第三章　　最小平方蒙地卡羅法(LSM)

第一節　LSM 的適用時機

市場上所存在的衍生性金融商品種類越來越多，其結構也愈趨複雜，致使可以利用 B-S(1973)公式來做評價的商品僅有少數，大部分沒有公式解的商品只能利用數值方法來求得近似解，目前所使用的數值方法有多元樹模型、 有限差分法及蒙地卡羅模擬法。其中多元樹及有限差分法適合用來評價具有提前履約性質的衍生性商品，例如美式商品或百慕達式商品，但其無法處理多因子模型，例如 BGM (1997) 模型，至於蒙地卡羅模擬法則適用於處理具有路徑相依性質的商品，例如亞式選擇權、極大極小選擇權等等，但此方法的收斂速度較慢且無法處理具有提前履約特性的商品。在收斂速度方面我們可以配合控制變異法或反向變異法的使用來解決這個問題，至於在無法提前履約的問題方面，便須要藉由最小平方蒙地卡羅法(LSM)來解決。

二十世紀末，有一些論文使用模擬的方法來評價具有提前履約特性的選擇權。其中 Bossaert (1989)在他的研究中，解決了一個重要的問題，即找出最佳的履約策略使得模擬出的選擇權價值爲最大值。此外，對於此方面議題亦有貢獻的文章尙有 Tilley(1993) ，Barraquand and Martineau(1995) ，Averbukh(1997),Broadie,Glasserman and Jain(1997) ，Raymar and Zwecher(1997) ，Broadie et al.(1998)以 Garcia (1999)。這些論文使用很多數學上的技巧來估算新的機率密度函數或是估測可提前履約時間點的合理範圍。

直到 2001 年 Longstaff and Schwartz 提出最小平方蒙地卡羅法(LSM) ，顧名思義最小平方蒙地卡羅法是一種結合蒙地卡羅與最小平方估計(Least-Squares Regression) 的方法。 一般而言，我們在處理具有可提前履約特性的商品時，不管使用哪一種數值方法，在評價的過程中都必須比較在每一個節點上立即履約的報酬與繼續持有商品的價值，若前者的價值較大，則選擇立即履約。在每一個時間點 t ，我們當然能馬上知道立即履約的報酬，至於繼續持有商品的價值便可利用 LSM 來描述此時的條件期望值，進而求得在 t 時點繼續持有商品價值的最佳估計。

百慕達式(或美式)選擇權即爲具有可提前履約特性的商品，在評價時我們往往須要先模擬標的資產的價格路徑，而 LSM 提供一個簡易的方法來估測出這些路徑的最佳履約時點，進而評得選擇權的價格。此時，我們關切這個估測的價格是否能合理的代表實際的價格？在回答這個問題之前，我們先考慮由 Longstaff and Schwartz (2001)所提出的定理如下：

定理：假設美式選擇權的價格只與一個變數 s 有關， s 的範圍爲 $(0,\infty)$ 並且符合馬可夫過程。更進一步假設選擇權只能在時點 t_1 或時點 t_2 履約，條件期望值函數 $F(\omega,t_1)$ 是絕對連續(absolutely continuous)並且滿足

$$\int_0^\infty e^{-s}F^2(\omega;t_1)ds<\infty \quad ,$$

$$\int_0^\infty e^{-s}F_M^2(\omega,t_1)ds<\infty$$

則對於任意的 $\varepsilon>0$ ，會存在一個 $M<\infty$ 使得

$$\lim_{N\to\infty} pr\left[\left|V(s)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} LSM(\omega_i;M,K)\right|>\varepsilon\right]=0$$

其中$V(s)$代表實際的選擇權價格；$LSM(\omega_i;M,K)$代表將路徑ω_i在其最佳履約時點t_k的現金流量折現至評價時點t_0的價值，M為基底函數的個數，K為可履約時點的個數。

由這個定理我們知道只要選取的M夠大，並且令N趨近無限大，則利用 LSM 估測出來的價格與實際價格的差值將會小於ε，且ε是一個可以任意小的正數。能有這麼好的收斂結果，主要的關鍵是函數$F_M(\omega;t_1)$均勻收斂(convergence uniformly)到條件期望值函數$F(\omega;t_1)$。將此定理由單一因子推廣到多因子仍然是成立的。所以由數學的觀點來看，利用 LSM 所估測出來的選擇權價格的確可以合理的代表實際的選擇權價格。

以下將詳細說明 LSM 的做法並舉一個簡單的例子來實際操作以期能直覺的了解最小平方蒙地卡羅法。

第二節　LSM 的作法

令ω_i表示某一條模擬出來的路徑(Path)，其中$i=1,2,...,N$。且令t_j表某一時間點t，其中$j=t_1,t_2,...,t_J$。則$S_j(\omega_i)$代表路徑ω_i在時間點t_j時所模擬出來的標的資產價格。

我們必須在每一個節點t_j上，比較立即履約的報酬$P(S_j(\omega_i))$與繼續持有價值的條件期望值$F(\omega_i,t_k)$。我們在風險中立的測度Q之下，考慮$F(\omega_i,t_k)$的意義如下式：

$$F(\omega_i,t_k)=E^Q\left[\sum_{j=k+1}^{J}D(t_k,t_j)C(\omega_i,t_j,t_k,T)\middle|\zeta_{t_k}\right]$$

其中$D(t_k,t_j)$代表從t_j到t_k的折現因子(discount factor)， $C(\omega_i,t_j,t_k,T)$代表某一路徑ω_i在各時點的現金流量 ， 此路徑ω_i必須滿足在t_k時沒有被履約並且於最適當時點被履約的條件。由於百慕達式選擇權只有一次履約機會，所以每一條路徑ω_i最多只有一個履約時點t_j使得$C(\omega_i,t_j,t_k,T)>0$ 。

我們假設$F(\omega_i,t_k)$存在於希爾伯空間(Hilbert Space)中，則我們可以基底函數(Basis Function)的線性組合來表示此空間中的所有變數，以S_j爲變數， $B_l(S_j)$爲基底函數，其中l爲任意自然數。則$F(\omega_i,t_k)$可以表爲

$$F(\omega_i,t_k)=\sum_{l=0}^{\infty}a_l B_l(S_j)$$

但在實際操作上不可能選取無限多個基底函數$B_l(\cdot)$ ，因此應用上將使用以下估計式：

$$\hat{F}_M(\omega_i,t_k)=\sum_{l=0}^{M}a_l B_l(S_j)$$

其中$0<M<\infty$ ，則$\hat{F}_M(\omega_i,t_k)$會是條件期望值$F(\omega_i,t_k)$的最佳估計。White(1984)也證實了只要模擬的次數夠多，我們利用迴歸所求出來的多項式$\hat{F}_M(\omega_i,t_k)$將會L^2收斂(即 convergecne in mean square)至$F(\omega_i,t_k)$ 。由於L^2收斂隱含機率收斂(convergence in probability)。即下式將會成立

$$\lim_{M\to\infty}\Pr\left(\left|\hat{F}_M(\omega_i,t_k)-F(\omega_i,t_k)\right|>\varepsilon\right)=0$$

現在我們固定某一條路徑ω_i時， LSM的做法就是沿此路徑從t_J回推至t_1：

1．在時點t_J時：將期末的現金流量$C_J(\omega_i)$用收益函數(payoff function) $P(S_J(\omega_i))$來表示：

$$C_J(\omega_i) = P(S_J(\omega_i))$$

2. 在時點t_{J-1}時： 考慮所有在t_{J-1}時爲價內(in-the-money)的路徑，即選取ω_i使得$P(S_{J-1}(\omega_i)) > 0$。則從t_J折現至t_{J-1}的現金流量應該等於每一個立即履約的收益$P(S_{J-1}(\omega_i))$。現在使用迴歸的方法來估計繼續持有價值的條件期望值。我們將利用最小平方法來估計係數a_l。即求算下式的最小值：

$$\left\| D(t_J, t_{J-1}) C_J(\omega_i) - \sum_{l=0}^{M} a_l B_l(S_{J-1}(\omega_i)) \right\|$$

於是估計出繼續持有價值的條件期望值如下：

$$F(\omega_i, t_{J-1}) = \sum_{l=0}^{M} a_l B_l(S_{J-1}(\omega_i))$$

於是我們可以藉由比較繼續持有商品的期望價值與立即履約的報酬來求得此時的現金流量如下：

$$C_{J-1}(\omega_i) = \begin{cases} P(S_{J-1}(\omega_i)) & if \quad P(S_{J-1}(\omega_i)) > F(\omega_i, t_{J-1}) \\ 0 & else \end{cases}$$

對於這些在時點t_{J-1}被履約的路徑ω_i，即滿足$C_{J-1}(\omega_i) > 0$，則ω_i在下一個時點 t_J的現金流量$C_J(\omega_i)$必爲零。

3. 時點t_{J-2}等：重複上一個步驟的做法直到到達時點t_1爲止。

4.最後步驟：將每一條路徑ω_i的現金流量加總平均，即可求得選擇權的價值V

$V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} C(\omega_i)$ ， 其中 $C(\omega_i)$ 代表路徑 ω_i 折現後的現金流量。

上述所提及的基底函數 $B_l(\cdot)$ 必須是一組存在於希爾伯空間(Hilbert Space)中的可數正交基底函數(countable orthonormal basis function)。令 S 表示選擇權的標的資產價格且假設 S 服從馬可夫過程 (Markovian process)。Abramowitz and Stegun 於 1970 發表的論文中所描述的基底函數型態包含有(weighted) Laguerre polynomials，Hermite，Legendre，Chebyshev，Gegenbauer 以及 Jacobi polynomials。2001 年時，Moreno 和 Navas 證實了使用最小平方蒙地卡羅法時不論選用哪一種基底函數，當項數 M 大於等於 5 時，對於迴歸的準確度並不會有太大的影響，此外，在論文中也提及若是固定項數 M ，則使用(weighted) Laguerre polynomials 這組基底函數將會得到更精確的答案。以下即為 (weighted) Laguerre polynomials：

$$B_0(S) = \exp(-\frac{S}{2})$$

$$B_1(S) = \exp(-\frac{S}{2})(1-S)$$

$$B_2(S) = \exp(-\frac{S}{2})(1-2S+\frac{S^2}{2})$$

$$B_n(S) = \exp(-\frac{S}{2})\frac{e^S}{n!}\frac{d^n}{dS^n}(S^n e^{-S}) \qquad (3.2.1)$$

第三節　LSM 的實作範例

以下我們用一個簡單的例子來實際套用最小平方蒙地卡羅法。現在考慮一個百慕達式賣權，標的為不付息的股票，選擇權的履約價格為1.20 ，到期日為 t_3 ，共有

3個可履約的時點t_1、t_2和t_3，無風險利率為6%。為了方便說明，我們在風險中立的測度下模擬8條股價的路徑。下表3.3.1為模擬的結果：

表3.3.1：股價路徑

路徑\時間	t_0	t_1	t_2	t_3
1	1.00	1.17	1.18	1.43
2	1.00	1.25	1.33	1.67
3	1.00	1.32	1.18	1.13
4	1.00	1.04	1.07	1.02
5	1.00	1.21	1.66	1.65
6	1.00	.89	.87	1.00
7	1.00	1.02	.97	1.11
8	1.00	.97	1.32	1.48

當某一條路徑被固定時，我們的目的是要找出此路徑的最佳履約時點。由於將涉及一個遞回關係式，所以必須先考慮選擇權在t_3的現金流量如下表 3.3.2，當然前提是選擇權在到期日t_3前沒有被履約。

表3.3.2：t_3的現金流量

路徑\時間	t_1	t_2	t_3
1	---	---	.00
2	---	---	.00
3	---	---	.07
4	---	---	.18
5	---	---	.00
6	---	---	.20
7	---	---	.09
8	---	---	.00

假如在時點t_2時賣權為價內，則選擇權持有者必須決定是否要立即履約或者要持有賣權直到到期日t_3。觀察模擬出來的股價路徑在t_2時只有5條路徑使得賣權為價內。令變數S代表這5條路徑在時點t_2的股價，假設賣權在t_2沒有被履約，則對應於變數S，我們以C代表從t_3折現至t_2的現金流量。在此我們僅考慮價內的選擇

權路徑，原因是利用迴歸的方法求取繼續持有價值的期望值時，若將價外節點一起考慮，則使用最小平方法時，會因爲這些價外的節點造成較大的估計誤差，況且以經濟的觀點來看，只有當選擇權爲價內時，投資人才會選擇是否要提早履約。下表 3.3.3 爲此時的向量 S 與向量 C ：

表 3.3.3：時點 t_2 的迴歸

路徑	C	S
1	$.00 \times .9417$	1.18
2	---	---
3	$.07 \times .9417$	1.18
4	$.18 \times .9417$	1.07
5	---	---
6	$.20 \times .9417$	.87
7	$.09 \times .9417$	.97
8	---	---

在時點 t_2 且已知股票價值 S 的條件下，要估計繼續持有價值的期望值函數 F ，我們考慮 C 在某一常數，S 和 S^2 上的迴歸。則可求得條件期望值函數 F 爲

$$F : E[C|S] = -0.973 + 2.987S - 1.813S^2$$

根據這個條件期望值函數 $E[C|S]$，我們可以比較在時點 t_2 立即履約的價值(即下表 3.3.4 中的第一行)與繼續持有選擇權的期望價值(即表中的第二行)：

表 3.3.4：在時點 t_2 的最佳履約策略

路徑	立即履約	繼續持有
1	.02	.0272
2	---	---
3	.02---	.0272
4	.13---	.1473
5	---	---
6	.33---	.2534
7	.23---	.2185
8	---	---

其中立即履約的價值即等於履約價 1.20 減去價內路徑的股價S，而繼續持有價值則是將股票價值S代入條件期望值函數$E[C|S]$中求得。比較表 3.3.4 中的數值，即可得知在路徑 6 與路徑 7 的狀況下，我們會選擇在時點t_2提早履約。以下表 3.3.5 是選擇權在時點t_2的現金流量，當然此選擇權在時點t_2前沒有被履約。

表 3.3.5：在時點t_2的現金流量

路徑\時間	t_1	t_2	t_3
1	---	---	---
2	---	---	---
3	---	---	.07
4	---	---	.18
5	---	---	---
6	---	.33	---
7	---	.23	---
8	---	---	---

觀察表 3.3.5，不難發現當選擇權在時點t_2履約後，其到期日t_3的現金流量必爲零，這是因爲選擇權只有一次被履約的機會。

繼續我們的遞回方法，以下將檢驗選擇權是否須在時點t_1提早履約。觀察所模擬的股價路徑表，在時點t_1爲價內的路徑亦爲 5 條，在這些路徑下我們再次定義C爲現金流量的現值。值得注意的是如同之前的做法，此時C所考慮的是股價路徑在時點t_2的現金流量，而非使用在時點t_2所估計的條件期望值函數來定義C的值。另外，我們仍以S代表這些價內路徑在時點t_1的股價。將向量C與向量S列於下表 3.3.6：

表 3.3.6： 在時點t_1的迴歸

路徑	C	S
1	$.02\times.9417$	1.17
2	---	---
3	---	---
4	$.13\times.9417$	1.04
5	---	---
6	$.33\times.9417$	.89
7	$.23\times.9417$	1.02
8	$.00\times.9417$	.97

我們再次考慮C在某一常數，S和S^2上的迴歸。則可求得條件期望值函數為

$$E[C|S]=3.037-3.335S+1.357S^2$$

根據這個條件期望值函數，我們可以比較在時點t_1立即履約的價值(即下表 3.3.7 中的第一行)與繼續持有選擇權的期望價值(即表中的第二行)。經由比較這兩行的值即可得知在路徑 4、路徑 6、路徑 7 與路徑 8 的狀況下，我們會選擇在時點t_1提早履約。

表 3.3.7： 在時點t_1的最佳履約策略

路徑	立即履約	繼續持有
1	.03	.0930
2	---	---
3	---	---
4	.16	.1363
5	---	---
6	.31	.2579
7	.18	.1658
8	.23	.1788

整理表 3.3.4 與表 3.3.7 即可得知何時為最佳履約時點 ，我們將結果紀錄於下表 3.3.8，其中 1 代表選擇權最佳的履約時點。

表 3.3.8：最佳的履約時點

路徑	t_1	t_2	t_3
1	0	0	1
2	0	0	0
3	0	0	1
4	0	0	1
5	0	0	0
6	1	0	0
7	1	0	0
8	1	0	0

根據表 3.3.8， 我們可以立即求得選擇權的到期現金流量如下表 3.3.9：

表 3.3.9：選擇權的現金流量

路徑	t_1	t_2	t_3
1	0	0	.00
2	0	0	0
3	0	0	.07
4	0	0	.18
5	0	0	0
6	.31	0	0
7	.18	0	0
8	.23	0	0

現在，將每一條路徑上的各期現金流量折現至期初t_0， 並且求取平均值，則可估算出百慕達式選擇權的價格爲 0.1109。若是我們僅根據表 3.3.2 將期末t_3的現金流量折現，則可求得歐式選擇權的價格爲 0.0564。