4 準貝氏法與吉氏取樣器的比較結果

在本文中，我們利用Fortran 90比較quasi-Bayes和Gibbs sampler對於貝氏法的相對誤差。

首先，假設有3個類別$(I=3)$，4種可能的回答$(J=4)$，考慮一組真實母體

$$
\begin{aligned}
\theta &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix} \\
\Lambda &= \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

利用此母體建立一組觀察值$r=(2 \quad 4 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$。

而先驗參數$\mathbf{a},\mathbf{b}$的選取分以下3種情況：

1. $\mathbf{a},\mathbf{b}$與真實母體比例相同。
2. $\mathbf{a},\mathbf{b}$分別與真實母體比例有最大10%的誤差。
3. $\mathbf{a},\mathbf{b}$分別與真實母體比例有最大50%的誤差。

每種情況又分做

1. $a_+ = 3, 10, 50, 100, 1000$。
2. $b_{i+} = 3, 10, 50, 100, 1000 \quad i = 1, 2, 3$

共25種狀況做討論。

每一組分別對觀察值個數$n = 1 \sim 7$進行模擬比較。對於相同觀察值個數，比較其與貝氏法的相對誤差

$$
rel - \tilde{\theta}_i = \frac{\tilde{\theta}_i - \hat{\theta}_i}{\hat{\theta}_i} \qquad , i = 1, 2, \ldots, I
$$

其中$\hat{\theta}_i$代表貝氏法對θ_i的驗後均數，並求其平均相對誤差

$$rel-\tilde{\tilde{\theta}}=\frac{\sum_{i=1}^{I} rel-\tilde{\theta}_i}{I}$$

作爲比較的依據。

由於隨著觀察值order的改變，quasi-Bayes和Gibbs sampler對於參數的估計值皆隨著不同，因此對於相同的觀察值，我們將所有的order考慮進去，求其平均相對誤差$rel-\tilde{\tilde{\theta}}$的平均做爲我們最後比較的依據。

此75種數據所繪出的折線圖將放在附錄中。

針對觀察值order的改變會影響quasi-Bayes和Gibbs sampler對參數的估計問題，之後我們也分別取了$I=2$，$J=3$與$I=3$，$J=4$兩種情況來做討論，以不同order得出的估計值的MSE($\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{I}\frac{\sum_{k=1}^{K}(\tilde{\theta}_i^{(k)}-\hat{\theta}_i)^2}{K}$，其中$\tilde{\theta}_i^{(k)}$代表利用quasi-Bayes或Gibbs sampler對第k種資料順序(order)所作的估計值)來作爲我們比較的依據。經過比較之後發現，在此兩種情況下，各組做出來的MSE其實都很小，皆在0.002以下，代表雖然order的改變會影響quasi-Bayes和Gibbs sampler對參數的估計，但是其實影響並不大，爲了方便比較，我將各種狀況下的MSE做成了折線圖，但因各種狀況所呈現出來的結果差異性不大，因此僅附$I=2$，$J=3$，驗前參數$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$與真實母體比例有最大10%的相對誤差情況下所做出來的MSE折線圖於附錄中。

第一部分：$\mathbf{a}, \mathbf{b}$與真實母體比例無誤差時，相對誤差的比較。

prior $\mathbf{a}$的選取爲：

當$a_+ = 3$時，　$\mathbf{a} = (1.5 \quad 0.9 \quad 0.6)$

當$a_+ = 10$時，　$\mathbf{a} = (5 \quad 3 \quad 2)$

當$a_+ = 50$時，　$\mathbf{a} = (25 \quad 15 \quad 10)$

當$a_+ = 100$時，　$\mathbf{a} = (50 \quad 30 \quad 20)$

當$a_+ = 1000$時，　$\mathbf{a} = (500 \quad 300 \quad 200)$

prior $\mathbf{b}$的選取爲：

當$b_{i+} = 3$時，　$b = \begin{pmatrix} 1.8 & 0.6 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 2.1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.6 & 1.5 & 0.6 \end{pmatrix}$

當$b_{i+} = 10$時，　$b = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

當$b_{i+} = 50$時，　$b = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 5 & 5 \\ 5 & 35 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 25 & 10 \end{pmatrix}$

當$b_{i+} = 100$時，　$b = \begin{pmatrix} 60 & 20 & 10 & 10 \\ 10 & 70 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 50 & 20 \end{pmatrix}$

當$b_{i+} = 1000$時，　$b = \begin{pmatrix} 600 & 200 & 100 & 100 \\ 100 & 700 & 100 & 100 \\ 100 & 200 & 500 & 200 \end{pmatrix}$

Case 1：$b_{i+} = 3$

		n						
a_+	$rel - \tilde{\tilde{\theta}}$	1	2	3	4	5	6	7
3	Gibbs	0.047317	0.026177	0.035236	0.021743	0.015642	0.012472	0.013098
	quasi	0	0.012095	0.016707	0.031965	0.028345	0.02951	0.030446
10	Gibbs	0.024583	0.021615	0.021527	0.018334	0.01485	0.013097	0.011239
	quasi	0	0.001337	0.000954	0.00486	0.008612	0.010398	0.010833
50	Gibbs	0.010278	0.009895	0.010327	0.00987	0.009215	0.008888	0.00847
	quasi	0	0.000585	0.001074	0.001361	0.002755	0.003696	0.004204
100	Gibbs	0.007174	0.006933	0.007191	0.007105	0.006687	0.006545	0.006423
	quasi	0	0.000335	0.000623	0.000803	0.001522	0.002054	0.002367
1000	Gibbs	0.002176	0.002146	0.002181	0.002184	0.002151	0.002124	0.002094
	quasi	0	0.000038	0.000071	0.000094	0.000167	0.000227	0.000265

表 1: 誤差0%, $b_{i+} = 3$

Case 2：$b_{i+} = 10$

		n						
a_+	$rel - \tilde{\tilde{\theta}}$	1	2	3	4	5	6	7
3	Gibbs	0.041611	0.026325	0.026245	0.015052	0.014025	0.016452	0.0141
	quasi	0	0.017058	0.033316	0.046016	0.040308	0.044418	0.050465
10	Gibbs	0.022234	0.023063	0.022109	0.0195	0.016399	0.015251	0.013495
	quasi	0	0.002106	0.004156	0.007604	0.007213	0.007211	0.007465
50	Gibbs	0.009593	0.009853	0.009732	0.009841	0.008892	0.008517	0.008265
	quasi	0	0.000149	0.000266	0.000467	0.001003	0.001453	0.001773
100	Gibbs	0.006891	0.006993	0.006946	0.006977	0.006569	0.006412	0.006193
	quasi	0	0.000091	0.00023	0.000269	0.000544	0.000836	0.001076
1000	Gibbs	0.002145	0.002168	0.002146	0.002143	0.002121	0.002106	0.002083
	quasi	0	0.000012	0.000032	0.000038	0.000064	0.000098	0.00013

表 2: 誤差0%, $b_{i+} = 10$

Case 3：$b_{i+} = 50$

		n						
a_+	$rel - \tilde{\tilde{\theta}}$	1	2	3	4	5	6	7
3	Gibbs	0.034889	0.036948	0.029707	0.018403	0.016383	0.018584	0.015345
	quasi	0	0.018929	0.043522	0.054519	0.046815	0.055494	0.074019
10	Gibbs	0.02077	0.021292	0.019575	0.018346	0.015761	0.014631	0.013365
	quasi	0	0.002834	0.007103	0.010162	0.009196	0.010571	0.013802
50	Gibbs	0.009756	0.009775	0.009547	0.009656	0.008605	0.008566	0.008017
	quasi	0	0.000111	0.000267	0.000501	0.000491	0.000482	0.00053
100	Gibbs	0.006863	0.006979	0.006811	0.00693	0.006465	0.006364	0.00612
	quasi	0	0.000021	0.000031	0.000111	0.000148	0.000161	0.00015
1000	Gibbs	0.002147	0.002161	0.002156	0.002153	0.002113	0.002111	0.002093
	quasi	0	0.000002	0.000007	0.000008	0.000014	0.000023	0.000033

表 3: 誤差0%, $b_{i+} = 50$

Case 4：$b_{i+} = 100$

		n						
a_+	$rel - \tilde{\tilde{\theta}}$	1	2	3	4	5	6	7
3	Gibbs	0.03391	0.033291	0.032741	0.017891	0.0176	0.017466	0.014873
	quasi	0	0.01917	0.045081	0.055787	0.047846	0.057454	0.078803
10	Gibbs	0.020535	0.021284	0.020101	0.017904	0.014543	0.01459	0.012958
	quasi	0	0.002928	0.007558	0.010598	0.009556	0.01126	0.015187
50	Gibbs	0.009363	0.009518	0.009485	0.009523	0.008387	0.008424	0.008018
	quasi	0	0.000132	0.00035	0.000569	0.000532	0.000585	0.000757
100	Gibbs	0.006708	0.006873	0.006724	0.006685	0.006268	0.006213	0.005988
	quasi	0	0.000029	0.000071	0.000135	0.000133	0.00013	0.000145
1000	Gibbs	0.002151	0.002149	0.002142	0.002141	0.00211	0.002102	0.00209
	quasi	0	0.000001	0.000003	0.000003	0.000007	0.000011	0.000016

表 4: 誤差0%, $b_{i+} = 100$

Case 5：$b_{i+} = 1000$

		n						
a_+	$rel - \tilde{\tilde{\theta}}$	1	2	3	4	5	6	7
3	Gibbs	0.031592	0.030821	0.034319	0.017349	0.01594	0.015913	0.01279
	quasi	0	0.019388	0.046551	0.057027	0.048814	0.059389	0.083694
10	Gibbs	0.021108	0.020425	0.019239	0.017397	0.015636	0.014366	0.012895
	quasi	0	0.003013	0.007988	0.011008	0.009918	0.01193	0.016589
50	Gibbs	0.009491	0.009498	0.009276	0.009173	0.008058	0.007861	0.007705
	quasi	0	0.000151	0.000429	0.000641	0.000603	0.000729	0.001025
100	Gibbs	0.006826	0.006803	0.006775	0.006657	0.006209	0.006141	0.006031
	quasi	0	0.000039	0.00011	0.000168	0.000158	0.00019	0.000268
1000	Gibbs	0.002128	0.002125	0.002111	0.002107	0.002093	0.002093	0.002091
	quasi	0	0	0.000001	0.000001	0.000001	0.000001	0.000002

表 5: 誤差0%, $b_{i+} = 1000$

在**a**和**b**與真實母體比例無誤差時，在$a_+ = 3$的先驗條件下，quasi-Bayes對貝氏法的相對誤差有遞增的趨勢，當$n = 7$時相對誤差達到最大，而Gibbs sampler對貝氏的相對誤差則改變的較平緩，大約在$n = 3, 4$時，quasi-Bayes對於貝氏法的相對誤差大於Gibbs sampler。其他狀況雖然quasi-Bayes的相對誤差似乎有點上升的趨勢，但絕大部分quasi-Bayes的相對誤差是比Gibbs sampler來的小的，且當a_+越大，quasi-Bayes的相對誤差越靠近0。

第二部分：$\mathbf{a}, \mathbf{b}$與真實母體比例最大誤差10%時，相對誤差的比較。

prior $\mathbf{a}$的選取爲：

當$a_+ = 3$時，　$\mathbf{a} = (1.8 \quad 0.6 \quad 0.6)$

當$a_+ = 10$時，　$\mathbf{a} = (6 \quad 2 \quad 2)$

當$a_+ = 50$時，　$\mathbf{a} = (30 \quad 10 \quad 10)$

當$a_+ = 100$時，　$\mathbf{a} = (60 \quad 20 \quad 20)$

當$a_+ = 1000$時，　$\mathbf{a} = (600 \quad 200 \quad 200)$

prior $\mathbf{b}$的選取爲：

當$b_{i+} = 3$時，　$b = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.6 & 0.45 & 0.45 \\ 0.3 & 1.8 & 0.6 & 0.3 \\ 0.6 & 0.9 & 1.2 & 0.3 \end{pmatrix}$

當$b_{i+} = 10$時，　$b = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1.5 & 1.5 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

當$b_{i+} = 50$時，　$b = \begin{pmatrix} 25 & 10 & 7.5 & 7.5 \\ 5 & 30 & 10 & 5 \\ 10 & 15 & 20 & 5 \end{pmatrix}$

當$b_{i+} = 100$時，　$b = \begin{pmatrix} 50 & 20 & 15 & 15 \\ 10 & 60 & 20 & 10 \\ 20 & 30 & 40 & 10 \end{pmatrix}$

當$b_{i+} = 1000$時，　$b = \begin{pmatrix} 500 & 200 & 150 & 150 \\ 100 & 600 & 200 & 100 \\ 200 & 300 & 400 & 100 \end{pmatrix}$

Case 1：$b_{i+} = 3$

		n						
a_+	$rel - \tilde{\tilde{\theta}}$	1	2	3	4	5	6	7
3	Gibbs	0.055204	0.046709	0.024587	0.019695	0.016482	0.015841	0.016347
	quasi	0	0.007712	0.011528	0.029424	0.029205	0.03027	0.030954
10	Gibbs	0.029064	0.020929	0.022062	0.0183	0.015134	0.012793	0.010172
	quasi	0	0.003463	0.001747	0.007885	0.014866	0.01784	0.018398
50	Gibbs	0.0102	0.009025	0.009686	0.008804	0.00779	0.007435	0.006842
	quasi	0	0.000828	0.000915	0.001636	0.003763	0.004988	0.005475
100	Gibbs	0.006754	0.006262	0.006567	0.00604	0.005674	0.005483	0.005173
	quasi	0	0.000442	0.00052	0.000883	0.001969	0.002638	0.002932
1000	Gibbs	0.00191	0.001915	0.001914	0.001851	0.001822	0.001814	0.001797
	quasi	0	0.000047	0.000058	0.000095	0.000206	0.000279	0.000314

表 6: 誤差10%, $b_{i+} = 3$

Case 2：$b_{i+} = 10$

		n						
a_+	$rel - \tilde{\tilde{\theta}}$	1	2	3	4	5	6	7
3	Gibbs	0.032033	0.027937	0.035967	0.0156	0.01813	0.01907	0.017447
	quasi	0	0.01189	0.023349	0.040436	0.033168	0.03495	0.038648
10	Gibbs	0.021869	0.017234	0.016365	0.017152	0.015254	0.015668	0.014505
	quasi	0	0.001661	0.003343	0.007646	0.00831	0.00799	0.007127
50	Gibbs	0.008993	0.008398	0.008468	0.007835	0.007419	0.00746	0.006952
	quasi	0	0.000317	0.000188	0.000597	0.001643	0.002314	0.002686
100	Gibbs	0.006031	0.006235	0.006111	0.005753	0.005438	0.005485	0.005251
	quasi	0	0.000156	0.000155	0.000282	0.00082	0.001223	0.001488
1000	Gibbs	0.001888	0.001852	0.001893	0.00185	0.001822	0.001817	0.001798
	quasi	0	0.000016	0.000022	0.000033	0.000085	0.000131	0.000164

表 7: 誤差10%, $b_{i+} = 10$

Case 3：$b_{i+} = 50$

		n						
a_+	$rel - \tilde{\tilde{\theta}}$	1	2	3	4	5	6	7
3	Gibbs	0.042865	0.030012	0.031768	0.016662	0.01802	0.015894	0.014311
	quasi	0	0.013622	0.031983	0.048963	0.037917	0.043091	0.058912
10	Gibbs	0.019907	0.017791	0.018836	0.016247	0.016192	0.015305	0.013154
	quasi	0	0.002016	0.005552	0.009269	0.007704	0.008128	0.010362
50	Gibbs	0.008575	0.008541	0.008511	0.007877	0.007671	0.007667	0.007381
	quasi	0	0.000095	0.000223	0.000505	0.000566	0.000527	0.000446
100	Gibbs	0.006008	0.006112	0.006159	0.005655	0.005573	0.005626	0.005444
	quasi	0	0.000041	0.000031	0.000135	0.000235	0.000285	0.00029
1000	Gibbs	0.001845	0.001866	0.001877	0.001845	0.001831	0.001836	0.001828
	quasi	0	0.000003	0.000006	0.000007	0.000019	0.000032	0.000043

表 8: 誤差10%, $b_{i+} = 50$

Case 4：$b_{i+} = 100$

		n						
a_+	$rel - \tilde{\tilde{\theta}}$	1	2	3	4	5	6	7
3	Gibbs	0.044339	0.03582	0.033447	0.014057	0.016045	0.014079	0.013572
	quasi	0	0.013849	0.03337	0.050396	0.038627	0.044666	0.063629
10	Gibbs	0.02135	0.017055	0.019573	0.015846	0.01565	0.01492	0.013825
	quasi	0	0.002113	0.005922	0.009573	0.007874	0.008677	0.011702
50	Gibbs	0.008473	0.008653	0.008794	0.007785	0.007546	0.007568	0.007216
	quasi	0	0.00009	0.000284	0.000535	0.000487	0.000467	0.000534
100	Gibbs	0.005838	0.006085	0.005997	0.005707	0.005479	0.005536	0.005391
	quasi	0	0.000025	0.00006	0.000135	0.000152	0.000141	0.000119
1000	Gibbs	0.001845	0.001865	0.001889	0.001865	0.00184	0.001835	0.001823
	quasi	0	0.000002	0.000002	0.000003	0.00001	0.000017	0.000022

表 9: 誤差10%, $b_{i+} = 100$

Case 5：$b_{i+} = 1000$

		n						
a_+	$rel-\tilde{\tilde{\theta}}$	1	2	3	4	5	6	7
3	Gibbs	0.043837	0.029611	0.030794	0.013452	0.01454	0.014014	0.0146
	quasi	0	0.014055	0.034691	0.05178	0.039306	0.046242	0.068543
10	Gibbs	0.018743	0.016032	0.015979	0.014397	0.014825	0.015006	0.013303
	quasi	0	0.0022	0.006278	0.00989	0.008077	0.009264	0.013144
50	Gibbs	0.00823	0.008294	0.008288	0.007677	0.007419	0.007527	0.007155
	quasi	0	0.00011	0.000344	0.000569	0.000494	0.000564	0.000794
100	Gibbs	0.005864	0.006046	0.006071	0.005849	0.005659	0.005631	0.005433
	quasi	0	0.000028	0.000089	0.000149	0.000131	0.000147	0.000204
1000	Gibbs	0.001831	0.001844	0.001858	0.00184	0.001814	0.00181	0.001803
	quasi	0	0	0.000001	0.000001	0.000002	0.000002	0.000001

表 10: 誤差10%, $b_{i+} = 1000$

在**a**和**b**與真實母體比例有最大誤差10%時，依舊在$a_+ = 3$的情況下，quasi-Bayes對貝氏法的相對誤差有遞增的趨勢，當且$n = 7$時相對誤差達到最大，而Gibbs sampler對貝氏的相對誤差則改變的較平緩，大約在$n = 3, 4$時，quasi-Bayes對於貝氏法的相對誤差大於Gibbs sampler。其他狀況也與第一部分結果相同，雖然quasi-Bayes的相對誤差有上升的趨勢，但大部分quasi-Bayes的相對誤差比Gibbs sampler小，且當a_+越大，quasi-Bayes的相對誤差越靠近0。

比較第一部分與第二部分，**a**和**b**與真實母體比例有最大誤差10%的情況下，quasi-Bayes與Gibbs sampler對於貝氏法的相對誤差略大於與真實母體無誤差的情況。

第三部分：$\mathbf{a},\mathbf{b}$與真實母體比例最大誤差50%時，相對誤差的比較。

prior $\mathbf{a}$的選取爲：

當$a_+=3$時，　$\mathbf{a}=(0.6 \quad 0.3 \quad 2.1)$

當$a_+=10$時，　$\mathbf{a}=(2 \quad 1 \quad 7)$

當$a_+=50$時，　$\mathbf{a}=(10 \quad 5 \quad 35)$

當$a_+=100$時，　$\mathbf{a}=(20 \quad 10 \quad 70)$

當$a_+=1000$時，　$\mathbf{a}=(200 \quad 100 \quad 700)$

prior $\mathbf{b}$的選取爲：

當$b_{i+}=3$時，　$b=\begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.6 & 1.8 \\ 1.8 & 0.6 & 0.3 & 0.3 \\ 1.5 & 0.3 & 0.3 & 0.9 \end{pmatrix}$

當$b_{i+}=10$時，　$b=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

當$b_{i+}=50$時，　$b=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 10 & 30 \\ 30 & 10 & 5 & 5 \\ 25 & 5 & 5 & 15 \end{pmatrix}$

當$b_{i+}=100$時，　$b=\begin{pmatrix} 10 & 10 & 20 & 60 \\ 60 & 20 & 10 & 10 \\ 50 & 10 & 10 & 30 \end{pmatrix}$

當$b_{i+}=1000$時，　$b=\begin{pmatrix} 100 & 100 & 200 & 600 \\ 600 & 200 & 100 & 100 \\ 500 & 100 & 100 & 300 \end{pmatrix}$

Case 1：$b_{i+} = 3$

		n						
a_+	$rel - \tilde{\tilde{\theta}}$	1	2	3	4	5	6	7
3	Gibbs	0.073372	0.056345	0.059437	0.036313	0.04232	0.037879	0.036867
	quasi	0	0.014162	0.021697	0.034888	0.038457	0.049746	0.056846
10	Gibbs	0.034622	0.033608	0.037033	0.03391	0.033283	0.029982	0.028885
	quasi	0	0.005176	0.01221	0.010326	0.016176	0.0236	0.026708
50	Gibbs	0.016222	0.01515	0.01587	0.015005	0.015734	0.016027	0.015787
	quasi	0	0.001408	0.004381	0.002825	0.003549	0.005194	0.005972
100	Gibbs	0.011761	0.011198	0.011137	0.010763	0.011427	0.011517	0.011408
	quasi	0	0.000736	0.002364	0.001539	0.00184	0.002666	0.003099
1000	Gibbs	0.00375	0.003733	0.003698	0.003663	0.003731	0.003707	0.003668
	quasi	0	0.000077	0.000253	0.000168	0.000192	0.000275	0.000324

表 11: 誤差50%, $b_{i+} = 3$

Case 2：$b_{i+} = 10$

		n						
a_+	$rel - \tilde{\tilde{\theta}}$	1	2	3	4	5	6	7
3	Gibbs	0.050557	0.040838	0.050099	0.034305	0.033925	0.031012	0.034321
	quasi	0	0.016895	0.024406	0.042343	0.030264	0.045887	0.06396
10	Gibbs	0.030023	0.029409	0.030074	0.025768	0.029781	0.027833	0.027367
	quasi	0	0.002675	0.008174	0.007984	0.006881	0.011748	0.015292
50	Gibbs	0.015327	0.01489	0.0148	0.014037	0.014878	0.014608	0.014836
	quasi	0	0.000495	0.002686	0.001617	0.001068	0.00201	0.002698
100	Gibbs	0.011541	0.011047	0.011025	0.01088	0.01114	0.010891	0.011014
	quasi	0	0.000259	0.001441	0.000889	0.000592	0.00101	0.001346
1000	Gibbs	0.003698	0.003691	0.003672	0.003666	0.003666	0.003664	0.003651
	quasi	0	0.000027	0.000154	0.000099	0.000068	0.000108	0.000144

表 12: 誤差50%, $b_{i+} = 10$

Case 3：$b_{i+} = 50$

		n						
a_+	$rel - \tilde{\tilde{\theta}}$	1	2	3	4	5	6	7
3	Gibbs	0.046818	0.046879	0.032652	0.017043	0.025832	0.029227	0.03139
	quasi	0	0.018271	0.025519	0.045711	0.036151	0.057026	0.083921
10	Gibbs	0.028754	0.032935	0.027407	0.026374	0.027413	0.025644	0.025365
	quasi	0	0.002737	0.003882	0.007714	0.007124	0.011646	0.017652
50	Gibbs	0.015185	0.014939	0.015942	0.015758	0.015858	0.015302	0.015176
	quasi	0	0.000146	0.000723	0.000544	0.000288	0.000628	0.000954
100	Gibbs	0.010711	0.011079	0.011513	0.011152	0.011178	0.010906	0.010846
	quasi	0	0.000053	0.000413	0.000257	0.000101	0.000221	0.000341
1000	Gibbs	0.003664	0.003643	0.003637	0.003617	0.003586	0.003554	0.00354
	quasi	0	0.000006	0.000046	0.000031	0.000017	0.000022	0.000032

表 13: 誤差50%, $b_{i+} = 50$

Case 4：$b_{i+} = 100$

		n						
a_+	$rel - \tilde{\tilde{\theta}}$	1	2	3	4	5	6	7
3	Gibbs	0.051728	0.049136	0.035582	0.02124	0.021916	0.026271	0.029012
	quasi	0	0.018537	0.025771	0.046409	0.037547	0.059508	0.087807
10	Gibbs	0.028011	0.030302	0.02851	0.028506	0.026352	0.025634	0.02556
	quasi	0	0.00275	0.003977	0.008111	0.007622	0.012262	0.018631
50	Gibbs	0.015512	0.015919	0.015457	0.015421	0.015297	0.014737	0.014895
	quasi	0	0.000142	0.00035	0.000419	0.00037	0.000671	0.001055
100	Gibbs	0.011246	0.01135	0.011209	0.011031	0.011188	0.010977	0.010904
	quasi	0	0.000038	0.000202	0.00015	0.000072	0.000161	0.000253
1000	Gibbs	0.003648	0.00365	0.003637	0.0036	0.003572	0.003571	0.003556
	quasi	0	0.000003	0.000025	0.000016	0.000008	0.00001	0.000015

表 14: 誤差50%, $b_{i+} = 100$

Case 5：$b_{i+} = 1000$

		n						
a_+	$rel - \tilde{\tilde{\theta}}$	1	2	3	4	5	6	7
3	Gibbs	0.050984	0.041295	0.040968	0.012797	0.019364	0.024783	0.026522
	quasi	0	0.018778	0.026004	0.047239	0.038935	0.061987	0.091661
10	Gibbs	0.028463	0.02763	0.025745	0.026506	0.026365	0.025766	0.025123
	quasi	0	0.002847	0.004352	0.008652	0.008173	0.012936	0.019637
50	Gibbs	0.015194	0.015604	0.015259	0.014306	0.014725	0.014456	0.014654
	quasi	0	0.000141	0.000222	0.000478	0.000498	0.000795	0.001238
100	Gibbs	0.011029	0.011377	0.011394	0.011225	0.011065	0.010933	0.011173
	quasi	0	0.000036	0.000054	0.000122	0.000129	0.000208	0.000326
1000	Gibbs	0.003647	0.003685	0.003678	0.003648	0.00363	0.003637	0.003635
	quasi	0	0	0.000002	0.000002	0.000001	0.000002	0.000003

表 15: 誤差50%, $b_{i+} = 1000$

此部分於前面兩個部分呈現的結果相同，在$a_+ = 3$時quasi-Bayes有較明顯上升的趨勢，且大約在$n = 3, 4$時quasi-Bayes的相對誤差會大於Gibbs sampler。其他狀況也與前面兩部分相同。

在$\mathbf{a}, \mathbf{b}$與真實母體比例有最大誤差50%的情況下，quasi-Bayes與Gibbs sampler對於貝氏法的相對誤差又比與真實母體比例有最大誤差10%的情況來的大。

比較此三部分的先驗條件，可以發現當a_+較小時，quasi-Bayes與Gibbs sampler對於貝氏法的相對誤差會大於a_+較大時的相對誤差，所以推測兩者對於貝氏法的相對誤差皆與a_+有關。