# 第二章　LIBOR 市場模型

## 第一節　利率模型的發展概況

早期的利率模型以短利模型(Short Rate Model)為主，主要可區分為兩大類：一類為均衡模型(Equilibrium Model)，包含有 Merton(1970)、Vasicek(1977)以及 Cox，Ingersoll and Ross(CIR,1985)，這一類的模型有個共同的缺點，就是模型中的參數均為在期初給定的固定值，無法隨著時間變動，但市場狀況瞬息萬變，利率變動的期望值及波動度都深受時間及市場新資訊的影響，因此將變數假設為定值並不符合市場情況；另一類的模型為 1986 年之後興起的無套利模型，包含 Ho and Lee (1986) 、Hull and White(1990)以及 Hull and White 利率三元樹(1994)。

其中 Ho and Lee 又稱為延伸的 Merton 模型(Extended Merton Model)，因為其模型的假設均與 Merton 相同，不同處僅在於飄浮項(Drift Term)的參數為時間的函數，所以參數能隨著時間做調整，較能符合市場狀況，但此模型不具均數迴歸的性質是它的一個缺點。Hull and White 修正了這個問題，其模型具有均數迴歸的性質，同時又由於模型的設定除了飄浮項的參數是時間的函數外，其餘假設都同於 Vasicek，所以又稱為延伸的 Vasicek 模型(Extended Vasicek Model)。之後發展的 Hull and White 利率三元樹是目前市場上使用最多的短期利率模型。

相對於短期利率模型，Heath，Jarrow and Morton(HJM 1992)將 Ho and Lee 的二元樹模型概念推廣成為連續時間下的多因子遠期利率模型，並推導出在無套利架構下的遠期利率隨機過程，但此隨機過程為非馬可夫鏈(Non-Markovian)，以致在實務應用所使用的利率二元樹無法重合(Recombining)，因此在評價利率衍生性

商品時計算很複雜， 尤其是評價路徑相依 (Path Dependent)的商品更是複雜及困難，因此經常必須依賴 Monte Carlo 模擬來評價 。此外 HJM 模型參數多，校準這些參數將是更艱巨的工作。

以上提到的短期利率模型及遠期利率模型， 都將利率的動態過程假設爲瞬間連續， 也就是說時間的間隔非常的短，幾乎是用一個點來描述時間。然而從市場上觀察到的利率期間結構都是一段時間而非一個點，所以在瞬間連續的假設下無法直接從市場上獲得資料，必須經由公式轉換才能使用。此外，實務上評價利率衍生性商品(Caps，Floors，Swaps 及 Swaptions)時，都假設標的遠期利率是沒有飄浮項的對數常態隨機過程 (Lognormal Process)。因此利率衍生性商品的評價可利用 Black(1976)期貨選擇權的評價公式，也就是將期末現金流量的期望值折現到期初以求得利率選擇權的價格。 但是在利率衍生性商品的有效期限內會同時存在數個接連的遠期利率，這些遠期利率不可能在同一個機率平等測度下皆爲對數常態分配，這是因爲這些遠期利率都是相關的，而非獨立的。於是有學者開始懷疑實務界應用 Black 期貨選擇權的評價公式於利率衍生性商品的正確性。因而陸續有學者發表關於此議題的論文，像是 Musiela and Sondermann(1993)，Brace and Musiela(1994)，Miltersen，Sandman and Sondermann(1993)，Brace，Gatarek and Musiela(BGM 1997) 及 Jamsihidian(1997)。

這些論文中以 Brace，Gatarek and Musiela(BGM 1997)的 LIBOR 市場模型(BGM Model)爲最完整的市場模型。BGM 證明了每一個接連的遠期利率在個別單一機率測度下是對數常態分配， 也就是說每一個遠期利率在它的遠期機率測度下是對數常態分配，這裡的遠期利率測度指的是由到期日與遠期利率到期日相同的零

息債券作爲計價單位所引導出來的機率測度。因此每一個遠期利率在其所屬的遠期機率測度下會是對數常態分配，而不是所有接連的遠期利率在同一個即期機率測度(風險中立測度)下都是對數常態分配。

## 第二節　建立 LIBOR 市場模型

在這個章節我們將利用無套利的觀念來建構 LIBOR 市場模型 (BGM Model) ，首先考慮一組時間序列 $\{t_0, t_1, ..., t_M\}$ ，其中每一序對 $(t_{i-1}, t_i)$ 代表遠期利率 $F_k(t) = F(t; t_{k-1}, t_k)$ 的存續期間，當 $t = t_{k-1}$ 時， $F_k(t_{k-1})$ 等於即期利率 $L(t_{k-1}, t_k)$ ，所以序對 $(t_{k-1}, t_k)$ 也代表即期利率 $L(t_{k-1}, t_k)$ 的存續期間，並以一年爲單位，將期間 $(t_{k-1}, t_k)$ 記作 $\tau_i$ 年。

令 $t < t_{k-1} < t_k$ ，現在於 $t$ 時點賣出一單位 $t_{k-1}$ 時點到期的零息債券(現金流量爲 $+P(t, t_{k-1})$ )，同時買進 $\dfrac{P(t, t_{k-1})}{P(t, t_k)}$ 單位於 $t_k$ 時點到期的零息債券(現金流量爲 $-P(t, t_{k-1})$ ) ，所以 $t$ 時點的總現金流量爲零。到了 $t_{k-1}$ 時點時，必須支付一元給債券買方 (現金流量爲 $-1$ )，同時借入一元(現金流量爲 $+1$ )至時點 $t_k$ ，借款利率爲 $L_k(t)$ ，表示在 $t$ 時點觀察到的遠期利率 $F(t_{k-1}, t_k)$ ， 則 $t_{k-1}$ 時點的總現金流量亦爲零。直到 $t_k$ 時點時，可獲得於 $t$ 時點買的債券收入(現金流量爲 $+\dfrac{P(t, t_{k-1})}{P(t, t_k)} \times 1$ )，同時必須償還於 $t_{k-1}$ 時點借入的本金及利息(現金流量爲 $-[1 + \tau_k L_k(t)]$ )，則 $t_k$ 時點的總

現金流量爲$+\frac{P(t,t_{k-1})}{P(t,t_k)}\times 1-[1+\tau_k L_k(t)]$。由於這是一個無套利的投資組合，所以期末的現金流量亦須爲零。故可推得

$$L_k(t)P(t,t_k)=\frac{1}{\tau_k}[P(t,t_{k-1})-P(t,t_k)]$$

因此$L_k(t)P(t,t_k)$可視爲可交易資產的價格(即$\frac{1}{\tau_k}$單位不同到期日的零息債券折現的差值)。當我們以$P(t,t_k)$作爲計價單位 ( Numeraire)時，則此資產將符合機率平賭過程 (Martingale)性質，很顯然的當我們把$L_k(t)P(t,t_k)$這個價格除以計價單位$P(t,t_k)$後 ，僅會剩下$L_k(t)$，故$L_k(t)$在$Q^k$測度(即以$P(t,t_k)$爲計價單位的測度 )下會是機率平賭過程。所以在$Q^k$測度下$L_k(t)$是沒有飄浮項的隨機過程，可表示爲

$$dL_k(t)=\vec{\sigma}_k(t)L_k(t)dZ^k(t) \qquad t\le t_{k-1} \tag{2.2.1}$$

其中$Z^k(t)$是$M$ 維的布朗運動(在$Q^k$測度下)， 它的瞬間共變異矩陣爲

$\rho = (\rho_{i,j})_{i,j=1,...,M}$，使得$dZ^k(t)dZ^k(t)' = \rho\ dt$，

且$\vec{\sigma}_k(t)$是遠期$L_k(t)$利率的波動度，爲$M\times 1$維的向量.

在此 ，我們將假設$M=1$來推導，則$\vec{\sigma}_k(t) = [0\ 0..\ \sigma_k(t)\ ...0\ 0]$，那麼我們可將(2.2.1)式重新改寫爲

$$dL_k(t)=\sigma_k(t)L_k(t)dZ_k^k(t) \qquad t\le t_{k-1} \tag{2.2.2}$$

其中$Z_k^k(t)$是標準布朗運動 ，下標$k$指的是$M$ 維的布朗運動向量中的第$k$個元素，上標$k$指的是其對應的測度爲$Q^k$測度。通常在不混淆的狀況下，我們會將上標$k$省略不寫，則可將(2.2.2)式進一步改寫爲

$$dL_k(t) = \sigma_k(t) L_k(t) dZ_k(t) \qquad t \le t_{k-1} \tag{2.2.3}$$

此時(2.2.3)式中的遠期$L_k(t)$利率的波動度$\sigma_k(t)$為一純量 ，而非向量。

## 第三節　遠期 LIBOR 利率在不同計價單位下的動態過程

接下來我們有興趣的是一個關於遠期$L_k(t)$利率在不同計價單位下的動態過程的議題。例如：考慮$L_k(t)$在$Q^i$測度下的動態過程，而非在$Q^k$測度下討論，當然此時$t \le \min(t_i, t_{k-1})$ 。測度轉換後並不會影響擴散項(Diffusion Term)，僅有飄浮項(Drift Term)會改變，以下是新測度下的飄浮項，其證明則請參照附錄。

$$\mu_k(t) = \begin{cases} \sum_{j=i+1}^{k} \dfrac{\rho_{k,j}\tau_j \sigma_k(t)\sigma_j(t) L_j(t)}{1+\tau_j L_j(t)} & if \quad i < k \\ 0 & if \quad i = k \\ -\sum_{j=k+1}^{i} \dfrac{\rho_{k,j}\tau_j \sigma_k(t)\sigma_j(t) L_j(t)}{1+\tau_j L_j(t)} & if \quad i > k \end{cases} \tag{2.3.1}$$

當$i > k$時，我們即可利用式子(2.3.1)將遠期 LIBOR 利率$L_k(t)$的動態過程表示如下

$$dL_k(t) = -L_k(t)\sigma_k(t) \sum_{j=k+1}^{7} \frac{\rho_{k,j}\tau_j \sigma_j(t) L_j(t)}{1+\tau_j L_j(t)} dt + L_k(t)\sigma_k(t) dZ_k(t) \tag{2.3.2}$$

利用 Ito’s Lemma，可以得到下式

$$d\ln L_k(t) = -\sigma_k(t) \sum_{j=k+1}^{7} \frac{\rho_{k,j}\tau_j \sigma_j(t) L_j(t)}{1+\tau_j L_j(t)} dt - \frac{\sigma_k^2(t)}{2} dt + \sigma_k(t) dZ_k(t) \tag{2.3.3}$$

在第四章中， 我們將把式子(2.3.3) 對時間作離散化 ，以便進行遠期 LIBOR 利率的模擬。