第一章：緒論

<前言>

在離散數學中 , [1,2,4,6]，遇到分配的問題時，往往要考慮到球的相同或相異，要考慮到箱子的相同或相異，箱子裡的球可不可以重複放。例：

(1) n 個相異的球放入 r 個不同的箱子每個箱子至多放一個球的方法數

$P_n^r = r(r-1)\cdots(r-n+1)$ ，其中 $r \geq n$

(2) n 個相異的球放入 r 個不同的箱子每個箱子不限定球數的方法數

$\overbrace{r \cdot r \cdot r \cdots r}^{n} = r^n$

(3) n 個相同的球放入 r 個不同的箱子每個箱子至多放一個球的方法數

$C_n^r = \dfrac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!}$ ，其中 $r \geq n$

(4) n 個相同的球放入 r 個不同的箱子每個箱子不限定球數的方法數

$H_n^r = C_n^{r+n-1} = \dfrac{(r+n-1)!}{(r-1)!n!}$

以上的這些問題，都可以用一個快速的方法來運算

但是如果遇到

(5) n 個相異的球放入 r 個相同的箱子每個箱子不限定球數的方法數

這類的問題還沒有一個快速的方法去解決

例如：4 個相異的球 1,2,3,4 放入兩個相同的箱子的方法數有幾種？有

$\{1,2,3\} \cup \{4\}, \{1,2,4\} \cup \{3\}, \{1,3,4\} \cup \{2\}$

$\{2,3,4\} \cup \{1\}, \{1,2\} \cup \{3,4\}, \{1,3\} \cup \{2,4\}$

$\{1,4\} \cup \{2,3\}, \{1,2,3,4\}$

所以方法數為 $S(4,1) + S(4,2)$ =1+7=8,

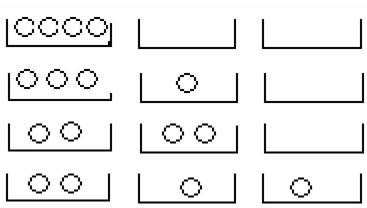
其中 S(n,m)代表 n 個相異的球恰好放入 m 個相同的箱子的方法數

或

(6) n 個相同的球放入 r 個相同的箱子每個箱子不限定球數的方法數

這類問題似乎好像也沒有一個快速的方法去解決

例如：4 個相同的球放入 3 個相同的箱子方法數有幾種？有



$$
\begin{aligned}
4 &= 4+0+0 \\
&= 3+1+0 \\
&= 2+2+0 \\
&= 2+1+1
\end{aligned}
$$

所以方法數有p(4,1)+p(4,2)+p(4,3)=1+2+1=4，其中 $p(n,k)$ 爲 n 個相同的球恰好放入 k 個
相同箱子的方法數
在(5)(6)的兩個問題中如果 n 與 r 比較大的話，如果要求方法數可能要花很久的時間：
例 1：6 個相異的球放入 4 個相同的箱子其方法數爲？
答：

$6=6+0+0+0$	$(6,0,0,0)$	$C_6^6 = 1$種
$=5+1+0+0$	$(5,1,0,0)$	$C_5^6C_1^1 = 6$種
$=4+2+0+0$	$(4,2,0,0)$	$C_4^6C_2^2 = 15$種
$=4+1+1+0$	$(4,1,1,0)$	$\dfrac{C_4^6C_1^2C_1^1}{2!} = 15$種
$=3+3+0+0$	$(3,3,0,0)$	$\dfrac{C_3^6C_3^3}{2!} = 10$種
$=3+2+1+0$	$(3,2,1,0)$	$C_3^6C_2^3C_1^1 = 60$種
$=3+1+1+1$	$(3,1,1,1)$	$\dfrac{C_3^6C_1^3C_1^2C_1^1}{3!} = 20$種
$=2+2+2+0$	$(2,2,2,0)$	$\dfrac{C_2^6C_2^4C_2^2}{3!} = 15$種
$=2+2+1+1$	$(2,2,1,1)$	$\dfrac{C_2^6C_2^4C_1^2C_1^1}{2!2!} = 45$種

所以總共的方法數爲1+6+15+15+10+60+20+15+45=187 種

像這類的問題還沒有一個完美的公式去算它，本文想藉由多項式的組合基底，去嘗試解決
這類的問題。