第二章　文獻回顧

Black 與 Scholes (1973)選擇權評價公式的推導，採用大家較熟知的解偏微分方程式(partial differential equation, PDE)的方法。而另外一個常用的選擇權評價方法是由 Cox 與 Ross (1976)利用風險中立的概念推導出來的，其中風險中立的機率測度在某些文獻中也稱做等價平賭測度(equivalent martingale measure, EMM)。原則上，PDE 和 EMM 兩種方法會導出相同的評價公式，但是它們所使用的數學工具卻是完全不相同。此外，使用風險中立機率測度的方法也可以應用在時間為片段型，標的資產未來可能的狀態為離散點且個數有限的情形之中。King (2002)即利用標的資產自我融資的過程，提出一個衍生性金融商品的套利模型，並指出若無套利機會時，可由拉格朗日乘數法則將套利模型導出拉格朗日乘子的可行性問題，並由可行性問題的解還原風險中立的機率測度。最後，我們回顧目前已經發展出來的還原風險中立機率測度的方法，其中包括有母數方法與無母數方法兩大類。

2.1 PDE 與 EMM 評價模型

Black-Scholes 的選擇權評價公式，是現今用來計算選擇權理論價格最常用的方法。本公式有下列幾個基本假設：

（一）選擇權的存續期間內，無風險利率為一常數。

（二）選擇權在到期日之前，標的資產沒有支付股利。

（三）為歐式選擇權，只能在到期日時履約。

（四）標的資產價格的變動為連續且滿足幾何布朗運動，即

$$\Delta S_t = mS_t\Delta t + s\,S_t\Delta W_t$$

其中 mS_t 為漂移(drift)項，$s\,S_t$ 為擴散(diffusion)項，且 ΔS_t 為標的資產價格變動，m 為標的資產價格預期報酬率，s 為標的資產報酬的波動度，變數 W_t 滿足韋那過程(Winner process)。

（五）沒有交易成本且標的資產可以無限分割。

我們概略說明 Black 與 Scholes 是如何導出選擇權的評價公式。假設買權的價格為 $F = F(S_t,\ t)$，首先建立一個無風險的投資組合(risk-free portfolio)，然後利用 Ito's 引理導出下述的偏微分方程式

$$-rF + F_t + rF_s S_t + \frac{1}{2} F_{ss} s^2 S_t^2 = 0,\ S_t > 0,\ 0 \le t \le T$$

其中，到期時買權的邊界條件(boundary condition)為

$$F(T) = \max(S_T - K,\ 0)$$

此偏微分方程式經過適當的變數變換可以轉成物理上常用的熱傳導方程式(heat-transfer equation)，其公式解是由 Churchill (1963)推導出來的，利用其結果即可導出著名的 Black-Scholes 買權理論價格公式 $C_t = F(S_t,\ t)$

$$C_t = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

其中，$d_1 = \dfrac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{1}{2} s^2)(T-t)}{s\sqrt{T-t}}$

$d_2 = d_1 - s\sqrt{T-t}$

C_t：買權目前理論價值

t：目前時間點（以年為單位）

T：到期日（以年為單位）

S_t：目前的標的資產價格

K：履約價

r：無風險利率（以年為標準）

s：標的資產報酬波動度

$N(d_i) = \int_{-\infty}^{d_i} \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx,\ i = 1,\ 2$，為標準常態分配的累積機率函數。

再根據買權與賣權的等價理論(put-call parity)，我們得知：買權價格加上履約價格的

折現應該等於標的資產價格再加上賣權的價格，即

$$C_t + Ke^{-r(T-t)} = S_t + P_t$$

其中，P_t：賣權目前理論價格

所以我們經由移項得到賣權的理論價格公式如下

$$P_t = -S_t N(-d_1) + Ke^{-r(T-t)} N(-d_2)$$

Black-Scholes 的選擇權評價公式推導過程十分的繁雜，並且在許多情況下無法得到公式解(closed form)。Cox 與 Ross (1976)使用與偏微分方程完全不同的技術來推導選擇權評價公式，其方法主要是將非平賭過程的資產價格S_t的隨機變動過程，經過機率測度的轉換後，成為新機率測度下的平賭(martingale)過程。

若存在一個機率測度Q使得

$$E_t^Q[S_{t+\Delta t} | I_t] = S_t,\ 0 \le t < T$$

其中Δt表示時間的變動量，則標的資產價格S_t的隨機變動過程稱為在Q下的平賭過程，Q稱為此過程的平賭機率測度，I_t表示信息(information)至時間t時的總和。如果市場無任何套利機會時，則必存在一個平賭機率測度Q等價於市場力量決定的主觀機率測度P，則此時Q稱為等價平賭測度，亦即風險中立機率測度。

Cox 與 Ross 的評價方法之要點為：假設市場無套利機會，並使得標的資產價格的動態過程變成平賭，再利用風險中立機率測度Q來評價選擇權，即

$$C_t = E_t^Q e^{-r(T-t)}[\max(S_T - K,\ 0)]$$

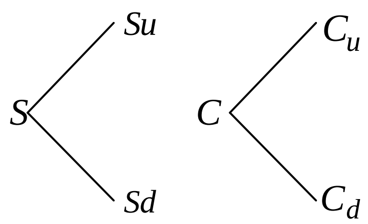
最後經過條件期望值的運算，以及使用累積機率分佈的概念，即可得到與 Black-Scholes 公式相同的結果。

2.2 二元樹與隱含二元樹

二元樹評價模型最早是由諾貝爾獎得主 Sharp (1978)提出的，後來 Cox、Ross 與 Rubinstein 三人將之發揚光大，故現在被稱為 CRR 模型。二元樹評價模型的基本概念是假設標的資產價格的變動是間斷的、離散的，非連續的情形，而且二元樹評價模型假設標的資產價格不是上漲到 Su，就是下跌到 Sd 兩種情形。本模型藉由求出到期日 T 時的標的資產價格，然後求出到期日 T 時的選擇權價格，再往前推算前一期 $T-1$ 時的選擇權價格，如此不斷的進行回溯(backward)的計算，最後得出選擇權期初 $t=0$ 的價格。簡單來說，二元樹模型基本上是由到期日的標的資產價格，計算到期日的選擇權價格，再回溯計算目前的選擇權價格。

假設選擇權還有一期到期，標的資產的現價為 S，買權履約價格為 K，預測未來標的資產價格有 p 的機會上漲到 Su 或是 $1-p$ 的機會下跌到 Sd，其中 $u=(1+$ 上漲的百分比)，$d=(1-$ 下跌的百分比)，預測的買權價格也會因為對應標的資產價格的漲跌，而有 $C_u=\max(Su-K,\ 0)$ 與 $C_d=\max(Sd-K,\ 0)$ 兩種情形。圖 2-1 即說明了一期模型的情況。

圖 2-1　一期模型示意圖



則此一期模型二元樹的買權現價為

$$C=\frac{pC_u+(1-p)C_d}{a}$$

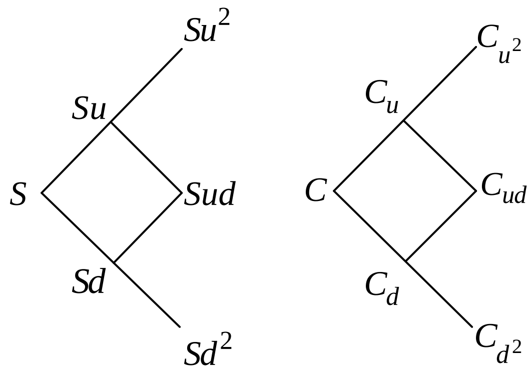
其中

$$p=\frac{a-d}{u-d}\text{，}\ 1-p=\frac{u-a}{u-d}\text{，}\ a=e^{r(T-t)}\text{為折現因子}$$

此外$u>a>d$**，否則會有套利的機會出現。**

現在，將單期的二元樹推廣至二期的二元樹評價模型。假設標的資產在第二期有連續上漲兩次的標的資產價格Su^2**，一漲一跌的**Sud **以及連續下跌兩次的** Sd^2**，則對應的買權到期價格分別為**$C_{u^2}=\max(Su^2-K,\ 0)$ **、** $C_{ud}=\max(Sud-K,\ 0)$ **與** $C_{d^2}=\max(Sd^2-K,\ 0)$**。如圖** 2-2**。**

圖 2-2　二期模型示意圖



則買權到期時的評價公式可表示為

$$C=\frac{p^2C_{u^2}+p(1-p)C_{ud}+(1-p)^2C_{d^2}}{a^2}$$

觀察一期模型以及二期模型，我們可以推導出多期到期的選擇權二元樹評價模型的一般式為

$$C=\frac{\sum_{j=m}^{n}\binom{n}{j}p^{j}(1-p)^{n-j}(u^{j}d^{n-j}S-K)}{a^{n}}$$

其中n為到期日標的資產價格分割的個數，當n愈大，即表示標的資產價格切割的愈細，而m表示為使買權處於價內的最少上漲次數。當到期時標的資產價格分割愈細時，本公式所計算出來的結果愈逼近 Black-Scholes 公式所求出的理論值。

Rubinstein (1994)提出隱含二元樹(implied binomial tree)的概念。他建議從二元樹中的到期日標的資產價格機率分佈，利用回溯的方法還原一組隱含的風險中立機率，作為評價選擇權的風險中立機率測度。

假設到期日標的資產價格及其機率分佈是由二期二元樹模型所產生，由於隱含的風險中立機率測度必須要能夠同時評價債券（或是廣義的無風險性資產）、股票（或是廣義的標的資產）以及選擇權。因此我們可以得到下列三式。

$$\frac{p_1+p_2+p_3}{(1+r)^2}=\frac{1}{(1+r)^2}$$

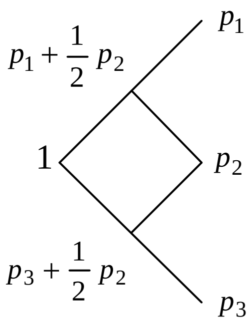
$$(Su^2)p_1+(Sud)p_2+(Sd^2)p_3=S(1+r)^2$$

$$(C_{u^2})p_1+(C_{ud})p_2+(C_{d^2})p_3=C(1+r)^2$$

解聯立方程式即可得到隱含風險中立機率為 p_1、 p_2 與 p_3。

在 Rubinstein 的模型還有一個假設：對於到達相同終點的起點，其所擁有的終點機率各半。於是我們可以得到如下的隱含風險中立機率測度。如圖 2-3。

圖 2-3　隱含的風險中立機率測度



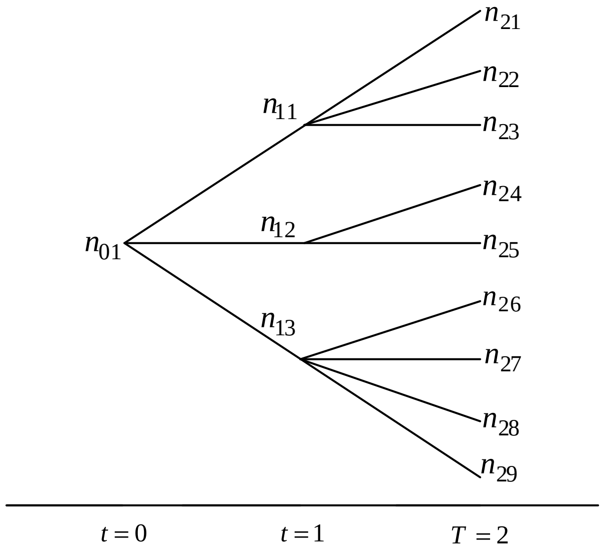
Rubinstein 的方法存在兩個缺點。第一，若有提早履約的情況則無法利用隱含二元樹還原風險中立機率測度。第二，對於到達相同終點的起點，其所擁有的終點機率各半之假設並不合理。其後 Jackwerth (1997)提出利用權重函數(weight function)改進 Rubinstein 的模型，Derman 與 Kani (1998)更進一步提出隱含三元樹的方法嘗試改進 Rubinstein 方法的缺失。

2.3 隨機規劃法還原風險中立機率測度

King (2002)利用標的資產自我融資的過程，提出一個衍生性金融商品的套利模型，並指出若無套利機會時，可利用拉格朗日乘數法則由套利模型導出拉格朗日乘子的可行性問題，並由可行性問題的解還原風險中立的機率測度。

假設時間為片段的型態，未來可能發生的狀態為離散點且個數有限，即 $\Omega = \{w_{t1}, w_{t2}, \ldots, w_{tI}\}$，$t = 0, 1, \ldots, T$，$i = 1, 2, \ldots, I$。我們可以利用狀態樹(scenario tree)表示如上的情形，例如圖 2-4 為二期模型，到期日 $T = 2$ 時共有 9 個可能發生的狀態，其中 n_{ti} 表示狀態樹中對應各個狀態 w_{ti} 的節點。

圖 2-4　狀態樹



集合 $\mathcal{N}_t$ **表示在時間** t **之前所有節點的集合，例如圖** 2-4 **中，** $\mathcal{N}_1=\{n_{01}, n_{11}, n_{12}, n_{13}\}$ **。每個節點** n_{ti} **，** $t=1, 2, \ldots, T$ **，** $i=1, 2, \ldots, I$ **，有一個唯一的父母節點** $a(n_{ti})\in\mathcal{N}_{t-1}$ **。每個節點** n_{ti} **，** $t=0, 1, \ldots, T-1$ **，** $i=1, 2, \ldots, I$ **，其孩子節點所成的集合，記為** $\mathcal{C}(n_{ti})$ **，** $\mathcal{C}(n_{ti})\subset\mathcal{N}_{t+1}$ **。若** P **表示到期日** T **時可能發生狀態的機率分佈，則我們知道**

$$p_n>0,\ n\in\mathcal{N}_T$$
$$\sum_{n\in\mathcal{N}_T} p_n=1$$

假設市場中有 $J+1$ **個可交易的標的資產，對應於每一個節點** n **，他們的價格分別是** $S=(S_n^0, S_n^1, \ldots, S_n^J)$ **，根據** Harrison **與** Pliska (1981)**的建議，計價標準** (numeraire)**資產** $j=0$ **的價格** S_n^0 **必須永遠為正, 例如美國政府公債或是台灣的定期存款等無風險性資產。令** $b_n=\frac{1}{S_n^0}$ **，則得到經過計價標準折扣過後的標的資產價格為** $Z_n^j=b_nS_n^j$ **，** $j=0, 1, \ldots, J$ **，其中** Z_n^0 **必等於** 1**。**

若在期初$t=0$時投資組合的價值為 0，經過自我融資的過程，使得投資組合在未來的每一個時間點皆為非負值，且有一個大於 0 的機率值使得到期日T時至少有一個使得投資組合價值必嚴格為正的狀態會發生，則稱此過程為套利。自我融資的過程可表示為$Z_n q_n = Z_n q_{a(n)}$，$n \in \mathcal{N}_t$，$t = 1, 2, \ldots, T$，其中

$$Z_n q_n = \sum_{j=0}^{J} Z_n^j q_n^j$$

q_n^j為持有標的資產 j 的數量。此處稱q_n為交易策略(trading strategy)。

King 指出若想要得知經過自我融資過程的投資組合是否具有套利機會，可以解以下的隨機規劃問題。

〈模型 P〉

$$\max_{(q)} \quad \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n Z_n q_n$$

$$\begin{array}{llll} \text{s.t.} & Z_0 q_0 & = 0 & : y_0 \\ & Z_n[q_n - q_{a(n)}] & = 0,\ n \in \mathcal{N}_t,\ t = 1, 2, \ldots, T & : y_n \\ & Z_n q_n & \geq 0,\ n \in \mathcal{N}_T & : x_n \end{array}$$

很明顯的，若套利機會存在，由於交易策略q_n的數量並無上下限，模型 P 的目標函數值會發散至無窮大；若套利機會不存在，則不論交易策略q_n為何，目標函數值必為 0。

利用拉格朗日乘數法則將模型 P 改寫成無限制式的求極值問題之形式，其中模型 P 的限制式分別對應拉格朗日乘子 y_0、 y_n與x_n，可以得到

$$L(?;\ \mathbf{x},\ \mathbf{y}) = \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n Z_n q_n - \sum_{t=1}^{T} \sum_{n \in \mathcal{N}_t} y_n Z_n[q_n - q_{a(n)}] - \sum_{n \in \mathcal{N}_T} x_n Z_n q_n,\ x_n \leq 0 \tag{1}$$

如果模型 P 的目標函數為 0，則式（1）的極值解亦必為 0，又$q_n = 0$是式（1）等於 0 的一個明顯解（意即沒有任何的自我融資過程發生），顯然的模型 P 的目標函數值也必為 0。沒有任何自我融資過程發生並不是套利的過程，為了避免此情形，將式（1）重新整理後可以簡化成可行性問題，如式（2）。

$$\begin{aligned} & x_n && \le 0,\ n \in \mathcal{N}_T \\ & [p_n - y_n - x_n] Z_n && = 0,\ n \in \mathcal{N}_T \\ & y_n Z_n - \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} y_m Z_m && = 0,\ n \in \mathcal{N}_t,\ t = 0,\ 1,\ \ldots,\ T-1 \end{aligned} \qquad (2)$$

若式（2）有可行解，則可以發現一個風險中立的機率測度Q使得$E^Q[Z_{t+1} | \mathcal{N}_t] = Z_t$，King 並証明$Q$的形式如下

$$Q = \left\{ q_n = \frac{y_n}{y_0} \middle| n \in \mathcal{N}_T \right\}$$

2.4 回顧還原風險中立機率測度的方法

根據 Jackwerth (1999)發表的文章，我們可將還原風險中立機率測度的方法區分成有母數方法和無母數方法兩種。

有母數方法又可以分成三群：第一為擴張法 (expansion methods)：本方法先假設一個基本的機率分佈，通常是常態分佈或是對數常態分佈，再加入一些修正變項使得風險機率分佈更具彈性，也更接近觀察到的選擇權市場價格之機率分佈。不過對於某些修正項，利用擴張法可能會得到風險中立機率分佈的一部份為負值，所以得到的結果必須再檢查有沒有違反機率值為非負值的條件。第二為一般化分佈法 (generalized distribution methods)：本方法利用本身就相當具有彈性的分佈當作風險中立機率分佈，這些分佈的參數除了如同常態分佈和對數常態分佈的兩個參數m與s外還有別的參數。Sherrick、Garcia 與 Tirupattur (1995)即採用此方法利用 BurrIII 分佈於黃豆的期權市場。第三為混合法(mixed methods)：本方法通常是給予參數不

完全相同的機率分佈不同的機率值，雖然比上述兩個方法更具有彈性，但缺點是其參數個數會隨著機率分佈的個數成長地相當快。Melick與 Thomas (1997)採用此方法混合了三個對數常態分佈應用於美國原油期權市場還原風險中立機率測度，並計算出可能的提早履約價。

無母數方法大致上也分成三個類型：第一為核心迴歸法 (kernal regression methods)：本方法的概念類似於迴歸的方法，和迴歸一樣的是核心迴歸法也想要得到一配適函數，但和迴歸不同的是，核心迴歸法並沒有明確指出函數中的參數。核心迴歸法假設每一個觀察到的資料點都應該視為可能函數範圍的中心點。例如，如果觀察到選擇權履約價 K_i 下的隱含波動度為 $s_i(K_i)$，則一維的核心迴歸配適函數即為

$$s(K)=\frac{\sum_{i=1}^{n}k(\frac{K-K_i}{h})s_i(K_i)}{\sum_{i=1}^{n}k(\frac{K-K_i}{h})}$$

其中 $k(x)$ 為資料點的分佈，通常假設成標準常態分佈，h 為資料散佈的寬度，控制著核心迴歸配適函數的平滑度。由於核心迴歸配適函數與觀察資料具有很大的相關性，所以這個方法的使用受到相當大的限制。第二為極大化熵法(maximum-entropy methods)：這是一個在遺失信息的情況下，希望不確定度能夠盡量降低的方法。本方法如同貝氏統計的架構，先給一個先驗機率分佈（prior distribution）O，然後求出後驗風險中立機率分佈(posterior risk-neutral distribution) P。步驟為先給定條件：$0\le p_i\le 1$，$\sum_i p_i=1$，以及標的資產與選擇權的現價，然後極大化熵

$$-\sum_i p_i\ln(\frac{p_i}{o_i})$$

以求出後驗的風險中立機率分佈。第三為曲線配適法(curve-fitting methods)：本方法通常是利用一些具有彈性的函數去逼近不同履約價下的隱含波動度或是風險中立機率分佈，最常用的方法是使選擇權的市場價格和曲線配適法所建議的理論價格具有

最小的平方誤差。