第四章　利率交換選擇權商品的評價及應用

第一節　利用 LSM 評價百慕達式利率交換選擇權

現在，考慮一個百慕達式選擇權商品如下表 4.1.1，我們將在 LIBOR 市場模型的架構下，使用最小平方蒙地卡羅法(LSM)來評價此商品。由於進行評價時，需要利用當時市場上的 LIBOR 利率報價、SWAP 利率報價以及 CAP 報價估測 LIBOR 市場模型所須的參數，故將當時市場上所觀察到的利率資料記錄於表 4.1.2：

表 4.1.1：固定期間百慕達式利率交換選擇權商品條款

選擇權(Option)部分：
發行日期：2004 年 8 月 2 日
有效期限：2005 年 8 月 2 日
發行期限：1 年
發行本金：美金五千萬
履約價：2.35%
交換部分：
交換開始日：2005 年 8 月 2 日
交換到期日：2006 年 8 月 2 日
交換方每一季支付三個月 LIBOR
提前履約(Early Exercise)條款：
於商品發行日起至商品有效期限爲止，每三個月可以決定是否要提前履約。

表 4.1.2： 2004/08/02 利率市場資料

時間：2004 年 8 月 2 日 市場利率：2.35% 市場 **LIBOR** 報價： 　　3 個月期:1.69% 　　6 個月期:1.9375% 　　9 個月期:2.14% 　　12 個月期:2.35% 市場 **SWAP RATE** 報價： 　　2 年期:3.0261% 　　3 年期:3.4886% 　　4 年期:3.8475% 　　5 年期:4.135% 市場 **CAP** 報價： 　　1 年期:30.92% 　　2 年期:31.2% 　　3 年期:29.33% 　　4 年期:27.7% 　　5 年期:26.2% 　　7 年期:23.82% 　　10 年期:21.03% 市場 **1X1** 利率交換選擇權**(Swaption)**的波動度**(Volatility)**報價：31.016%

回顧第三章第三節的例子，可知使用 LSM 評價此商品時，必須先模擬出未來的交換利率價值，而交換利率可由一連串的遠期 LIBOR 利率計算出來，所以我們先利用蒙地卡羅模擬法來模擬出遠期 LIBOR 利率，而模擬時所考慮的遠期 LIBOR 利率動態過程，即爲式子(2.3.3)對時間做離散化的結果。參考表 4.1.2 的利率資料，即可估測模型所須的參數。估算參數的過程如下：

Step1．估計殖利率曲線(yield curve)：

將目前市場所觀察到的 SWAP RATE 報價配合 cubic spline 法即可差補出我們所須要年期的交換利率。如下表 4.1.3：

表 4.1.3： 各年期的交換利率

時間(年)	0.25(t_1)	0.5(t_2)	0.75(t_3)	1(t_4)
Swap rate $S_{0,t_i}(0)$ (%)	2.02	2.16	2.32	2.45
時間(年)	1.25(t_5)	1.5(t_6)	1.75(t_7)	2(t_8)
Swap rate $S_{0,t_i}(0)$ (%)	2.59	2.75	2.89	3.03

$S_{0,t_i}(0) = S(0;0,t_i)$ 代表現在時點所觀察到的 t_i 年期交換利率。

相對於遠期利率而言，殖利率是從目前時點開始起算的利率，亦即所謂的即期 LIBOR 利率(spot rate)。當遠期 LIBOR 利率 $L_i(t)$ (即 $L(t;t_{i-1},t_i)$)中的 t 等於 t_{i-1} 時， $L_i(t)$ 可視爲在 t_{i-1} 時點所觀察到將於 t_i 到期的殖利率 $r(t_i)$ 。由於市場上所能觀察到的 LIBOR 利率都是一年以內的即期利率，超過一年的部分則須經由拔靴法(bootstrapping)將交換利率轉換爲即期 LIBOR 利率。一般而言拔靴法(bootstrapping)可以用以下這個式子表示：

$$\tau S_{t_j} \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{(1+r(t_i))^{t_i}} + 1 \times \frac{1}{(1+r(t_j))^{t_j}} = 1$$

其中 S_{t_j} 代表於現在時點所觀察到起始於現在終止於 t_j 時點的交換利率；τ 代表交換的期間長度，此爲 0.25 年； $r(t_i)$ 代表於 t_i 時點到期的殖利率，也就是 $L_i(0)$ ，0 表示現在時點。以 1.25 (t_5) 年爲例：

$$\frac{1}{4}\times S_{t_5}\times\frac{1}{(1+r(t_1))^{t_1}}+\frac{1}{4}\times S_{t_5}\times\frac{1}{(1+r(t_2))^{t_2}}+\frac{1}{4}\times S_{t_5}\times\frac{1}{(1+r(t_3))^{t_{31}}}$$
$$+\frac{1}{4}\times S_{t_5}\times\frac{1}{(1+r(t_4))^{t_4}}+\frac{1}{4}\times S_{t_5}\times\frac{1}{(1+r(t_5))^{t_5}}+1\times\frac{1}{(1+r(t_5))^{t_5}}=1$$

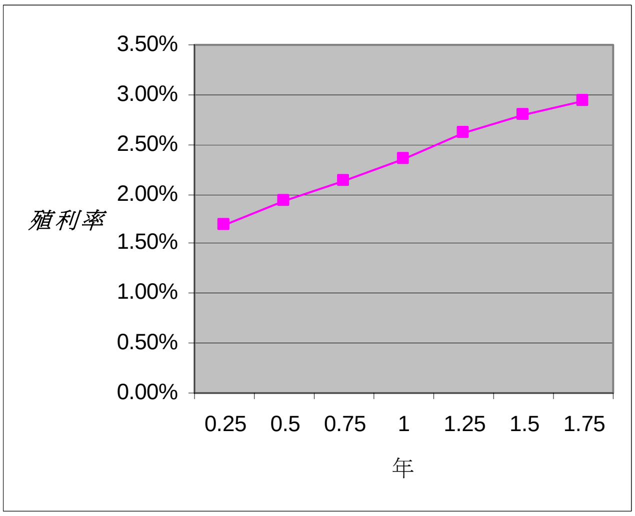
其中$r(t_1)$,. . . ,$r(t_4)$分別利用 3 個月期、6 個月期、9 個月期及 12 個月期的 LIBOR 市場報價；S_{t_5}已經求得並已紀錄於表 4.1.3，如此即可求算出未知數$r(t_5)$，即 1.25 年到期的殖利率。重複此方法即可求得$r(t_6)$、$r(t_7)$。我們將結果紀錄於下表 4.1.4：

表 4.1.4：利用拔靴法估算出的殖利率

時間(年)	1.25 (t_5)	1.5 (t_6)	1.75 (t_7)
Yield(%)	2.62	2.79	2.93

整理這些殖利率資料即可得到 2004 年 8 月 2 日 LIBOR 市場的利率期間結構，利用非線性差補法即可得到更完整的 LIBOR 殖利率曲線。如圖 4.1.1 所示：

圖 4.1.1 ：2004 年 8 月 2 日 LIBOR 殖利率曲線



Step2．估計各期的遠期利率：

估計出殖利率曲線後，即可利用預期理論求得市場上各期的遠期利率。在無套利機會的假設下，可知投資一元於t_i年期的即期利率$r(t_i)$，在t_i年後所得到的

報酬應與投資一元於 t_j 年期的即期利率 $r(t_j)$，t_j 年後將本息再投資 $(t_i - t_j)$ 年的遠期利率 $L(0;t_j,t_i)$ 相同。如下式(4.1.1)所示：

$$1+r(t_i)=\left(1+r(t_j)\right)^{t_j}\times\left(1+L(0;t_j,t_i)\right)^{t_j-t_i} \tag{4.1.1}$$

現在考慮 $j=i-1$ 的情況，則當 $r(t_{i-1})$ 與 $r(t_i)$ 已知時，即可利用此關係式反求出 $L(0;t_{i-1},t_i)$ 。依此類推即可求得各期的遠期利率，如下表 4.1.5 所示：

表 4.1.5：於目前時點估測出的遠期利率

遠期利率	%	遠期利率	%
$L(0;0.25,0.5)$	2.19	$L(0;1,1.25)$	3.50
$L(0;0.5,0.75)$	2.54	$L(0;1.25,1.5)$	3.64
$L(0;0.75,1)$	2.98	$L(0;1.5,1.75)$	3.97

Step3：

由於我們已知市場即期 LIBOR 利率 $L(0;0,t_i)$ ，且零息債券的價格 $P(0,t_i)$ 可以市場 LIBOR 利率表示爲下列式子：

$$P(0,t_i)=\frac{1}{1+\tau(0,t_i)L(0;0,t_i)}$$

其中 $\tau(0,t_i)$ 代表以年爲單位的時間間隔。所以可以求算三個月、六個月、九個月及一年到期的零息債券價格。

至於一年以上到期的零息債券價格則須藉由以下公式(4.1.2) 及表 4.1.3 的利率交換資料求算：

$$S_{\alpha,\beta}(\mathrm{t})=\frac{P(t,t_\alpha)-P(t,t_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta}\tau_i P(t,t_i)} \qquad (4.1.2)$$

表 4.1.6：各年期零息債券價格

到期日 t_i	$0.25\,(t_1)$	$0.50\,(t_2)$	$0.75\,(t_3)$	$1.00\,(t_4)$
$P(0,t_i)$	0.9958	0.9904	0.9842	0.9770
到期日 t_i	$1.25\,(t_5)$	$1.50\,(t_6)$	$1.75\,(t_7)$	$2.00\,(t_8)$
$P(0,t_i)$	0.9511	0.9327	0.9267	0.9132

Step4．求算遠期利率的隱含波動度：

在 LIBOR 市場模型中，利率波動度 $\sigma_i(t)$ 與相關係數矩陣 ρ 是兩個相當重要的參數，$\sigma_i(t)$ 決定了各個遠期利率在不同時點的波動度，ρ 則決定了各個遠期利率彼此間的相關程度。而波動度 $\sigma_i(t)$ 有數種不同的假設(可參考 Brigo Mercurio 2001)，在此我們假設各個遠期利率的波動度均為常數，而這種波動度結構的設定將導致單因子模型，也就是相關係數矩陣內所有的元素均為 1。故只須利用市場上價平利率上限選擇權(CAP)的報價進行波動度的估測。

一般而言，利率上限選擇權是以波動度作為報價，此波動度指的是利率上限選擇權所包含區間內的平均波動度。現在考慮 CAP 的波動度模型如下

$$v_{t-cap}(t)=[a(T-t)+d]e^{-b(T-t)}+c \qquad (4.1.3)$$

其中 $T=10$ 為已知的 CAP 報價中最長的年期，a、b、c 及 d 為未知常數。利用最小平方法及已知的市場 CAP 報價，即可估算出模型(4.1.3)中的常數 $a=$-0.0407、$b=$0.2440、$c=$0.3734 及 $d=$-0.1629，如此即可知道各個年期的 CAP

波動度。而一個利率上限選擇權包含了數個利率上限買權(caplet)，在 LIBOR 市場模型中的第 i 個遠期利率波動度 $\sigma_i(t)$ 即爲利率上限選擇權中 t_{i-1} 時點到期的利率上限買權波動度 $v_{t_{i-1}-caplet}$ ，即

第 i 個遠期利率波動度： $\sigma_i(t) = v_{t_{i-1}-caplet} \quad ,t \in \left(t_{i-1}, t_i\right]$

爲了求算利率買權波動度 $v_{t-caplet}$ ，我們考慮波動度 v_{t-cap} 與波動度 $v_{t-caplet}$ 的關係如下：

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{j}\tau_i P(0,t_i)Bl(K, L_{t_i}(0), \sqrt{t_{i-1}}v_{t_j-cap})\\&= \sum_{i=1}^{j}\tau_i P(0,t_i)Bl(K, L_{t_i}(0), \sqrt{t_{i-1}}v_{t_{i-1}-caplet})\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

其中 $Bl(K, L_{t_i}(0), \sqrt{t_{i-1}}v_{t_j-cap}) = L_{t_i}(0)\Phi(d_+(K, L_{t_i}(0), v_i)) - K\Phi(d_-(K, L_{t_i}(0), v_i))$

$$d_{\pm}(K, L_{t_i}(0), v_i) = \frac{\ln(L_{t_i}(0)/K) \pm v_i^2/2}{v_i^2}$$

K 爲遠期交換利率 $S_{0,j}(0)$

$L_{t_i}(0) = L(0; t_{i-1}, t_i)$ 爲遠期 LIBOR 利率

$v_i = \sqrt{t_{i-1}}v_{t_i-cap}$

Φ 代表標準的常態累積分布函數

現在，重新令 $v_i = \sqrt{t_{i-1}}v_{t_i-caplet}$ 則可得到 $Bl(K, t_i(0), \sqrt{t_{i-1}}v_{t_{i-1}-caplet})$ 的結果。

公式中的參數 K 即爲表 4.1.3 中的交換利率 $S_{0,t}(0)$ ， $L_i(0)$ 爲表 4.1.5 中的遠期利率， $P(0,t_i)$ 爲表 4.1.6 中的零息債券價格， v_{t_i-cap} 的值可由模型(4.1.3)求得，則利用這些已知的參數，我們可以逐一求算出各期間的利率買權波動度 $v_{t_{i-1}-caplet}$ ，即各個時期的遠期利率波動度 $\sigma_i(t)$ ，其中 $t \in \left(0, t_i\right]$ 。將求算的結果記

錄於下表 4.1.7：

表 4.1.7：各個時期的遠期利率波動度$\sigma_i(t)$

遠期利率$L_i(t)$	$L_2(t)$	$L_3(t)$	$L_4(t)$	$L_5(t)$
波動度$\sigma_i(t)$	12.534	20.882	24.247	28.642
遠期利率$L_i(t)$	$L_6(t)$	$L_7(t)$	$L_8(t)$	
波動度$\sigma_i(t)$	26.551	24.772	21.783	

現在將(2.3.3)式中的時間t進行離散化，則得到下式：

$$\ln L_k(t+\Delta t)=\ln L_k(t)-\sigma_k(t)\sum_{j=k+1}^{7}\frac{\rho_{k,j}\tau_j\sigma_j(t)L_j(t)}{1+\tau_j L_j(t)}\Delta t-\frac{\sigma_k^2(t)}{2}\Delta t+\sigma_k(t)(\sqrt{\Delta t}\cdot\Delta z_k)$$

(4.1.4)

其中$\Delta z_k \sim N(0,1)$，Δt爲蒙地卡羅模擬的時間跳動長度，由於此商品爲三個月交換一次的利率交換，故在此Δt爲0.25。再將目前(即時點$t_0=0$)市場 LIBOR 利率及已估測出的參數資料代入(4.1.4)式，即可模擬出三個月後(即時點$t_1=0.25$)各期的遠期 LIBOR 利率，當$k=2$可模擬出$L_2(0.25)$：

$$\ln L_2(0+0.25)=\ln L_2(0)-\sigma_2(0)\sum_{j=3}^{7}\frac{\rho_{1,j}\tau_j\sigma_j(0)L_j(0)}{1+\tau_j L_j(0)}\cdot 0.25-\frac{\sigma_2^2(0)}{2}\cdot 0.25+\sigma_2(0)(\sqrt{0.25}\cdot\Delta z_2)$$

$$=\ln 0.0219-0.1253\left(\frac{1\cdot 0.25\cdot 0.2088\cdot 0.0254}{1+0.25\cdot 0.0254}+\dots\dots\dots\dots+\frac{1\cdot 0.25\cdot 0.2477\cdot 0.0397}{1+0.25\cdot 0.0397}\right)\cdot 0.25-\frac{(0.1253)^2}{2}\cdot 0.25+0.1253(\sqrt{0.25}\Delta z_2)$$

由於上式爲$L_2(0.25)$取自然對數之值，故將等式兩邊同時取指數，即可得到

$L_2(0.25)$。同樣地，令 $k=3,\ldots,k=7$ 則可模擬出 $L_3(0.25),\ldots,L_7(0.25)$。

由於隨著模擬時間的過去，不斷地會有遠期利率變成即期利率，舉例來說：當三個月過去時，遠期利率 $L_2(0)=L(0;0.25,0.5)$ 會變成即期利率 $L_2(0.25)=L(0.25;0.25,0.5)$，這時 $L_2(t)$ 就不必再繼續模擬下去。所以利用時點 0.25 的各期遠期利率 $L_i(0.25), i=2,\ldots,7$，可以模擬出下一時點 $t_2=0.5$ 的各期遠期利率 $L_i(0.5), i=3,\ldots,7$。再繼續向下一個時點 $t_3=0.75$ 模擬遠期利率 $L_i(0.75), i=4,\ldots,7$，直到模擬出 $t_4=1$ 的遠期利率 $L_i(1), i=4,5,6$。將各個時點所模擬出的遠期利率紀錄於下表 4.1.8：

表 4.1.8：以 LIBOR 市場模型模擬之遠期利率

	$L_2(t)(\%)$	$L_3(t)(\%)$	$L_4(t)(\%)$	$L_5(t)(\%)$	$L_6(t)(\%)$	$L_7(t)(\%)$
0.25	2.18	2.53	2.96	3.47	3.62	3.95
0.5		2.51	2.94	3.45	3.59	3.92
0.75			2.92	3.42	3.57	3.90
1				3.39	3.54	3.87
1.25					3.52	3.85
1.5						3.83

由於交換利率 $S_{\alpha,\beta}(t)$ 可由一連串的遠期 LIBOR 利率表示如下：

$$S_{\alpha,\beta}(t)=\frac{1-\Pi_{j=\alpha+1}^{\beta}\dfrac{1}{1+\tau_j L_j(t)}}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta}\tau_i\Pi_{j=\alpha+1}^{i}\dfrac{1}{1+\tau_j L_j(t)}} \tag{4.1.5}$$

故將表 4.1.8 的遠期利率資料代入式子(4.1.5)，即可求算交換利率$S_{\alpha,\beta}(t)$，並將結果紀錄於下表 4.1.9：

表 4.1.9：以遠期利率資料求算之交換利率

$S_{1,4}(0.25)\,(\%)$	$S_{2,5}(0.5)\,(\%)$	$S_{3,6}(0.75)\,(\%)$	$S_{4,7}(1)\,(\%)$
2.56	2.97	3.31	3.61

在此，我們將模擬 10000 組遠期利率來估測未來各個時點的交換利率$S_{\alpha,\beta}(t)$，進而利用這 10000 組交換利率資料進行最小平方蒙地卡羅模擬法的選擇權評價。由於 10000 組的模擬結果是非常龐大的一筆資料，我們無法一一列表，所以僅以表 4.1.8、表 4.1.9 紀錄第 5000 次的模擬結果。

以下先將代表交換利率的符號$S_{\alpha,\beta}(t)$化簡爲$S(t)$，且令$\{S(t)\}^{(i)}$代表$S_{\alpha,\beta}(t)$在第i組遠期利率模擬(以下簡稱爲第i條路徑)下的第i組交換利率，其中$t=0.25$、0.5、0.75 或 1，$i=1,2,...,10000$。且下表 4.1.10 爲各期的折現因子：

表 4.1.10：折現因子

$D(t_4,t_3)$	0.9926
$D(t_3,t_2)$	0.9937
$D(t_2,t_1)$	0.9945

現在，我們即可根據第三章的 LSM 做法開始進行評價，過程如下：

1. 首先，求算到期時點 1 的現金流量 $N\delta(\{S(1)\}^{(i)}-K)^{+}$，其中 N 爲名目本金 5 千萬美元，δ 爲利率交換年期 0.25，由於 N 及 δ 均爲固定常數，爲了簡化評價過程，我們儘考慮 $(\{S(1)\}^{(i)}-K)^{+}, i=1,2,...,10000$ 。

2. 選取使得 $\{S(0.75)\}^{(i)}$ 爲價內的路徑，即考慮路徑集合 $I=\left\{i \middle| \{S(0.75)\}^{(i)}>K\right\}$，令 X 爲一行向量且 X 的第 i 個元素 $X_{(i)}=\{S(0.75)\}^{(i)}, i\in I$ 。令 Y 爲對應於 X 的另一行向量，Y 的第 i 個元素 $Y_{(i)}=(\{S(1)\}^{(i)}-K)^{+}\times 0.9926$, $i\in I$ ，其中 0.9926 爲折現因子 $D(t_4,t_3)$。現在，利用最小平方法求算係數 $a_l, l=0,1,2,3$ ，使得下式爲最小值：

$$\left\| Y_i-\sum_{l=0}^{3} a_l B_l(\{S(0.75)\}^{i}) \right\|$$

其中 B_l 爲(3.2.1)式的基底函數。則可以求得在已知 $\{S(0.75)\}^{(i)}$ 的條件下，繼續持有選擇權到下一時點 1 的期望價值爲

$$E\left[Y \middle| \{S(0.75)\}^{(i)}\right]=\sum_{l=0}^{3} a_l B_l(\{S(0.75)\}^{(i)})$$

如此即可比較在價內路徑 $i\in I$ 上立即履約的價值 $(\{S(0.75)\}^{(i)}-K)$ 與繼續持有選擇權的期望價值 $\sum_{l=0}^{3} a_l B_l(\{S(0.75)\}^{(i)})$ ，進而決定出在時點 0.75 的最佳履約策略，如表 3.3.4。

3. 重複上述做法找出時點 0.5 及時點 0.25 的最佳履約策略，進而求得這 10000 條路徑的最佳履約時點，如表 3.3.8；並得到現金流量矩陣，如表 3.3.9 。

4. 將所有路徑的現金流量折現至期初時點 0 ，並求算其平均值，則可得模擬的選擇權價格爲 1.538 元。

第二節　如何利用選擇權商品避險

我們舉一個例子來說明歐式選擇權的應用。現在假設A 公司為了規避未來利率上升的風險，想將原本浮動利率負債轉換為固定利率， A 公司可選擇於舉借負債時透過利率交換來達到避險效果，但由於此筆借款為一年後才承作， A 公司擔心一年後利率交換的利率會上揚，導致避險成本提高，想於此時鎖住一年後的利率交換價格，因此決定向B銀行購買一筆支付固定利率的利率交換選擇權來避險，合約內容如下表：

發行日期：2005 年 2 月 4 日
有效期限：2006 年 2 月 4 日
發行期限：1 年
發行本金： 一億美元
履約價(固定利率)： 2.95%
固定利率支付者： A 公司
浮動利率： 三個月期美元 LIBOR 利率
浮動利率支付者： B 銀行
交換開始日： 2006 年 2 月 4 日
交換到期日： 2009 年 2 月 4 日
交割方式： 現金差額結算或實物交割
選擇權種類： 歐式選擇權
權利金： 30萬美元

上述合約表示A 公司將與B銀行承作一筆1×4歐式Payer's　Swaption，即在一年後選擇權到期時， A 公司有權選擇是否與B銀行承作一筆三年期利率交換交易，支付履約利率2.95%，收取浮動三個月期美元LIBOR利率。則依當時三年期利率交換市場利率情況，將出現以下兩種不同結果：

1. 一年後之三年期利率交換交易利率高於 2.95%：

此時 A 公司將執行選擇權，取得三年期利率交換部位，支付固定利 2.95%，則 A 公司可 將未來三年籌資成本固定於 2.95%，達到避險效果。

2. 一年後之三年期利率交換交易利率低於 2.95%：

此時 A 公司將不會執行選擇權，而自行透過利率交換市場，承作三年期付固定收浮動之交易，可獲得比選擇權執行價格低的交換利率，而損失為已付出的權利金。

若將利率交換與利率交換選擇權搭配運用，則可以合成可延展之利率交換(Extendable Swap)及可取消之利率交換(Cancelable Swap) ，以延展已到期之利率交換或提前取消所承做之利率交換。以下例說明：

假設A 公司已承作一筆三年期利率交換，收取浮動利率並支付固定利率，但A 公司認為三年後的利率仍有上升的機會，此時便可同時買進一筆3×5 的 Payer's Swaption，調整Swaption契約之履約利率與所承作之三年期利率交換一致。於三年後所承作之利率交換到期時，根據當時利率走勢決定是否履行此筆 3×5 Payer's Swaption，若A 公司決定執行此權利，則相當於將所承作之三年期利率交換，依相同條件作兩年之延展。反之，若A 公司於期初承作此三年期利率交換時，認為一 年後利率會有大幅下跌的機會，便可同時買入一筆 1×3 Receiver's Swaption，一年後若利率如預期大幅下跌，便可執行此選擇權，

承作一筆兩年期收固定付浮動之利率交換，而此交換可與原本承作之三年期利率交換相互沖銷，達到取消原契約之功能。

依上述利率交換與利率交換選擇權運用之相同概念，金融機構亦可合成可買回利率交換(Callable Swap)及可賣回利率交換(Puttable Swap)兩種衍生性商品，提供市場更靈活的避險工具。其中可買回利率交換是由一個利率交換交易及一個或數個Receiver's Swaption組成，提供利率交換中支付固定利率者於不同時點買回該契約之權利； 可賣回利率交換則由一個利率交換交易及一個或數個Payer's Swaption組成， 提供利率交換中收取固定利率者於不同時點賣回該契約之權利。