2. 模糊時間數列分析與預測

2.1 模糊邏輯之引進

模糊理論是一種定量化處理人類語言思維的新興學門。模糊理論並非如字面上的意思那樣馬虎、不精確。反而是面對生活上的各種不確定性，以更合理的規則去分析、去管理控制，以期得到更有效率、更合乎人性與智慧的結果。現今科學所欲研究的物件之結構複雜性日益增加，再加上人類的知識語言因人類本身的主觀意識、時間差異、環境變遷與研判事件的角度等因素，而具備模糊性，使得科學家無法清楚研究物件的真實本質，以進而適當地建立假設的數學模式。於是乎，模糊理論的想法因應而生。

對普通集合論進行擴充之後而形成的模糊集合論、具有概率擴充意味的模糊測度論以及把模糊概念 (Fuzziness) 導入通常邏輯而形成的模糊邏輯總稱爲模糊理論。模糊測度論所處理的不是語意上的不確定，而是對事務進行判斷時所表現的主觀不確定性。我們人類所處的現實環境中就是模糊的，思考、判斷、溝通等等方面必然具有許多模糊的不確定性。以往的二元集合是二元規定，以特徵函數 (Characteristic Function) 來表示，$\chi_A(x)=\begin{cases}1, if\ \ x\in A\\ 0, if\ \ x\notin A\end{cases}$ 即一個元素屬於一個集合則以 1 表示，或是不屬於一個集合則以 0 表示。但是在模糊理論中，我們將打破傳統的二元邏輯硬計算 (Hard Computing) 思維，而採用介於 0 和 1 之間的實數，來表示某元素對某集合之隸屬程度 (Membership) 的軟計算 (Soft Computing) 思維。

我們介紹一個模糊模式的建構方式，從經濟或社會問題的立場來分析人類思考與行爲的模式。此方法稱爲模糊邏輯模式信念（the Fuzzy Logic Model of Belief）。模糊邏輯的應用主張個人的喜好程度不需要非常清晰或是條理井然。這種概念與布林邏輯理念剛好相對立，例如依照布林邏輯中Ａ和Ｂ的比較，其結果只有三種可能：(1). Ａ＞Ｂ (2). Ａ＜Ｂ (3). Ａ＝Ｂ。但是，人類主觀思維的運作遠比布林邏輯的結果來得複雜，尤其是在人的思維中具有許多不明確的偏好。因此，如何掌握真實狀況作全盤描繪的構想，早已成爲許多邏輯學家的努力目標。對人類而言，憑藉模糊模式的呈現方式要比直接指定單一物體的特定值來得適切些，此一概念也比較合於用來評估物體與物體間的相關特性。此外，由於其他特性往往也會有助於某一意見的評定，因此使用模糊邏輯時，必須對所謂的

“其他特性”加以說明，以便將人們的喜好程度轉換成便於計算的效用函數（Utility Function）。

模糊邏輯彌補了布林邏輯的不足，但是並沒有完全取代布林邏輯，兩個方法基本上是可以互存的。關鍵在於每一理論各自描述不同理念。模糊子集理論的主要特質，在於對於無限的可能偏好，能做出無限的解說。因此，使用模糊邏輯來測度，需要使用模糊統計來代替傳統統計，而模糊邏輯測度主要根據模糊集合的基本理論。有關模糊集合的基本理論，在此不做詳細介紹，有興趣的讀者可參考 Klir 與 Folger（1988）或 Zimmermann（1991）。

在傳統的集合理論中，一元素要嘛就屬於某集合，要嘛就不屬於該集合。但是在模糊集合中的元素，其隸屬程度可能只有部分是屬於該集合。例如：“年輕人”此一名詞，究竟幾歲以上才算得是“不再年輕”？在一般人們的印象中並沒有一個確切的界限來區分“年輕”和“不再年輕”。在模糊集合的定義中，可以顯示出一個 20 歲的人是“90％的年輕”，而某一個 60 歲的人相對的只有“30％的年輕”。在模糊集合中，隸屬度（Membership）的全距通常設定在 0 到 1 之間。因此，每個語言變項，“年輕”，代表一個可能性的分佈。此一分佈的平均值用以表示人類真實評定是“年輕人”的數值。而關於分佈的評定，可能因人而異，且不需呈現常態，但是人類思維之分佈，在一般的多數情況之下，通常不脫離爲凸函數 (Convex Function) 之形式。

隸屬度函數 (Membership Function) 是模糊理論的基礎，它是從特徵函數 (Characteristic Function) 衍生而來，用以表達元素對於集合的隸屬程度 (Membership Grade)，其範圍是介於 0 與 1 之間的實數。若一個元素屬於一個集合的程度越大，則其隸屬度值就會越接近 1。反之，一個元素屬於一個集合的程度越小，則其隸屬度值越小。但是要適當地建立一個足以表達模糊概念的隸屬度函數，卻不是一件容易的工作。本質上，隸屬度雖然是客觀事物的屬性，但卻往往存在著個人的主觀意識，一般言並無通用的定理或公式可以衡量，通常是根據經驗或統計加以確定，例如透過模糊統計問卷調查取得。

傳統的社會和經濟研究，投入了很多有關人類的互動關係及模式分析。在一個典型的模式建構中，經常面對一些不確定的例子，例如：每年的學生註冊人數，以年初？年中或年尾爲準？期間所得數值往往各有不同。又如新台幣對美元的匯率，是以開盤？收盤？或是最高最低價之平均爲準？結果亦有相當的差距。

Hendershot 與 Placek（1981）曾對此一領域的文獻做一廣泛的回顧。在社會科學及有關經濟領域的研究中，問題的答案很少是確切的真或僞、0 或 1、對或錯等形式的二元回答。如果我們嘗試著去分析人類的信念，將會發現必須去面對行爲的不確定性。而模糊集合中連續區間值具有能處理亦真亦僞狀況的能力，因此應用區間值的模糊特性所做的分析，使研究者可以處理有關的不確定，在實際的運用上，的確是比較符合實際狀況的一種測量工具。

2.2 模糊時間數列分析與預測

在探討模糊時間數列之前，首要步驟必須先將一般性資料轉換爲模糊資料。在本文中，我們使用隸屬度函數 (Membership Function) 將觀察值轉換爲模糊值，由於隸屬度函數可以描述模糊集合的性質，是模糊理論中最基本的概念，且透過隸屬度函數我們才能對模糊集合進行量化，並進一步地利用精確的數學方法，去分析和處理模糊性的資訊。因此，爲了建立觀測值的預測模式，或是由預測模式來計算模糊輸出值，首先就是將觀測值轉換爲模糊值，而這個轉換的過程稱爲模糊化 (Fuzzification)。所以，隸屬度函數在建構預測模式的過程中，扮演一個相當重要的角色。

然而在得到一組時間數列原始數據時，並不是馬上就將數據模糊化。因爲預測模式是建立在假設時間數列資料走勢爲穩定(非遞增或遞減且均數爲零)的基礎下，所以必須將數據加以逐次差分，以達到資料穩定的狀態，再將該組已差分的數字加以模糊化，來進行模式的建構，最後再視問題需求是否做反模糊化、反差分動作。我們知道每對一個連續函數做一次的微分動作，就會降低函數的次數一次。例如一個二次函數微分一次就變成一次函數，微分第二次就變成常數函數，微分第三次就變成零函數。而差分就像微分的效果一樣，也是每做一次的差分動作，就會降低數據的次數一次，二者不同之處在於微分係用在連續值，差分係用在離散值。有關穩定型時間數列的定義與介紹，在吳柏林著『時間數列分析導論』一書中有詳盡的說明。強穩定時間數列，指一時間數列$\{X_t\}$對任意整數m與任一組k個時間點$\{t_1,t_2,\cdots,t_k\}$，若$\left(X_{t_1},X_{t_2},\cdots,X_{t_k}\right)$與$\left(X_{t_1+m},X_{t_2+m},\cdots,X_{t_k+m}\right)$有相同的聯合分配函數，即$F\left(X_{t_1},X_{t_2},\cdots,X_{t_k}\right)=F\left(X_{t_1+m},X_{t_2+m},\cdots,X_{t_k+m}\right)$。弱穩定時間數列，指該時間數列$\{X_t\}$其結合動差函數存在，且不隨時間而改變，即$Cov\left(X_{t_1},X_{t_2},\cdots,X_{t_k}\right)=Cov\left(X_{t_1+m},X_{t_2+m},\cdots,X_{t_k+m}\right)$。一般所說的穩定型時間數列，指

的是弱穩定時間數列，所有 X_t 都有相同期望值與變異數，即 $\mu_t = \mu$ ，$\sigma_t^2 = \sigma^2$ ，$Cov(X_t, X_{t+m}) = \gamma_m$，自共變異數不隨時間而變。為方便起見，我們考慮以 $\mu = 0$ ，提供一個如何檢定時間數列是否達到資料穩定狀態的快速方法如下：

定義 2.1 穩定型時間數列

令 $\{X_t \in R \mid t = 1,2,...,n\}$ 為一個時間數列，給定顯著水準 α .

若 $\left|\overline{X}\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t\right| \le \alpha$ ，則稱 $\{X_t \in R \mid t = 1,2,...,n\}$ 為一個穩定型時間數列。

以下我們考慮以三角形隸屬度分佈函數來進行模糊化轉換的程序。如前所述，關於分佈的評定，可能因人而異，且不需呈現常態，但是人類思維之分佈，在一般的多數情況之下，通常不脫離為凸函數 (Convex Function) 之形式。三角形分佈缺點是可能與實際分佈有所不同而失真，導致預測模式輸出不準確的風險，另外它假設相鄰二區間有值，其他區間為零，似乎也不能含蓋更廣的情況。儘管如此，三角形隸屬度分佈函數可算是最簡便、容易又計算快速的方法，其結果已經是標準化的隸屬度分佈函數。

定義 2.2 三角形隸屬度分佈函數 (引用吳柏林著『模糊統計導論』P. 178)

令 $\{X_t \in R \mid t = 1,2,...,n\}$ 為一個時間數列，Ω 為其論域 (Universe of Discourse)。給定 Ω 的一個次序分割集合 (Ordered Partition Set)，$\left\{P_i \mid i = 1,2,...,k, \bigcup_{i=1}^{k} P_i = \Omega\right\}$。設 m_i 為其分割集合的典型值，$i = 1,2,\cdots,k$ ，且其相對於語言變數為 $\{L_i \mid i = 1,2,...,k\}$。則對任意 t，若 X_t 介於 m_i 與 m_{i+1} 之間，則其屬於語言變數 L_i 的隸屬度為 $\frac{m_{i+1} - X_t}{m_{i+1} - m_i}$ ，屬於語言變數 L_{i+1} 的隸屬度為 $\frac{X_t - m_i}{m_{i+1} - m_i}$ ，屬於其他語言變數 $L_1, L_2, \cdots, L_{i-1}, L_{i+2}, \cdots, L_k$ 的隸屬度皆為 0。

本文中所探討的是多變量多階自迴歸模糊時間數列模式的建構方法，因此，必須對模糊時間數列的意義予以說明。所謂模糊時間數列，就是將模糊邏輯應用於時間數列分析過程時，結合語言變數的分析方法，以解決資料的模糊性問題。是故，在建構多變量模糊時間數列模式與進行預測前，必須先給定幾個有關模糊時間數列的定義：

定義 2.3 多變量模糊時間數列

令$\{ X_{a,t} \in R \mid t=1,2,...,n \}$，$a=1,2,\cdots,q$，為一個$q$變量時間數列，$\Omega_a$為其論域(Universe of Discourse)，$a=1,2,\cdots,q$。給定Ω_a的一個次序分割集合 (Ordered Partition Set)，$\left\{ P_{ai} \mid i=1,2,...,k_a, \bigcup_{i=1}^{k_a} P_{ai} = \Omega_a \right\}$，且其相對應之語言變數為$\{ L_{ai} \mid i=1,2,...,k_a \}$，其中每一個變量的語言變數個數$k_a$不需要相等。對任一$a=1,2,\cdots,q$，$t=1,2,\cdots,n$而言，若觀察值$X_{a,t}$相對於$\{ L_{ai} \mid i=1,2,...,k_a \}$的模糊數$FX_{a,t}$具有隸屬度函數為$\{ \mu_{ai}(X_t) \in R \mid i=1,2,....,k_a \}$，則我們稱$\{FX_{a,t}\}$為$\{X_{a,t}\}$相對於$\{ L_{ai} \mid i=1,2,...,k_a \}$上的一個$q$變量模糊時間數列，並且記為

$$FX_{a,t} = \frac{\mu_{a1}(X_t)}{L_{a1}} + \frac{\mu_{a2}(X_t)}{L_{a2}} + \cdots + \frac{\mu_{ak_a}(X_t)}{L_{ak_a}} 。$$

其中“+”表示連結符號而非一般加號，“$\frac{\mu_{ai}(X_t)}{L_{ai}}$”表示$X_{a,t}$相對於語言變數$L_{ai}$及其隸屬度函數$\mu_{ai}(X_t)$的對應關係。若$\mu_{ai}(X_t): R \to [0,1]$，且$\sum_{i=1}^{k_a} \mu_{ai}(X_t) = 1$，對所有$a=1,2,\cdots,q$，$t=1,2,\cdots,n$都成立，則$\{FX_{a,t}\}$稱為隸屬度標準化的多變量模糊時間數列。

爲了方便起見，以下我們將$FX_{a,t} = \frac{\mu_{a1}(X_t)}{L_{a1}} + \frac{\mu_{a2}(X_t)}{L_{a2}} + \cdots + \frac{\mu_{ak_a}(X_t)}{L_{ak_a}}$省略語言變數，簡寫成向量形式$FX_{a,t} = \left(\mu_{a1}(X_t), \mu_{a2}(X_t), \cdots, \mu_{ak_a}(X_t) \right)$。

2.3 多變量模糊時間數列模式建構

有了以上的說明，我們便可以建立多變量模糊時間數列模型，其定義如下：

定義 2.4 q 變量 p 階自迴歸模糊時間數列模式 $\mathrm{VFAR}(p,q)$

給定一個 q 變量模糊時間數列 $\{ FX_{a,t} \mid t = 1,2,...,n \}$，$a = 1,2,\cdots,q$，其對應之語言變數為 $\{ L_{ai} \mid i = 1,2,\cdots,k_a \}$，$a = 1,2,...,q$，其中 k_a 為第 a 個變量之語言變數個數。隸屬度函數為 $\{ \mu_{ai}(X_t) \mid t = 1,2,...,n,\quad i = 1,2,\cdots,k_a \}$，$a = 1,2,...,q$，寫成 $FX_{a,t} = \left(\mu_{a1}(X_t), \mu_{a2}(X_t), \cdots, \mu_{ak_a}(X_t) \right)$，$t = 1,2,\cdots,n$，$a = 1,2,...,q$。若存在一個 $\left(p \cdot \sum_{a=1}^{q} k_a \right) \times \left(\sum_{a=1}^{q} k_a \right)$ 之模糊關係矩陣 R，使得 $\left[\left(FX_{1,t}, FX_{2,t}, \cdots, FX_{q,t} \right) \right] =$

$$\left[\left(FX_{1,t-1}, FX_{2,t-1}, \cdots, FX_{q,t-1} \right), \quad \left(FX_{1,t-2}, FX_{2,t-2}, \cdots, FX_{q,t-2} \right), \quad \cdots \quad \left(FX_{1,t-p}, FX_{2,t-p}, \cdots, FX_{q,t-p} \right) \right]$$

$\times R$，對於 $t = p+1,\cdots,n$ 都成立，

上式×為普通矩陣乘法，其中

$$R = \left[\begin{array}{c} R(1) \\ \hline R(2) \\ \hline \vdots \\ \hline R(p) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} R_{11}(1) & R_{12}(1) & \cdots\cdots & R_{1q}(1) \\ R_{21}(1) & R_{22}(1) & \cdots\cdots & R_{2q}(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{q1}(1) & R_{q2}(1) & \cdots\cdots & R_{qq}(1) \\ \hline R_{11}(2) & R_{12}(2) & \cdots\cdots & R_{1q}(2) \\ R_{21}(2) & R_{22}(2) & \cdots\cdots & R_{2q}(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{q1}(2) & R_{q2}(2) & \cdots\cdots & R_{qq}(2) \\ \hline & \vdots & & \\ & \vdots & & \\ & \vdots & & \\ & \vdots & & \\ \hline R_{11}(p) & R_{12}(p) & \cdots\cdots & R_{1q}(p) \\ R_{21}(p) & R_{22}(p) & \cdots\cdots & R_{2q}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{q1}(p) & R_{q2}(p) & \cdots\cdots & R_{qq}(p) \end{array} \right],$$

我們稱此多變量模糊時間數列 $\{ FX_{a,t} \mid t = 1,2,...,n \}$，$a = 1,2,\cdots,q$，為一個 q 變量 p 階的多變量模糊自迴歸 (Multi-Variate Fuzzy Auto-Regressive) 模式，記做

$\text{VFAR}(p,q)$。其中每一個 $R(\ell)$ 為一 $\left(\sum_{a=1}^{q} k_a\right) \times \left(\sum_{a=1}^{q} k_a\right)$ 之矩陣，稱為第 ℓ 階模糊關係矩陣，$\ell = 1,\cdots,p$。每一個 $R_{ab}(\ell)$ 為一 $k_a \times k_b$ 之矩陣，稱為第 a 個變量對第 b 個變量的第 ℓ 階模糊關係矩陣，$\ell = 1,\cdots,p$，$a,b = 1,2,...,q$。每一個元素 $[R_{ab}(\ell)]_{ij}$ 稱為第 a 個變量之第 i 個語言變數對第 b 個變量之第 j 個語言變數的第 ℓ 階模糊關係，$\ell = 1,\cdots,p$，$a,b = 1,2,...,q$，$i = 1,\cdots,k_a$，$j = 1,\cdots,k_b$。在此模式中，如果 p =1 則此模式又可稱為馬可夫過程 (Markov Process)。

在時間數列分析中，自相關值的決定相當重要，因爲它反應了一時間數列長期的自我相關趨勢關係。因此我們考慮以模糊關係矩陣來分析模糊時間數列的自我相關程度。假設時間數列資料走勢爲穩定並將之模糊化後，我們定義幾種模糊關係矩陣 R 的計算方法如下：

定義 2.5　$\text{VFAR}(p,q)$ 模糊時間數列模式的模糊關係 $[R_{ab}(\ell)]_{ij}$ 計算方法

設 $\{\, FX_{a,t} \mid t = 1,2,...,n \,\}$，$a = 1,2,\cdots,q$，為一 $\text{VFAR}(p,q)$ 模糊時間數列，其對應之語言變數為 $\{\, L_{ai} \mid i = 1,2,...,k_a \,\}$，$a = 1,2,\cdots,q$，其中 k_a 為第 a 個變量之語言變數個數，隸屬度函數為 $\{\, \mu_{ai}(X_t) \mid t = 1,2,...,n,\ \ i = 1,2,\cdots,k_a \,\}$，$a = 1,2,...,q$，寫成 $FX_{a,t} = \left(\, \mu_{a1}(X_t), \mu_{a2}(X_t), \cdots, \mu_{ak_a}(X_t) \,\right)$，$t = 1,2,\cdots,n$，$a = 1,2,...,q$。則定義每一個第 a 個變量之第 i 個語言變數對第 b 個變量之第 j 個語言變數的第 ℓ 階模糊關係 $[R_{ab}(\ell)]_{ij}$，$\ell = 1,\cdots,p$，$a,b = 1,2,...,q$，$i = 1,\cdots,k_a$，$j = 1,\cdots,k_b$ 的計算公式如下：

一、普通矩陣乘法 ：

$$[R_{ab}(\ell)]_{ij} = \sum_{t=\ell+1}^{n} \left\{ \left[\, \mu_{ai}(X_{t-\ell}) \,\right] \times \left[\, \mu_{bj}(X_t) \,\right] \right\}。$$

二、最大-最小法 (max-min) ：

$$[R_{ab}(\ell)]_{ij} = \max_{\ell+1 \le t \le n} \left\{ \min\left[\ \mu_{ai}(X_{t-\ell}),\ \mu_{bj}(X_t) \right] \right\}。$$

三、平均倍數法：

$$[T_{ab}(\ell)]_{ij} = \{ t \mid \mu_{ai}(X_{t-\ell}) \cdot \mu_{bj}(X_t) > 0 \,, t = \ell+1, \cdots, n \}，$$

$$[M_{ab,t}(\ell)]_{ij} = \begin{cases} \mu_{bj}(X_t) / \mu_{ai}(X_{t-\ell}), if\ t \in [T_{ab}(\ell)]_{ij} \\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad , if\ otherwise \end{cases} ,$$

$$[R_{ab}(\ell)]_{ij} = \begin{cases} \sum\limits_{t \in [T_{ab}(\ell)]_{ij}} [M_{ab,t}(\ell)]_{ij} \Big/ \left| [T_{ab}(\ell)]_{ij} \right| , if \left| [T_{ab}(\ell)]_{ij} \right| > 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad , if\ otherwise \end{cases} 。$$

（備註：$[T_{ab}(\ell)]_{ij}$ 為使 $\mu_{ai}(X_{t-\ell}) \cdot \mu_{bj}(X_t)$ 不為 0 的 t 所成的集合；$[M_{ab,t}(\ell)]_{ij}$ 為倍數；$[R_{ab}(\ell)]_{ij}$ 為平均倍數。）

四、相關係數 (負數取 0) 法：

$$[R_{ab}(\ell)]_{ij} = \max \left\{ \frac{\sum\limits_{t=\ell+1}^{n} \left[\left(\mu_{ai}(X_{t-\ell}) - \frac{1}{n-\ell} \sum\limits_{t=\ell+1}^{n} \mu_{ai}(X_{t-\ell}) \right) \cdot \left(\mu_{bj}(X_t) - \frac{1}{n-\ell} \sum\limits_{t=\ell+1}^{n} \mu_{bj}(X_t) \right) \right]}{\sqrt{\sum\limits_{t=\ell+1}^{n} \left[\mu_{ai}(X_{t-\ell}) - \frac{1}{n-\ell} \sum\limits_{t=\ell+1}^{n} \mu_{ai}(X_{t-\ell}) \right]^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{t=\ell+1}^{n} \left[\mu_{bj}(X_t) - \frac{1}{n-\ell} \sum\limits_{t=\ell+1}^{n} \mu_{bj}(X_t) \right]^2}} ,\ 0 \right\}$$

五、相關係數 (負數取正) 法：

$$[R_{ab}(\ell)]_{ij} = \left| \frac{\sum\limits_{t=\ell+1}^{n} \left[\left(\mu_{ai}(X_{t-\ell}) - \frac{1}{n-\ell} \sum\limits_{t=\ell+1}^{n} \mu_{ai}(X_{t-\ell}) \right) \cdot \left(\mu_{bj}(X_t) - \frac{1}{n-\ell} \sum\limits_{t=\ell+1}^{n} \mu_{bj}(X_t) \right) \right]}{\sqrt{\sum\limits_{t=\ell+1}^{n} \left[\mu_{ai}(X_{t-\ell}) - \frac{1}{n-\ell} \sum\limits_{t=\ell+1}^{n} \mu_{ai}(X_{t-\ell}) \right]^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{t=\ell+1}^{n} \left[\mu_{bj}(X_t) - \frac{1}{n-\ell} \sum\limits_{t=\ell+1}^{n} \mu_{bj}(X_t) \right]^2}} \right|$$

定義 2.6　VFAR(p,q)模糊時間數列模式的預測

給定一個 VFAR(p,q)模糊時間數列模式，其模糊關係矩陣為 R。若已知觀測值為 $\{ FX_{a,t} \mid t = 1,2,...,n \}$，$a = 1,2,\cdots,q$，且未來真實值亦滿足該 VFAR$(p,q)$模糊時間數列模式，則未來 w 期的預測值為：

1. 當 $w=1$，

$$\left[\left(F\hat{X}_{1,n+1}, F\hat{X}_{2,n+1}, \cdots, F\hat{X}_{q,n+1}\right)\right] =$$

$$\left[\left(FX_{1,n}, FX_{2,n}, \cdots, FX_{q,n}\right), \quad \cdots, \quad \left(FX_{1,n+1-p}, FX_{2,n+1-p}, \cdots, FX_{q,n+1-p}\right)\right] \times R$$ ，

2. 當 $w = 2,3,\cdots, p$，

$$\left[\left(F\hat{X}_{1,n+w}, F\hat{X}_{2,n+w}, \cdots, F\hat{X}_{q,n+w}\right)\right] =$$

$$\Big[\left(F\hat{X}_{1,n+w-1}, F\hat{X}_{2,n+w-1}, \cdots, F\hat{X}_{q,n+w-1}\right), \quad \cdots, \quad \left(F\hat{X}_{1,n+1}, F\hat{X}_{2,n+1}, \cdots, F\hat{X}_{q,n+1}\right),$$

$$\left(FX_{1,n}, FX_{2,n}, \cdots, FX_{q,n}\right), \quad \cdots, \quad \left(FX_{1,n+w-p}, FX_{2,n+w-p}, \cdots, FX_{q,n+w-p}\right)\Big] \times R$$ ，

3. 當 $w = p+1,\cdots$，

$$\left[\left(F\hat{X}_{1,n+w}, F\hat{X}_{2,n+w}, \cdots, F\hat{X}_{q,n+w}\right)\right] =$$

$$\left[\left(F\hat{X}_{1,n+w-1}, F\hat{X}_{2,n+w-1}, \cdots, F\hat{X}_{q,n+w-1}\right), \quad \cdots, \quad \left(F\hat{X}_{1,n+w-p}, F\hat{X}_{2,n+w-p}, \cdots, F\hat{X}_{q,n+w-p}\right)\right] \times R$$ 。

例 2.6

設一個双變量模糊時間數列$\{ FX_{a,t} \mid t=1,2,\cdots,10 \}$，$a=1,2$，滿足 VFAR$(3,2)$模式，其模糊關係矩陣爲$R$，且未來真實值亦滿足該模式，則未來4期的預測值爲：

$$\left[F\hat{X}_{1,11},\quad F\hat{X}_{2,11} \right] = \left[(FX_{1,10}, FX_{2,10}),\quad (FX_{1,9}, FX_{2,9}),\quad (FX_{1,8}, FX_{2,8}) \right] \times R \text{ ，}$$

$$\left[F\hat{X}_{1,12},\quad F\hat{X}_{2,12} \right] = \left[(F\hat{X}_{1,11}, F\hat{X}_{2,11}),\quad (FX_{1,10}, FX_{2,10}),\quad (FX_{1,9}, FX_{2,9}) \right] \times R \text{ ，}$$

$$\left[F\hat{X}_{1,13},\quad F\hat{X}_{2,13} \right] = \left[(F\hat{X}_{1,12}, F\hat{X}_{2,12}),\quad (F\hat{X}_{1,11}, F\hat{X}_{2,11}),\quad (FX_{1,10}, FX_{2,10}) \right] \times R \text{ ，}$$

$$\left[F\hat{X}_{1,14},\quad F\hat{X}_{2,14} \right] = \left[(F\hat{X}_{1,13}, F\hat{X}_{2,13}),\quad (F\hat{X}_{1,12}, F\hat{X}_{2,12}),\quad (F\hat{X}_{1,11}, F\hat{X}_{2,11}) \right] \times R \text{ 。} \qquad \square$$

在多變量模糊時間數列模式的建構過程中，有許多的情況是需要注意的。我們分別敘述如下：

由於所收集的資料，其型態可能爲數值的或屬性的資料、也有可能是語言值(Linguistic Values)的資料（例如：透過品嚐所獲得的資料等等），針對這些型態的資料，很難只利用傳統的時間數列方法來加以分析。因此，倘若能使用模糊集合的方法，則不會受資料型態的影響，且更能建立合適的模式。

在架構模糊論域集合時，其分割的次序集合數，應該要多少個才適當，目前尚無定論。一般來說，分割的次序集合數越多，其準確度越高，然而運算的複雜度也相對地增加。所以，準確度與複雜度的取捨就應視個人的需要而定。一般來說，五個分割的次序集合數較多人使用。

在資料的模糊化方面，我們是使用三角形隸屬度分佈函數並將其模糊化。在此過程中，其典型值的取得尚未有固定的方法，我們認爲可以用每個次序分割集合中其元素的中位數、平均數或分類的群落中心爲其典型值。但是，若以群落中心爲其典型值，則易造成一集合中有多個典型值，此時該集合爲梯形隸屬度函數，將會使得轉換過程較爲複雜。反之，若使用中位數或平均數爲其典型值，則每一個集合中其典型值只有一個，此時該集合爲三角形隸屬度函數，轉換過程將會較爲簡單。一般來說，典型值使用中位數較多人採用。

資料結構是否穩定，是模式建構過程中研究的重點。在本文探討的問題中，其資料必須大致趨於穩定，才可進行模式建構步驟。若收集的資料走勢具有遞增或遞減或均數不爲零的傾向，其處理的方法是將原始資料逐次差分，使之達到穩定狀態，然後才將已差分的資料模糊化，來進行模式的建構，最後再視問題需求是否做反模糊化、反差分動作。反之，若所收集的資料已具備模糊結構，且檢定出確有模糊趨勢 (模糊趨勢定義請參考吳柏林著『模糊統計導論』一書)，則目前尚未有方法可加以解決。

階次的認定在模糊時間數列分析上，佔著相當重要的地位。若我們能找到正確的階次，才能掌握影響資料走勢的因素，進而建構符合實際狀況的數學模式。在實務應用上，尤其是股票、匯率、期貨等資料，其時間數列走勢常呈現高者愈高，低者愈低的非線性型態，且大部分金融市場上的運作情形皆符合馬可夫性質(即一階性質)。因此，可藉由實際的狀況，來決定其階次的選取。階次的認定可參考吳柏林著『模糊統計導論』一書。當選定模糊時間數列的階次後，結合影響資料的多項因素，利用定義 2.5 中所介紹的計算方法，並進而得到模糊關係矩陣 R 。

2.4 如何由模糊數進行屬性判別

在多變量模糊時間數列中，如何將模糊數值(隸屬度函數)轉換成所屬的語言變數(屬性)亦是一研究重點。文獻通常是以其最大隸屬度函數所在的位置來加以判定。但若只取最大而捨去其他隸屬度函數可能會喪失重要資訊等風險，事實上，一併考慮其他非最大隸屬度函數亦可以增加預測命中率，爲此本文定義語言向量指標函數來處理其他非最大隸屬度函數情形。

定義 2.7 語言向量指標函數

給定一個 q 變量之模糊時間數列 $\{ FX_{a,t} \mid t=1,2,...,n \}$，$a=1,2,\cdots,q$，其對應之語言變數為 $\{ L_{ai} \mid i=1,2,...,k_a \}$，$a=1,2,\cdots,q$，其中 k_a 為第 a 個變量之語言變數個數，隸屬度函數為 $\{ \mu_{ai}(X_t) \mid t=1,2,...,n,\ \ i=1,2,\cdots,k_a \}$，$a=1,2,...,q$，寫成 $FX_{a,t}=\left(\mu_{a1}(X_t),\mu_{a2}(X_t),\cdots,\mu_{ak_a}(X_t) \right)$，$t=1,2,\cdots,n$，$a=1,2,...,q$。令

$F\vec{X}_{a,t}=\left(I_{a1,t},I_{a2,t},\cdots,I_{ak_a,t} \right)$，$t=1,2,\cdots,n$，$a=1,2,...,q$，其中

$$I_{ai,t}=\begin{cases} 1, & if\ \ \mu_{ai}(X_t)\ge \max\limits_{1\le i\le k_a}(c)\{\mu_{ai}(X_t)\}>0 \\ 0, & if\ \ otherwise \end{cases}\text{，} c\in\{1,\cdots,k_a\}\text{，}$$

稱 $F\vec{X}_{a,t}$ 為 $FX_{a,t}$ 之語言向量指標函數。

（備註：$\max\limits_{1\le i\le k_a}(c)\{\mu_{ai}(X_t)\}$ 為取前幾大數字的函數，例如 $c=1$ 表示取最大隸屬度，$c=2$ 表示取最大及次大隸屬度。)

例 2.7

設一個隸屬度標準化的單變量模糊時間數列 $\{ FX_t \mid t=1,2,3,4,5,6 \}$，滿足 $\mathrm{VFAR}(1,1)$模式，其中

$FX_1=$(0.00，0.00，0.77，0.23，0.00)
$FX_2=$(0.00，0.00，0.00，1.00，0.00)
$FX_3=$(0.03，0.97，0.00，0.00，0.00)
$FX_4=$(0.00，0.11，0.89，0.00，0.00)
$FX_5=$(0.00，0.00，0.30，0.70，0.00)
$FX_6=$(0.00，0.00，0.56，0.44，0.00)

取 $c=1$，得語言向量指標函數爲

$F\vec{X}_1=\left(I_{1,1},I_{2,1},I_{3,1},I_{4,1},I_{5,1}\right)$=(0，0，1，0，0)
$F\vec{X}_2=\left(I_{1,2},I_{2,2},I_{3,2},I_{4,2},I_{5,2}\right)$=(0，0，0，1，0)
$F\vec{X}_3=\left(I_{1,3},I_{2,3},I_{3,3},I_{4,3},I_{5,3}\right)$=(0，1，0，0，0)
$F\vec{X}_4=\left(I_{1,4},I_{2,4},I_{3,4},I_{4,4},I_{5,4}\right)$=(0，0，1，0，0)

$F\vec{X}_5=\left(I_{1,5},I_{2,5},I_{3,5},I_{4,5},I_{5,5}\right)$=(0，0，0，1，0)
$F\vec{X}_6=\left(I_{1,6},I_{2,6},I_{3,6},I_{4,6},I_{5,6}\right)$=(0，0，1，0，0)

設$\left\{F\hat{X}_t \mid t=2,3,4,5,6\right\}$爲$\left\{FX_t \mid t=1,2,3,4,5,6\right\}$經模式計算後之隸屬度標準化的模糊時間數列輸出值，其中

$F\hat{X}_2=$(0.06，0.31，0.34，0.28，0.02)
$F\hat{X}_3=$(0.19，0.24，0.23，0.34，0.00)
$F\hat{X}_4=$(0.02，0.22，0.30，0.37，0.09)
$F\hat{X}_5=$(0.02，0.32，0.36，0.27，0.03)
$F\hat{X}_6=$(0.14，0.26，0.27，0.32，0.01)

取$\hat{c}=2$，得語言向量指標函數爲
$F\hat{\vec{X}}_2=\left(\hat{I}_{1,2},\hat{I}_{2,2},\hat{I}_{3,2},\hat{I}_{4,2},\hat{I}_{5,2}\right)$=(0，1，1，0，0)
$F\hat{\vec{X}}_3=\left(\hat{I}_{1,3},\hat{I}_{2,3},\hat{I}_{3,3},\hat{I}_{4,3},\hat{I}_{5,3}\right)$=(0，1，0，1，0)
$F\hat{\vec{X}}_4=\left(\hat{I}_{1,4},\hat{I}_{2,4},\hat{I}_{3,4},\hat{I}_{4,4},\hat{I}_{5,4}\right)$=(0，0，1，1，0)
$F\hat{\vec{X}}_5=\left(\hat{I}_{1,5},\hat{I}_{2,5},\hat{I}_{3,5},\hat{I}_{4,5},\hat{I}_{5,5}\right)$=(0，1，1，0，0)
$F\hat{\vec{X}}_6=\left(\hat{I}_{1,6},\hat{I}_{2,6},\hat{I}_{3,6},\hat{I}_{4,6},\hat{I}_{5,6}\right)$=(0，0，1，1，0) □

建構了多變量模糊時間數列模式及屬性判別之後，我們已經能順利的進行預測。以下我們介紹如何經由語言向量指標函數來判斷輸出值是否命中真實值。

定義 2.8 模糊命中

令$\left(I_{a1,t},I_{a2,t},\cdots,I_{ak_a,t}\right)$，$t=1,2,\cdots,n$，$a=1,2,...,q$為一模糊時間數列語言向量指標函數(真實值)，$\left(\hat{I}_{a1,t},\hat{I}_{a2,t},\cdots,\hat{I}_{ak_a,t}\right)$，$t=p+1,\cdots,n$，$a=1,2,...,q$為經由VFAR$(p,q)$模式輸出後所得的語言向量指標函數(輸出值)，$k_a$為第$a$個變量之語言變數個數，令$S_{ai,t}=\begin{cases}1, & if\ \hat{I}_{ai,t}+I_{ai,t}=2\\ 0, & if\ otherwise\end{cases}$，$i=1,2,\cdots,k_a$，

$$S_{a,t}=\begin{cases}1, & if\ \sum_{i=1}^{k_a}S_{ai,t}>0\\ 0, & if\ otherwise\end{cases}$$，$t=p+1,\cdots,n$，$a=1,2,...,q$。

若 $S_{a,t}=1$，則稱第 a 變量第 t 期之輸出值對真實值為模糊命中，否則為模糊不命中。

例 2.8

承例 2.7，得

$(S_{1,2},S_{2,2},S_{3,2},S_{4,2},S_{5,2})$=(0，0，0，0，0)， S_2=0， 模糊不命中
$(S_{1,3},S_{2,3},S_{3,3},S_{4,3},S_{5,3})$=(0，1，0，0，0)， S_3=1， 模糊命中
$(S_{1,4},S_{2,4},S_{3,4},S_{4,4},S_{5,4})$=(0，0，1，0，0)， S_4=1， 模糊命中
$(S_{1,5},S_{2,5},S_{3,5},S_{4,5},S_{5,5})$=(0，0，0，0，0)， S_5=0， 模糊不命中
$(S_{1,6},S_{2,6},S_{3,6},S_{4,6},S_{5,6})$=(0，0，1，0，0)， S_6=1， 模糊命中 □

以下我們引進模式配適度的概念，做爲評斷配適程度高低的指標之一。

定義 2.9 模式配適度 (Degree of Model Match)

承定義 2.8，令 $M_a=\left[\frac{1}{n-p}\cdot\sum_{t=p+1}^{n}S_{a,t}\right]\times 100\%$，$a=1,2,...,q$，稱 M_a 為第 a 變量之模式配適度。

例 2.9

承例 2.8， $M=\left[\frac{1}{6-1}\cdot\sum_{t=2}^{6}S_t\right]\times 100\%$ =60% □

爲了比較經由模式輸出的語言變數與實際的語言變數之間的誤差情形，於是我們著手建立二個衡量的指標：預測誤差率與平均預測秩階準確度。

定義 2.10 預測誤差率 (Forcasting Error)

令 $\left(I_{a1,t},I_{a2,t},\cdots,I_{ak_a,t}\right)$，$t=1,2,\cdots,n$，$a=1,2,...,q$ 為一模糊時間數列語言向量指標函數(真實值)，$\left(\hat{I}_{a1,t},\hat{I}_{a2,t},\cdots,\hat{I}_{ak_a,t}\right)$，$t=1,2,\cdots,n$，$a=1,2,...,q$ 為經由模糊時間數列模式輸出後所得的語言向量指標函數(預測值)，k_a 為第 a 個變量之語言變

數個數，

令 $E_{a,t}=\dfrac{1}{k_a-1}\cdot\left|\dfrac{\sum_{i=1}^{k_a}\left(i\cdot\hat{I}_{ai,t}\right)}{\sum_{i=1}^{k_a}\hat{I}_{ai,t}}-\dfrac{\sum_{i=1}^{k_a}\left(i\cdot I_{ai,t}\right)}{\sum_{i=1}^{k_a}I_{ai,t}}\right|\times 100\%$ ，$t=1,2,\cdots,n$ ，$a=1,2,...,q$ ，

稱 $E_{a,t}$ 為第 a 變量第 t 期輸出值對真實值之預測誤差率。

($I_{ai,t}$ 為真實值語言向量指標，$\hat{I}_{ai,t}$ 為輸出值語言向量指標。)

例 2.10

承例 2.7，得

$$E_1=\frac{1}{5-1}\cdot\left|\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(i\cdot\hat{I}_{i,1}\right)}{\sum_{i=1}^{5}\hat{I}_{i,1}}-\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(i\cdot I_{i,1}\right)}{\sum_{i=1}^{5}I_{i,1}}\right|\times 100\%=13\%$$

$$E_2=\frac{1}{5-1}\cdot\left|\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(i\cdot\hat{I}_{i,2}\right)}{\sum_{i=1}^{5}\hat{I}_{i,2}}-\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(i\cdot I_{i,2}\right)}{\sum_{i=1}^{5}I_{i,2}}\right|\times 100\%=38\%$$

$$E_3=\frac{1}{5-1}\cdot\left|\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(i\cdot\hat{I}_{i,3}\right)}{\sum_{i=1}^{5}\hat{I}_{i,3}}-\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(i\cdot I_{i,3}\right)}{\sum_{i=1}^{5}I_{i,3}}\right|\times 100\%=25\%$$

$$E_4=\frac{1}{5-1}\cdot\left|\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(i\cdot\hat{I}_{i,4}\right)}{\sum_{i=1}^{5}\hat{I}_{i,4}}-\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(i\cdot I_{i,4}\right)}{\sum_{i=1}^{5}I_{i,4}}\right|\times 100\%=13\%$$

$$E_5=\frac{1}{5-1}\cdot\left|\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(i\cdot\hat{I}_{i,5}\right)}{\sum_{i=1}^{5}\hat{I}_{i,5}}-\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(i\cdot I_{i,5}\right)}{\sum_{i=1}^{5}I_{i,5}}\right|\times 100\%=38\%$$

$$E_6=\frac{1}{5-1}\cdot\left|\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(i\cdot\hat{I}_{i,6}\right)}{\sum_{i=1}^{5}\hat{I}_{i,6}}-\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(i\cdot I_{i,6}\right)}{\sum_{i=1}^{5}I_{i,6}}\right|\times 100\%=13\% \qquad \square$$

定義 2.11 平均預測秩階準確度 (Average of Forecasting Rank Accuracy)

令$\left(I_{a1,t}, I_{a2,t}, \cdots, I_{ak_a,t} \right)$，$t=1,2,\cdots,n$ ，$a=1,2,...,q$ 為一模糊時間數列語言向量指標函數(真實值)，$\left(\hat{I}_{a1,t}, \hat{I}_{a2,t}, \cdots, \hat{I}_{ak_a,t} \right)$，$t=1,2,\cdots,n$ ，$a=1,2,...,q$ 為經由模糊時間數列模式輸出後所得的語言向量指標函數(預測值)，k_a 為第 a 個變量之語言變數個數，

令 $AC_a = \left(1 - \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^{n} \min_{\substack{1 \le i, j \le k_a \\ \hat{I}_{ai,t} + I_{aj,t} = 2}} \left\{ |i - j| \right\} \right) \times 100\%$ ，$a=1,2,...,q$ ，

稱 AC_a 為第 a 變量輸出值對真實值之平均預測秩階準確度。

($I_{ai,t}$ 為真實值語言向量指標，$\hat{I}_{ai,t}$ 為輸出值語言向量指標。)

例 2.11

承例 2.7，得

$$AC = \left[1 - \tfrac{1}{6} \cdot \left(\min\{ |3-3|, |4-3| \} + \min\{ |2-4|, |3-4| \} + \min\{ |2-2|, |4-2| \} \right.\right.$$
$$\left.\left. + \min\{ |3-3|, |4-3| \} + \min\{ |2-4|, |3-4| \} + \min\{ |3-3|, |4-3| \} \right) \right] \times 100\%$$
$$= \left[1 - \tfrac{1}{6} \cdot (0+1+0+0+1+0) \right] \times 100\% = 67\% \qquad \square$$