第三章　由市場價格建構選擇權評價模型

投資者在面對到期日相同的一序列不同履約價格的選擇權時，應該如何建立最佳的組合交易策略，這個問題已有許多的方法可循，但是這些方法卻無法涵蓋複雜多變的組合策略，楊靜宜(2004)提出了利用整數線性規劃的方式建立選擇權的最佳交易策略，本章即擴充該論文所使用之模型，並探討如何從選擇權套利模型導出拉格朗日乘子的可行性問題，並且利用導出的可行性問題重新建構線性規劃模型，討論如何由觀測的市場價格中還原風險中立的機率測度。

3.1 選擇權的套利模型

考慮歐式買權履約價格為$k>0$，令t表示投資始點或是現在時刻，T 表示到期日，S_t表示標的資產的現價，S_T 表示標的資產到期時的價格，C_T 為買權的到期價值，買權的價格（權利金）為 c，無風險利率為 r，則買權到期損益之現值可以表示如下

$$
\begin{aligned}
e^{-r(T-t)}C_T - c &= \begin{cases} e^{-r(T-t)}(S_T - k) - c & \text{當 } S_T > k \\ 0 - c & \text{其他} \end{cases} \\
&= e^{-r(T-t)} \max(S_T - k,\ 0) - c \\
&= e^{-r(T-t)} (S_T - k)^+ - c
\end{aligned}
$$

其中

$$
(x)^+ = \begin{cases} x & \text{當 } x > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}
$$

同樣的，歐式賣權的到期價值為P_T，賣權的價格為 p，則賣權的到期損益之現值亦可使用數學式表示如下

$$
e^{-r(T-t)}P_T - p = \begin{cases} e^{-r(T-t)}(k - S_T) - p & \text{當 } k > S_T \\ 0 - p & \text{其他} \end{cases}
$$

$$
= e^{-r(T-t)} \max(S_T - k,\ 0) - p
$$

$$
= e^{-r(T-t)} (k - S_T)^+ - p
$$

若我們將買權與賣權依照不同的買賣數量組合起來，則可形成各式各樣不同的到期損益情形 為建立一序列相同標的資產且不同履約價的選擇權套利模型，假設：（一）只考慮單一期間問題，即持有這些選擇權直到到期日；（二）忽略交易費用及保證金的花費；（三）選擇權皆為歐式選擇權。

給定k_i為第 i 個選擇權的履約價，其中 $0 < k_1 < \cdots < k_n$， $i = 1, 2, \ldots, n$ ；x_i 為選擇權組合中買權的數量；y_i 為選擇權組合中賣權的數量；c_i 代表履約價為k_i 的買權價格；p_i 代表履約價為 k_i 的賣權價格；$V(S_T)$ 代表到期日 T 時，標的資產價格為 S_T 時，選擇權投資組合損益的現值。假設我們購買 x_i 口（若 x_i 為負，則代表賣出的口數）履約價為k_i 的買權，以及購買 y_i 口履約價為 k_i 的賣權，則選擇權投資組合到期損益之現值以數學式表示如下

$$
V(S_T) = \sum_{i=1}^{n} \left[e^{-r(T-t)} (S_T - k_i)^+ - c_i \right] x_i + \sum_{i=1}^{n} \left[e^{-r(T-t)} (k_i - S_T)^+ - p_i \right] y_i \tag{3}
$$

將式（3）左右兩邊對S_T 微分，我們得到

$$
V'(S_T) = \begin{cases} e^{-r(T-t)} \left[-\sum_{i=1}^{n} y_i \right] & \text{當} 0 < S_T < k_1 \\ e^{-r(T-t)} \left[\sum_{i=1}^{l-1} x_i - \sum_{i=l}^{n} y_i \right] & \text{當} k_{l-1} < S_T < k_l \text{，} l = 2, 3, \ldots, n \\ e^{-r(T-t)} \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \right] & \text{當} k_n < S_T \end{cases} \tag{4}
$$

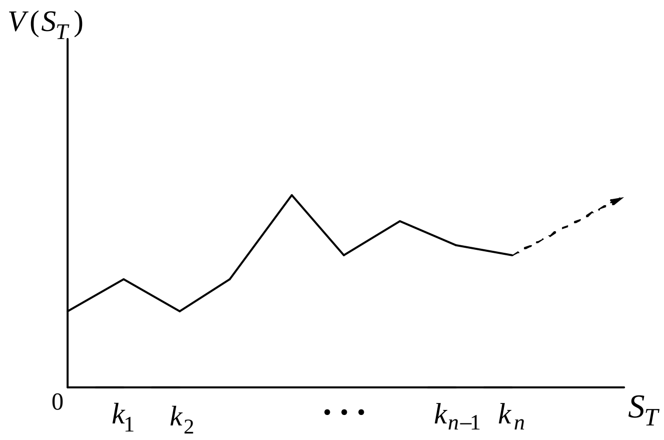
由式（4）可知$V(S_T)$ 的導數在每一履約價的區間$(k_{l-1},\ k_l)$，$l = 1, 2, \cdots, n$，皆為常

數，意謂$V(S_T)$在每一履約價之間皆為一線性函數，所以$V(S_T)$為一片斷型的線性函數。若S_T恰等於$0, k_1, \ldots, k_n$時的損益$V(S_T)$皆為正，且S_T在大於k_n時，$V(S_T)$的斜率不為負值，即可保證無論標的資產價格怎麼變動，此投資組合皆有套利機會。意即

$$
\begin{aligned}
&V(0) \geq 0 \\
&V(k_l) \geq 0, \quad l = 1, 2, \ldots, n \\
&V'(S_T) = e^{-r(T-t)} \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \right] \geq 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

圖 3-1 即說明到期損益之現值恆為正的情形。

圖 3-1　到期損益之現值恆為正



此處我們仍沿用第二章的符號，使用$E^P(\bullet)$及$E^Q(\bullet)$分別表示主觀機率測度下與風險中立機率測度下的期望值。若不限制買權與賣權交易的數量，並考慮實務上，交易量x_i與y_i為整數，為求期望損益為最大並滿足條件式（5），我們得到選擇權的套利模型如下。

〈模型一〉

$$\max \quad E^P\left[V(S_T)\right]$$

$$\text{s.t.} \quad V(0)=\sum_{i=1}^{n}(-c_i)x_i+\sum_{i=1}^{n}\left[e^{-r(T-t)}k_i-p_i\right]y_i \ge 0$$

$$V(k_l)=\sum_{i=1}^{n}\left[e^{-r(T-t)}(k_l-k_i)^+-c_i\right]x_i+\sum_{i=1}^{n}\left[e^{-r(T-t)}(k_i-k_l)^+-p_i\right]y_i \ge 0,\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

$$V'(S_T)=e^{-r(T-t)}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\right]\ge 0$$

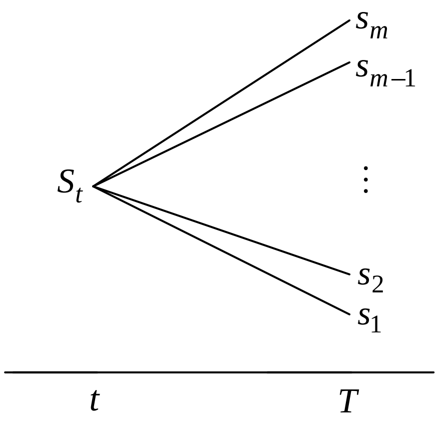
$$x_i, y_i \in Z,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

由於本模型只考慮單一期間的問題，時間長度為一定值，標的資產價格的變動有一個預見的範圍，或者標的資產價格具有漲跌幅限制（例如目前台灣股市每日漲跌幅限制為 7%）。令標的資產未來價格的範圍介於s_1**與**s_m**之間，當然，**s_1**之值可以是標的資產價格小於**k_1**甚至跌到 0 的情形，**s_m**可以是一個遠大於最大履約價**k_n**的值。因此**S_T**在大於**k_n**時，**$V(S_T)$**的斜率不為負值之條件可用**$V(s_j)\ge 0$**，**$s_j > k_n$**，取代，另外，當**$s_j < k_1$**時，也必須滿足**$V(s_j)\ge 0$**。**

為了簡化問題，我們假設未來可能發生的狀態為離散點且個數有限，即未來有m**個可能的狀態，此**m**個狀態就足以代表標的資產可能的走向，且每個狀態所對應的標的資產價格為**s_j**，**$j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$**，其中**$s_1<\cdots<s_m$**，如圖 3-2 的狀態樹。此外，為了滿足式（5）的條件，在不失一般性之下，**$\{s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_m\}$**應選定使得履約價**$\{k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n\}$**為**$\{s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_m\}$**的部份集合，並且滿足**$V(s_j)\ge 0$**，**$s_j > k_n$**，**$s_j < k_1$**如此一來對於每一個**$s_j$**，到期日時投資組合的損益**$V(s_j)$**必為正值，則式（5）可以改寫成**

$$V(s_j)\ge 0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m \qquad (6)$$

圖 3-2　到期時m個可能的標的資產價格



為避免主觀機率測度P的符號與賣權價格p_i混淆，令$P=(p_1, p_2, \dots, p_m)$，p_j為狀態s_j發生的機率，其中$p_j \geq 0$且$\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$，式（3**）的期望值可寫成**

$$
\begin{aligned}
E^P[V(S_T)] &= \sum_{j=1}^{m} p_j V(s_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} p_j \sum_{i=1}^{n} \left[e^{-r(T-t)} (s_j - k_i)^+ - c_i \right] x_i + \sum_{j=1}^{m} p_j \sum_{i=1}^{n} \left[e^{-r(T-t)} (k_i - s_j)^+ - p_i \right] y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_j \left[e^{-r(T-t)} (s_j - k_i)^+ - c_i \right] x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_j \left[e^{-r(T-t)} (k_i - s_j)^+ - p_i \right] y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} E^P \left[e^{-r(T-t)} (S_T - k_i)^+ - c_i \right] x_i + \sum_{i=1}^{n} E^P \left[e^{-r(T-t)} (k_i - S_T)^+ - p_i \right] y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[e^{-r(T-t)} E^P (S_T - k_i)^+ - c_i \right] x_i + \sum_{i=1}^{n} \left[e^{-r(T-t)} E^P (k_i - S_T)^+ - p_i \right] y_i
\end{aligned}
\tag{7}
$$

根據式（6**）與式（**7**），模型一可修正如下。**

〈模型二〉

$$\max \quad \sum_{i=1}^{n}\left[e^{-r(T-t)}E^{P}(S_T-k_i)^{+}-c_i\right]x_i+\sum_{i=1}^{n}\left[e^{-r(T-t)}E^{P}(k_i-S_T)^{+}-p_i\right]y_i$$

$$\text{s.t.} \quad V(s_j)=\sum_{i=1}^{n}\left[e^{-r(T-t)}(s_j-k_i)^{+}-c_i\right]x_i+\sum_{i=1}^{n}\left[e^{-r(T-t)}(k_i-s_j)^{+}-p_i\right]y_i\ge 0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

$$x_i, y_i \in Z,\ i=1, 2,\ \ldots,\ n$$

若假設標的資產可以無限分割，則模型二中的交易量 x_i 與 y_i 為整數的條件，可以放鬆成 x_i 與 y_i 為實數，於是模型二可修正如下。

〈模型三〉

$$\max \quad \sum_{i=1}^{n}\left[e^{-r(T-t)}E^{P}(S_T-k_i)^{+}-c_i\right]x_i+\sum_{i=1}^{n}\left[e^{-r(T-t)}E^{P}(k_i-S_T)^{+}-p_i\right]y_i$$

$$\text{s.t.} \quad V(s_j)=\sum_{i=1}^{n}\left[e^{-r(T-t)}(s_j-k_i)^{+}-c_i\right]x_i+\sum_{i=1}^{n}\left[e^{-r(T-t)}(k_i-s_j)^{+}-p_i\right]y_i\ge 0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

$$x_i, y_i \in R,\ i=1, 2,\ \ldots,\ n$$

模型三即是我們所需要的選擇權套利模型。

3.2 還原風險中立機率測度

由模型三可以發現，若套利機會存在，由於交易量 x_i 與 y_i 的值均無上下限，目標函數值將會發散至無窮大；若套利機會不存在，則不論 x_i 與 y_i 的值為何，目標函數值必為 0。

選擇權的價值（權利金）包括內含價值以及時間價值。對應履約價為 k_i 的買權價值與賣權價值分別為

$$\text{買權權利金}=(S_T-k_i)^{+}+\text{時間價值}$$

與

$$\text{賣權權利金} = (k_i - S_T)^+ + \text{時間價值}$$

其中$(S_T - k_i)^+$與$(k_i - S_T)^+$即分別為買權與賣權的內含價值。根據等價平賭測度法則，若市場無套利機會，必定存在一個風險中立的機率測度Q，使得買權的價格為

$$c_i = e^{-r(T-t)} E^Q (S_T - k_i)^+$$

賣權的價格為

$$p_i = e^{-r(T-t)} E^Q (k_i - S_T)^+ \tag{8}$$

此評價公式即包含了內含價值以及時間價值，並且符合風險中立的假設。

首先將模型三利用拉格朗日乘數法則改寫成無限制式的求極值問題之形式，將模型三的限制式分別乘以拉格朗日乘子$h_j \geq 0$， $j = 1, 2, \ldots, m$。

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}; ?) = &\sum_{i=1}^{n} \left[e^{-r(T-t)} E^P (S_T - k_i)^+ - c_i \right] x_i + \sum_{i=1}^{n} \left[e^{-r(T-t)} E^P (k_i - S_T)^+ - p_i \right] y_i \\ &+ \sum_{j=1}^{m} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[e^{-r(T-t)} (s_j - k_i)^+ - c_i \right] x_i + \sum_{i=1}^{n} \left[e^{-r(T-t)} (k_i - s_j)^+ - p_i \right] y_i \right\} h_j \end{aligned}$$

再將含有相同x_i與y_i的項目擺在一起，重新整理後得到

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}; ?) = &\sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[e^{-r(T-t)} E^P (S_T - k_i)^+ - c_i \right] + \sum_{j=1}^{m} \left[e^{-r(T-t)} (s_j - k_i)^+ - c_i \right] h_j \right\} x_i \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[e^{-r(T-t)} E^P (k_i - S_T)^+ - p_i \right] + \sum_{j=1}^{m} \left[e^{-r(T-t)} (k_i - s_j)^+ - p_i \right] h_j \right\} y_i \end{aligned} \tag{9}$$

如果模型三的目標函數為 0，則式(9)的極值解亦必為 0，又對於$i = 1, 2, \ldots, n$，$x_i = 0$與$y_i = 0$是式（9）等於 0 的一個明顯解（意即沒有任何交易動作發生），顯然的模型三的目標函數值也必為 0。因此，若模型三存在一組x_i與y_i不全為 0 的解使得目標函數為 0，意即存在一組x_i與y_i不全為 0 的解使得式（9）為 0。式（9）

等於 0 若且唯若

$$\left[e^{-r(T-t)}E^{P}(S_T-k_i)^{+}-c_i\right]+\sum_{j=1}^{m}\left[e^{-r(T-t)}(s_j-k_i)^{+}-c_i\right]h_j=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$
$$\left[e^{-r(T-t)}E^{P}(k_i-S_T)^{+}-p_i\right]+\sum_{j=1}^{m}\left[e^{-r(T-t)}(k_i-s_j)^{+}-p_i\right]h_j=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n \quad (10)$$

又根據市場無套利的假設，必存在一個風險中立的機率測度Q等價於 P，因此可將式（10）中的期望值換成$E^{Q}(\bullet)$，使得

$$c_i=e^{-r(T-t)}E^{Q}(S_T-k_i)^{+}$$

與

$$p_i=e^{-r(T-t)}E^{Q}(k_i-S_T)^{+}$$

式（10）可以簡化成式（11）。

$$\sum_{j=1}^{m}\left[e^{-r(T-t)}(s_j-k_i)^{+}-c_i\right]h_j=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$
$$\sum_{j=1}^{m}\left[e^{-r(T-t)}(k_i-s_j)^{+}-p_i\right]h_j=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n \quad (11)$$

只要h_j不全為 0，式（11）可經展開、移項改寫成

$$c_i=e^{-r(T-t)}\sum_{j=1}^{m}(s_j-k_i)^{+}\frac{h_j}{\sum_{j=1}^{m}h_j},\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

與

$$p_i=e^{-r(T-t)}\sum_{j=1}^{m}(k_i-s_j)^{+}\frac{h_j}{\sum_{j=1}^{m}h_j},\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

此處為簡化數學式，定義

$$\sum_{j=1}^{m} h_j = h_0 \ \text{且} \ q_j = \frac{h_j}{h_0} \tag{12}$$

得到

$$c_i = e^{-r(T-t)} \sum_{j=1}^{m} (s_j - k_i)^+ q_j, \ i = 1, 2, \dots, n$$

與

$$p_i = e^{-r(T-t)} \sum_{j=1}^{m} (k_i - s_j)^+ q_j, \ i = 1, 2, \dots, n \tag{13}$$

根據式（12**）且**$h_j \geq 0$**，可得**

$$q_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$$

故可將$Q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$ **視為一機率測度**

根據 Haugh (2004)**的講義，我們給予幾個定義與定理。假設市場共有**$N+1$**個可交易的資產，令**S_t^i **表示在時間**t**時第**i**個資產的價格，**$i = 0, 1, \dots, N$ **；**s_j^i **表示到期日**T **時第** i **個資產在狀態**w_j **下的價格，** $j = 1, 2, \dots, m$ **。並且假設現金帳戶**(cash account)**為一零風險性資產並作為計價標準，其在時間**t**時的價格為** S_t^0**，且到期日**T **時價格為** S_T^0**。現金帳戶為一個賺取無風險利率下之利息的資產。**

定義 3-1

若投資組合是由市場上可交易的資產組合而成，其時間t**時的價格** X_t **滿足**

$$X_t = \sum_{j=1}^{m} j_j X(w_j)$$

則我們稱$\Psi = (j_1, j_2, \dots, j_m)$**為狀態價格**(state price)**。**

定義 3-2

若機率測度 $Q=(q_1,\ q_2,\ \ldots,q_m)$ **滿足**

(1) $q_j>0$ **，** $j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$

(2) **對計價標準折扣後之標的資產價格的動態過程為平賭過程。即**

$$\frac{S_t}{S_t^0}=E_t^Q\left[\frac{S_T}{S_T^0}\right] \tag{14}$$

則 Q **為一風險中立機率測度，其中** E_t^Q **表示對時間** t **之前所有信息的總合做條件期望值。**

定理 3-3

若存在正值的狀態價格 Ψ **，則風險中立的機率測度** Q **必存在，且** Ψ **與** Q **具有** 1-1 **關係。**

證明：若存在一個正值的狀態價格 $\Psi=(j_1,\ j_2,\ \ldots,j_m)$ **，則**

$$S_t=\sum_{j=1}^{m} j_j s_j=(\sum_{j=1}^{m} j_j s_j^0)\sum_{j=1}^{m}\left[(\frac{j_j s_j^0}{\sum_{j=1}^{m} j_j s_j^0})(\frac{s_j}{s_j^0})\right] \tag{15}$$

其中

$$\sum_{j=1}^{m} j_j s_j^0=S_t^0$$

定義

$$q_j=\frac{j_j s_j^0}{\sum_{j=1}^{m} j_j s_j^0} \tag{16}$$

則 $Q=(q_1,\ q_2,\ \ldots,q_m)$ **即為一個機率測度。**

由式（14）、式（15）與式（16）可得

$$\frac{S_t}{S_t^0}=\sum_{j=1}^{m}q_j\frac{s_j}{s_j^0}=E_t^Q\left[\frac{S_T}{S_T^0}\right]$$

所以Q為一風險中立的機率測度 且由式(16)可知Ψ 與Q具有 1-1 關係 ■

令現金帳戶$e^{r(T-t)}$為計價標準，由式（8）與式（13）得到

$$c_i=E^Q\left[\frac{(S_T-k_i)^+}{e^{r(T-t)}}\right]=\sum_{j=1}^{m}\frac{(s_j-k_i)^+}{e^{r(T-t)}}q_j$$

與

$$p_i=E^Q\left[\frac{(k_i-S_T)^+}{e^{r(T-t)}}\right]=\sum_{j=1}^{m}\frac{(k_i-s_j)^+}{e^{r(T-t)}}q_j$$

根據定理 3.3，得到$Q=(q_1,\ q_2,\ \ldots,q_m)$即為風險中立的機率測度，且由式（16）可得知$q_j$是由狀態價格與現金帳戶組合而成，拉格朗日乘子$h_j$為狀態價格與現金帳戶之乘積（若不考慮折現，則拉格朗日乘子h_j即為狀態價格）。

式（11）中h_j全為 0 為一個明顯的解，因此我們將式（11）作為限制式，令目標函數為$\sum_{j=1}^{m}r_jh_j$（目標函數為何種形式尚可作更多的討論），其中權重r_j為一主觀的機率值（與前述的主觀機率$P=(p_1,\ \ldots,\ p_2,\ \ldots,\ p_m)$可不同），$r_j\geq 0$，$j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$，$\sum_{j=1}^{m}r_j=1$。我們重新建構一個極大化目標函數的線性規劃模型，以保證h_j不全為 0，如模型四。

〈模型四〉

$$\max \quad \sum_{j=1}^{m} r_j h_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{m}\left[e^{-r(T-t)}(s_j-k_i)^+-c_i\right]h_j=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left[e^{-r(T-t)}(k_i-s_j)^+-p_i\right]h_j=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

$$h_j \ge 0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

在$2n$維空間中，模型四中限制式所表示的平面皆會通過原點，並且因為拉格朗日乘子h_j為大於 0 或等於 0 的數，所以這些平面不僅通過原點還會向正方向無限延伸，故目標函數值若不是等於下界 0，就會發散至無窮大。因此，可以給定每一個h_j一個上界U，以避免目標函數值發散至無窮大。

把模型四的限制式寫成矩陣的形式如下。

$$\begin{pmatrix} e^{-r(T-t)}(s_1-k_1)^+-c_1 & \cdots & e^{-r(T-t)}(s_m-k_1)^+-c_1 \\ \vdots & & \vdots \\ e^{-r(T-t)}(s_1-k_n)^+-c_n & \cdots & e^{-r(T-t)}(s_m-k_n)^+-c_n \\ e^{-r(T-t)}(k_1-s_1)^+-p_1 & \cdots & e^{-r(T-t)}(k_1-s_m)^+-p_1 \\ \vdots & & \vdots \\ e^{-r(T-t)}(k_n-s_1)^+-p_n & \cdots & e^{-r(T-t)}(k_n-s_m)^+-p_n \end{pmatrix}_{2n\times m} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}_{m\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{2n\times 1}$$

將上面的矩陣簡寫成

$$A\mathbf{?}=0$$

若$2n \ge m$，並且限制式的係數矩陣A為滿秩(full rank)，即線性獨立的限制式個數等於h_j的個數，由於 RHS 為零向量，所有h_j的解一定是 0，所以模型四的目標函數值也必定是 0。因此為了確保解空間不是只有原點一點，我們必須適當的選取m的大小，即未來可能的標的資產價格s_j的個數，使得m至少要大於矩陣A的秩(rank)，

即 m 至少要大於相互線性獨立限制式的個數。或者，我們可以僅選取部分的限制式，使得相互線性獨立限制式的個數小於 m。不管是用上述哪一種方法，解空間皆會是一個一維以上的平面，使得模型四的目標函數值不為 0，於是模型四可修正如模型五或模型六。

〈模型五〉

$$\max \quad \sum_{j=1}^{m} r_j h_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{m}\left[e^{-r(T-t)}(s_j-k_i)^+ - c_i\right]h_j = 0,\ \ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left[e^{-r(T-t)}(k_i-s_j)^+ - p_i\right]h_j = 0,\ \ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

$$0 \le h_j \le U,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ \text{其中}\ \ m > \operatorname{rank}(A)$$

〈模型六〉

$$\max \quad \sum_{j=1}^{m} r_j h_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{m}\left[e^{-r(T-t)}(s_j-k_i)^+ - c_i\right]h_j = 0,\ i \in I_s$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left[e^{-r(T-t)}(k_i-s_j)^+ - p_i\right]h_j = 0,\ i \in I_s$$

$$0 \le h_j \le U,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

其中 I_s 為 $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ 的部分集合。

模型五或模型六的解 h_j， $j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$ ，即可用來還原風險中立的機率測度 $Q=(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m)$。