第四章　模型的延伸

前一章節所討論的模型是針對買權、賣權的完全套利，即無論未來股價如何變動，都有獲利機會。現在我們將放寬限制，即若我們預期在到期日時，標的股價將會落在某一範圍內，則我們可修改原來的規劃模型。大略可分為以下四種情形。

4.1 到期日標的股價大於下限 A

若我們預期在到期日時，標的股價大於某一下限 A，其中 A 介於 k_r 與 k_{r+1} 之間，即 $k_r < A < k_{r+1}$。則我們可以拿掉模型二給予在低於 A 範圍的到期價值大於 0 的限制，模型二可修改為如下：

＜模型四＞

$$\max \quad \sum_{j=r+2}^{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}(k_i - s_j)^+ y_i + \sum_{i=1}^{n}(s_j - k_i)^+ x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right)$$

$$\text{s.t} \quad V(A) = \sum_{i=r+1}^{n}(k_i - A) y_i + \sum_{i=1}^{r}(A - k_i) x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i > 0$$

$$V(k_l) = \sum_{i=l+1}^{n}(k_i - k_l) y_i + \sum_{i=1}^{l-1}(k_l - k_i) x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i > 0,\ \ l = r+1, \cdots, n$$

$$V'(s_T) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ge 0$$

$$-M \le x_i, y_i \le M,\ \ i = 1, 2, \cdots, n$$

$$x_i, y_i \in \mathrm{Z},\ \ i = 1, 2, \cdots, n$$

此規劃模型即保證到期日股票價格若落在 A 以上，則將會有獲利機會。

4.2 到期日標的股價小於上限 *B*

若我們預期在到期日時，標的股價小於某一上限 B，其中 B 介於 k_m 與 k_{m+1} 之間，即 $k_m < B < k_{m+1}$。則我們可以拿掉模型二給予在超過 B 範圍的到期價值大於 0 的限制，模型二可修改為如下：

＜模型五＞

$$\max \ \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}(k_i - s_j)^+ y_i + \sum_{i=1}^{n}(s_j - k_i)^+ x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right)$$

$$\text{s.t} \quad V(0) = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i > 0$$

$$V(k_l) = \sum_{i=l+1}^{n}(k_i - k_l) y_i + \sum_{i=1}^{l-1}(k_l - k_i) x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i > 0, \ l = 1, 2, \cdots, m$$

$$V(B) = \sum_{i=m+1}^{n}(k_i - B) y_i + \sum_{i=1}^{m}(B - k_i) x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i > 0$$

$$-M \le x_i, y_i \le M, \ i = 1, 2, \cdots, n$$

$$x_i, y_i \in Z, \ i = 1, 2, \cdots, n$$

此規劃模型即保證到期日股票價格若落在 0 與 B 之間，則將會有獲利機會。

4.3 到期日標的股價落在 *A* 與 *B* 之間 $(A \le s_T \le B)$

或者若我們預測在到期日時，標的股價將會落在 A、B 之間 $(A \le s_T \le B)$，其中 $k_r < A < k_{r+1}$、$k_m < B < k_{m+1}$，則我們模型可修改為如下：

＜模型六＞

$$\max \quad \sum_{j=r+2}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}(k_i - s_j)^+ y_i + \sum_{i=1}^{n}(s_j - k_i)^+ x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right)$$

$$\text{s.t} \quad V(A) = \sum_{i=r+1}^{n}(k_i - A)y_i + \sum_{i=1}^{r}(A - k_i)x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i > 0$$

$$V(k_l) = \sum_{i=l+1}^{n}(k_i - k_l)y_i + \sum_{i=1}^{l-1}(k_l - k_i)x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i > 0,\ \ l = r+1, \cdots, m$$

$$V(B) = \sum_{i=m+1}^{n}(k_i - B)y_i + \sum_{i=1}^{m}(B - k_i)x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i > 0$$

$$-M \le x_i, y_i \le M,\ \ i = 1, 2, \cdots, n$$

$$x_i, y_i \in \mathrm{Z},\ \ i = 1, 2, \cdots, n$$

此規劃模型即保證到期日股票價格若落在 A、B 之間 $(A \le s_T \le B)$，則將會有獲利機會。

4.4 到期日標的股價落在 *A* 與 *B* 之外 $(s_T \le A, s_T \ge B)$

若我們預期在到期日時，標的股價將會落在 A、B 之外 $(s_T \le A, s_T \ge B)$，其中 $k_r < A < k_{r+1}$、$k_m < B < k_{m+1}$，則我們模型可修改為如下

＜模型七＞

$$\max \quad \sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{n}(k_i - s_j)^+ y_i + \sum_{i=1}^{n}(s_j - k_i)^+ x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right)$$

$$+ \sum_{j=m+2}^{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}(k_i - s_j)^+ y_i + \sum_{i=1}^{n}(s_j - k_i)^+ x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right)$$

s.t $\quad V(k_l)=\sum_{i=l+1}^{n}(k_i-k_l)y_i+\sum_{i=1}^{l-1}(k_l-k_i)x_i-\sum_{i=1}^{n}p_i y_i-\sum_{i=1}^{n}c_i x_i>0\,,\ \ l=1,2,\cdots,r$

$$V(A)=\sum_{i=r+1}^{n}(k_i-A)y_i+\sum_{i=1}^{r}(A-k_i)x_i-\sum_{i=1}^{n}p_i y_i-\sum_{i=1}^{n}c_i x_i>0$$

$$V(B)=\sum_{i=m+1}^{n}(k_i-B)y_i+\sum_{i=1}^{m}(B-k_i)x_i-\sum_{i=1}^{n}p_i y_i-\sum_{i=1}^{n}c_i x_i>0$$

$$V(k_l)=\sum_{i=l+1}^{n}(k_i-k_l)y_i+\sum_{i=1}^{l-1}(k_l-k_i)x_i-\sum_{i=1}^{n}p_i y_i-\sum_{i=1}^{n}c_i x_i>0\,,\ \ l=m+1,\cdots,n$$

$$-M\le x_i,y_i\le M\,,\ \ i=1,2,\cdots,n$$

$$x_i,y_i\in Z\,,\ \ i=1,2,\cdots,n$$

此規劃模型即保證到期日股票價格若落在 A、B 之外 $(s_T\le A, s_T\ge B)$，則將會有獲利機會。我們將在下一章節給予實例驗證。