha},\frac{c}{\alpha},\frac{d}{\alpha}]=l[a',b',c',d']$

所以 $l[\alpha a,\alpha b,\alpha c,\alpha d]=l[a,b,c,d]$ 且 $l[\frac{a}{\alpha},\frac{b}{\alpha},\frac{c}{\alpha},\frac{d}{\alpha}]=l[a,b,c,d]$

在 § 3.2 的證明過程中是使用四個未知數作討論，然而根據第二章的不變律和【定理 4.8 縮放不變定律】，並利用下面方法，可以將非負整數的迪菲方塊(DIFFY BOX) $[a,b,c,d]$在$a>b>c>d$的條件下轉換成只剩下兩個未知數，一方面方便討論；另一方面也可以將它表示在坐標平面上，讓討論更具體化。

【方法 4.9】任給一個非負整數的迪菲方塊(DIFFY BOX) $[a,b,c,d]$且$a>b>c>d$，使用下列的步驟可以得到新的一個迪菲方塊(DIFFY BOX)，型如$[0,1,x,y]$。

情況一：如果$a-b\ge c-d$

步驟一：利用互補不變律，將四數同時被a減，變成$[0,a-b,a-c,a-d]$

步驟二：利用縮放不變律，將四數同時除以$(a-b)$，變成$\left[0,1,\dfrac{a-c}{a-b},\dfrac{a-d}{a-b}\right]$。

說明:

經過步驟二後的迪菲方塊(DIFFY BOX) $\left[0,1,\dfrac{a-c}{a-b},\dfrac{a-d}{a-b}\right]$中，

令$x=\dfrac{a-c}{a-b}$，$y=\dfrac{a-d}{a-b}$，則

$\because a>b>c>d \Rightarrow (a-d)>(a-c)>(a-b)$

$\therefore y>x>1$……………………………………………………(1)

又$\because y-x=\dfrac{a-d}{a-b}-\dfrac{a-c}{a-b}=\dfrac{a-d-a+c}{a-b}=\dfrac{c-d}{a-b}\le 1$

$\therefore y\le x+1$……………………………………………………(2)

由(1)和(2)可知，$x+1\ge y>x>1$………………………………(5)

情況二：如果$a-b<c-d$

步驟一：上下翻轉一次，使其變成$[d,c,b,a]$

步驟二：利用平移不變律，將四數同時減去d，變成$[0,c-d,b-d,a-d]$

步驟三：利用縮放不變律，將四數同時除以$(c-d)$，變成$\left[0,1,\dfrac{b-d}{c-d},\dfrac{a-d}{c-d}\right]$。

說明:

經過步驟二後的迪菲方塊(DIFFY BOX) $\left[0,1,\dfrac{b-d}{c-d},\dfrac{a-d}{c-d}\right]$中，

令$x=\dfrac{b-d}{c-d}$，$y=\dfrac{a-d}{c-d}$，則

$\because a>b>c>d \Rightarrow (a-d)>(b-d)>(c-d)$

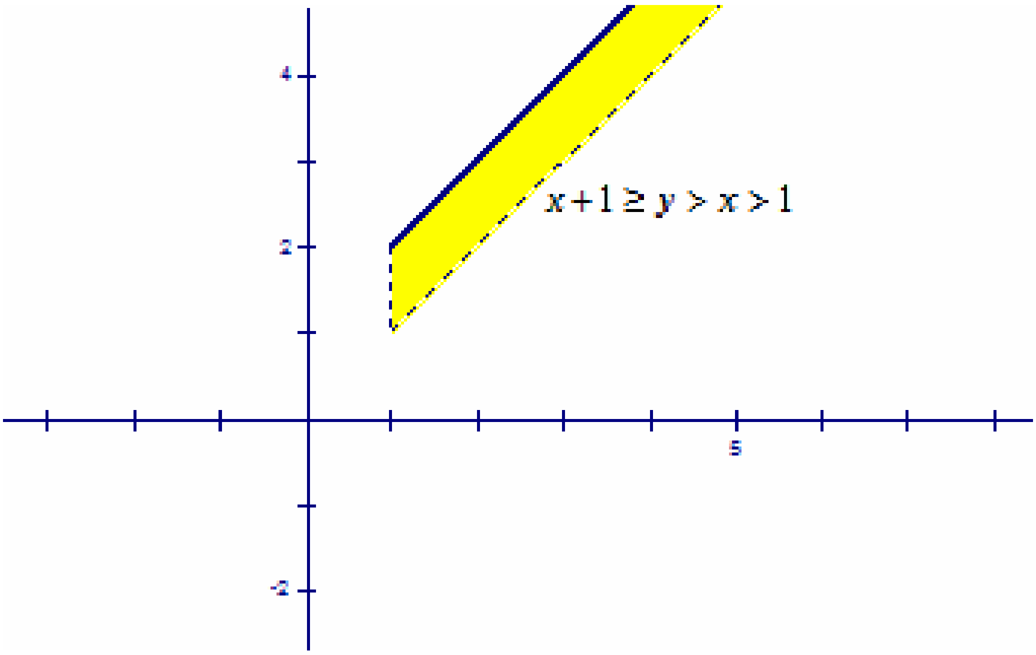
$\therefore y > x > 1$ ……………………………………………………(3)

又 $\because y - x = \dfrac{a-d}{c-d} - \dfrac{b-d}{c-d} = \dfrac{a-d-b+d}{c-d} = \dfrac{a-b}{c-d} < 1$

$\therefore y < x + 1$ ……………………………………………………(4)

由(3)和(4)可知，$x+1 > y > x > 1$ ……………………………………(6)

總結(5)和(6)可以清楚知道，一個非負整數的迪菲方塊(DIFFY BOX) $[a,b,c,d]$ 在 $a > b > c > d$ 的條件下，可以轉換成 $[0,1,x,y]$，且滿足 $x+1 \geq y > x > 1$，表示在坐標平面下的範圍如下圖 4.12。



(圖 4.12)