第二章　多項式空間的組合基底

設多項式 $f(n)$ 之次數 $\le k$，稱 $f(n)$ 為一 $k-$多項式，所以 $f(n)$ 可表示為 $a_k n^k + a^{k-1} n^{k-1} + \cdots\cdots\cdots + a_1 n + a_0$，其中 $a_k, a_{k-1}, \ldots\ldots, a_1, a_0 \in R$,我們知道所有 $k-$多項式形成一個向量空間,稱 $k-$多項式空間,以 V 表示,$\{n^k, n^{k-1}, \cdots\cdots, n, 1\}$ 為 $k-$多項式空間的標準基底

事實上，$\{C_0^n, C_1^n, \cdots\cdots, C_k^n\}$ 也為 $k-$多項式空間的基底

定理 1：$\{C_0^n, C_1^n, \cdots\cdots, C_k^n\}$ 為 $k-$多項式空間 V 的基底 , [3]

證明：(1)線性獨立:

假設 $\alpha_0 C_0^n + \alpha_1 C_1^n + \alpha_2 C_2^n + \cdots\cdots\cdots + \alpha_{k-1} C_{k-1}^n + \alpha_k C_k^n = \vec{0}$

取 $n=0 \Rightarrow \alpha_0 C_0^0 = \vec{0} \Rightarrow \alpha_0 = 0$　　(如果 $k > n$ 則 $\mathrm{C}_\mathrm{k}^\mathrm{n} = 0$)

取 $n=1 \Rightarrow \alpha_0 C_0^1 + \alpha_1 C_1^1 = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 C_1^1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

取 $n=2 \Rightarrow \alpha_0 C_0^2 + \alpha_1 C_1^2 + \alpha_2 C_2^2 = \vec{0} \Rightarrow \alpha_2 C_2^2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$

同理　取 $n = 3, 4, \cdots\cdots, k-1, k$

$\Rightarrow \alpha_3 = \alpha_4 = \cdots\cdots = \alpha_{k-1} = \alpha_k = 0$

$\therefore$ $\{C_0^n, C_1^n, \cdots\cdots, C_{k-1}^n, C_k^n\}$ 線性獨立

(2)生成:

$\forall\ f(n) \in V$,　$f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots\cdots + a_1 n + a_0$

$\because$ n^k 可以把它想成 k 個相異的球放入 n 個不同的箱子每個箱子不限球數的方法數

$\therefore$ 所以方法數相當於只用到 1 個箱子的方法數
加上只用到 2 個箱子的方法數
加上只用到 3 個箱子的方法數

⋮

加上只用到 k 個箱子 的方法數

$\therefore \quad 1 = b_{0,0}C_0^n$

$n \ = b_{1,0}C_0^n + b_{1,1}C_1^n$

$n^2 = b_{2,0}C_0^n + b_{2,1}C_1^n + b_{2,2}C_2^n$

$n^3 = b_{3,0}C_0^n + b_{3,1}C_1^n + b_{3,2}C_2^n + b_{3,3}C_3^n$

$\vdots$

$\vdots$

$n^k = b_{k,0}C_0^n + b_{k,1}C_1^n + b_{k,2}C_2^n + \cdots\cdots + b_{k,k}C_k^n$ [5]

,其中 $b_{k,i}$爲n的k次方C_i^n的係數也就是 k 個相異的球恰好放入 i 個箱子的方法數

$$\begin{aligned}
\therefore\ f(n) &= a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots\cdots + a_1 n + a_0 \\
&= a_k(b_{k,0}C_0^n + b_{k,1}C_1^n + \cdots\cdots + b_{k,k}C_k^n) + a_{k-1}(b_{k-1,0}C_0^n + b_{k-1,1}C_1^n + \cdots\cdots + b_{k-1,k-1}C_{k-1}^n) \\
&\quad + \cdots\cdots + a_1(b_{1,0}C_0^n + b_{1,1}C_1^n) + a_0(b_{0,0}C_0^n) \\
&= (a_k b_{k,0} + a_{k-1}b_{k-1,0} + \cdots\cdots + a_1 b_{1,0})C_0^n + (a_k b_{k,1} + a_{k-1}b_{k-1,1} + \cdots\cdots + a_1 b_{1,1})C_1^n + \cdots\cdots + b_{k,k}C_k^n
\end{aligned}$$

$\therefore\ span\{C_0^n, C_1^n, \cdots\cdots, C_{k-1}^n, C_k^n\} = V$

$\therefore \{C_0^n, C_1^n, \cdots\cdots, C_{k-1}^n, C_k^n\}$ 爲$k-$多項式空間的基底

接下來我們要去了解$b_{k,i}$的形式，我們先看一個組合等式

引理： $\boxed{C_1^n C_j^n = C_1^j C_j^n + C_1^{j+1} C_{j+1}^n}$

證明：假設現在有 n 位同學要選 j 人班隊及領隊一人，領隊可以兼隊員

$\therefore$方法數爲$C_1^n C_j^n$

但是我們可以把他想成領隊在隊員裡的方法數爲 $C_1^j C_j^n$

及領隊不在隊員裡的方法數爲 $C_1^{j+1} C_{j+1}^n$

所以我們可以得到 $C_1^n C_j^n = C_1^j C_j^n + C_1^{j+1} C_{j+1}^n$

定理 2：　$b_{k,i} = i(b_{k-1,i-1} + b_{k-1,i})$

證明：

$$\because\ n^{k-1} = b_{k-1,0}C_0^n + b_{k-1,1}C_1^n + \cdots\cdots + b_{k-1,k-2}C_{k-2}^n + b_{k-1,k-1}C_{k-1}^n$$

$$\begin{aligned}\therefore\ n^k &= n(\,b_{k-1,0}C_0^n + b_{k-1,1}C_1^n + \cdots\cdots + b_{k-1,k-2}C_{k-2}^n + b_{k-1,k-1}C_{k-1}^n) \\ &= b_{k-1,0}(nC_0^n) + b_{k-1,1}(nC_1^n) + \cdots\cdots + b_{k-1,k-2}(nC_{k-2}^n) + b_{k-1,k-1}(nC_{k-1}^n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore n^k &= b_{k-1,0}(0C_0^n + 1C_1^n) + b_{k-1,1}(1C_1^n + 2C_2^n) + b_{k-1,2}(2C_2^n + 3C_3^n)\cdots\cdots + b_{k-1,k-1}[(k-1)C_{k-1}^n + kC_k^n] \\ &= 0(b_{k-1,0})C_0^n + 1(b_{k-1,0} + b_{k-1,1})C_1^n + 2(b_{k-1,1} + b_{k-1,2})C_2^n + \cdots\cdots + (k-1)(b_{k-1,k-2} + b_{k-1,k-1})C_{k-1}^n \\ &\quad + k(b_{k-1,k-1})C_k^n\end{aligned}$$

即 $b_{k,i} = i(b_{k-1,i-1} + b_{k-1,i})$

另證：$\boxed{b_{k,i} = i(b_{k-1,i-1} + b_{k-1,i})}$

證明：$b_{k,i}$ 相當於現在有 k 個相異的球放入 i 個不同的箱子不允許空箱的方法數

但是我們從另一個角度來想

可以把她想成第 k 個球自己一部分和第 k 個球與別人一部分

第 k 個球自己一部分的方法數

相當於第 k 個球先去選一個箱子另外的 $k-1$ 個球放入其他的 $i-1$ 個箱子不允許空箱的方法數　所以方法數爲　$i(b_{k-1,i-1})$

第 k 個球與別人一部分的方法數

相當於另外的 $k-1$ 個相異的球放入 i 個箱子不允許空箱，第 k 個球再去選其中一個箱子

所以方法數爲　$i(b_{k-1,i})$

即 $b_{k,i} = i(b_{k-1,i-1} + b_{k-1,i})$

所以我們可以得到

$b_{k,i}$	i=0	1	2	3	4	5	6	……	n-1	n
k=0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	6	3!	0	0	0	0	0	0
4	0	1	14	36	4!	0	0	0	0	0
5	0	1	30	150	240	5!	0	0	0	0
6	0	1	62	540	1560	1800	6!	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮							
⋮	⋮	⋮	⋮							
m-1	0	1								
m	0	1								

$$\begin{array}{ccc} b_{m-1,n-1} & & b_{m-1,n} \\ & \searrow & \swarrow \\ & n(b_{m-1,n-1}+b_{m-1,n}) & \end{array}$$

例如：

$b_{4,2}$:相當於有四個相異的球放入兩個不同的箱子，恰好用了兩個箱子的方法數

方法數爲　$2(b_{3,1}+b_{3,2})=2(1+6)=14$　(種)

$b_{4,3}$:相當於四個相異的球放入三個不同的箱子，恰好用了三個箱子的方法數

方法數爲　$3(b_{3,2}+b_{3,3})=3(6+6)=36$　(種)

從另外一方面來看，

$b_{k,i}$ 相當於 k 個元素對到 i 個元素的映成函數個數

定理 3：

假設 A,B 爲兩有限集合，其中$|A| = m$,$|B| = n$ 且 $m \ge n$,則由 A 到 B 的映成函數個數有

$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^m$ 種　[7]

證明：

假設 $B = \{b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n\}$,令 U 爲所有由 A 到 B 的函數所成集合，即

$U = \{ f \mid f : A \to B\text{爲一個函數}\}, \therefore |\mathrm{U}| = n^m$

令 a_i 表示 U 中函數滿足值域不含 b_i 的條件,$1 \le i \le n$,則由 A 到 B 的映成函數個數相當於 $N(\bar{a}_1\bar{a}_2\cdots\bar{a}_n)$

若 U 中函數需滿足值域不含 b_i ,則相當於 m 個元素到 n-1 的元素的函數個數

個數有 $(n-1)^m$ 個,所以 $N(a_i) = (n-1)^m, 1 \le i \le n$

若 U 中函數需滿足值域不含 b_i 且不含 b_j ,則相當於 m 的元素到 n-2 個元素的函數

個數有 $(n-2)^m$ 個,所以 $N(a_i a_j) = (n-2)^m, \forall 1 \le i < j \le n$

同理 $N(a_i a_j a_k) = (n-3)^m, \forall 1 \le i < j < k \le n, \ldots, N(a_1 a_2 \ldots a_n) = (n-n)^m$

根據排容原理

$$
\begin{aligned}
N(\bar{a}_1\bar{a}_2\cdots\bar{a}_n) &= n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \cdots + (-1)^n(n-n)^m \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^m
\end{aligned}
$$

所以我們可以得到

$$
\begin{aligned}
b_{k,i} &= i^k - C_1^i(i-1)^k + C_2^i(i-2)^k - C_3^i(i-3)^k + \cdots\cdots + (-1)^w C_w^i(i-w)^k + \cdots\cdots + (-1)^i C_i^i(i-i)^k \\
&= \sum_{w=0}^{i}(-1)^w C_w^i(i-w)^k
\end{aligned}
$$

例如:

$$b_{4,2} = \sum_{w=0}^{2}(-1)^w C_w^2(2-w)^4 = 2^4 - C_1^2 \cdot 1^4 + C_2^2 \cdot 0^4 = 14$$

$$b_{4,3}=\sum_{w=0}^{3}(-1)^w C_w^3(3-w)^4=3^4-C_1^3\cdot 2^4+C_2^3\cdot 1^4-C_3^3\cdot 0^4=36$$

我們可以驗證 $\boxed{\begin{array}{l} b_{k,i}=i(b_{k-1,i}+b_{k-1,i-1}) \\ b_{k,i}=\sum_{w=0}^{i}(-1)^w C_w^i(i-w)^k \end{array}}$ 這兩個式子是相等的

定理 4：

$$\boxed{b_{k,i}=i(b_{k-1,i}+b_{k-1,i-1})=\sum_{w=0}^{i}(-1)^w C_w^i(i-w)^k}$$

證明：

$$\begin{aligned}
\mathrm{b}_{k,i} &= \sum_{w=0}^{i}(-1)^w\binom{i}{w}(i-w)^k \\
&= \sum_{w=0}^{i}(-1)^w\binom{i}{w}(i-w)^{k-1}(i-w) \\
&= \sum_{w=0}^{i}[(-1)^w\binom{i}{w}(i-w)^{k-1}\cdot i-(-1)^w\binom{i}{w}(i-w)^{k-1}\cdot w] \\
&= i\cdot\sum_{w=0}^{i}(-1)^w\binom{i}{w}(i-w)^{k-1}-\sum_{w=0}^{i}(-1)^w\binom{i}{w}(i-w)^{k-1}\cdot w \\
&= i\cdot b_{k-1,i}-\sum_{w=1}^{i}(-1)^w\binom{i}{w}(i-w)^{k-1}\cdot w \\
&= i\cdot b_{k-1,i}+\sum_{w=1}^{i}(-1)^{w-1}\binom{i}{w}(i-w)^{k-1}\cdot w
\end{aligned}$$

$$\because \binom{i}{w}=\frac{i!}{(i-w)!w!}=\frac{i}{w}\cdot\frac{(i-w)!}{(w-1)![(i-1)-(w-1)]!}=\frac{i}{w}\binom{i-1}{w-1}$$

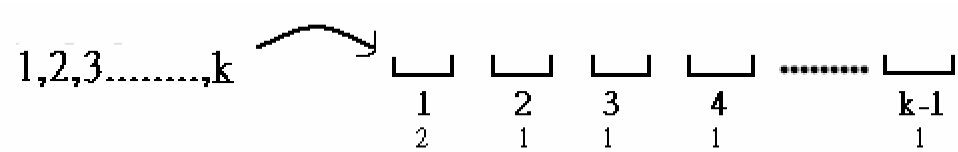
$\therefore$ 原式

$$\begin{aligned}
&= i\cdot b_{k-1,i}+\sum_{w=1}^{i}(-1)^{w-1}\cdot i\cdot\binom{i-1}{w-1}(i-w)^{k-1} \\
&= i\cdot b_{k-1,i}+i\cdot\sum_{w=0}^{i-1}(-1)^w\binom{i-1}{w}(i-1-w)^{k-1} \\
&= i\cdot b_{k-1,i}+i\cdot b_{k-1,i-1} \\
&= i(b_{k-1,i}+b_{k-1,i-1})
\end{aligned}$$

我們現在再用另一種方法去求$b_{k,i}$

$b_{k,k-1}$相當於 k 個相異的球放入 k-1 個相異箱子，不允許空箱的方法數

可以把它想成

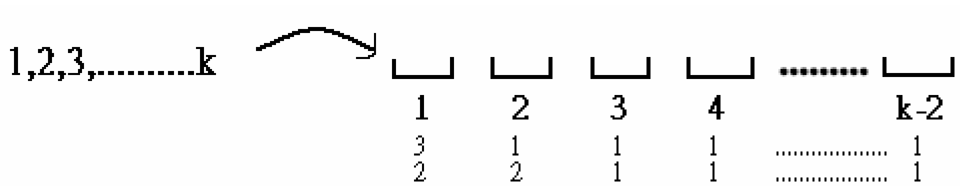


有一個箱子用了兩個球其他的箱子都用一個球
所以方法數爲

$$C_2^k \cdot (k-1)!$$
$$= \frac{1}{2} k!(k-1)$$

$b_{k,k-2}$相當於 k 個相異的球放入 k-2 個相異箱子，不允許空箱的方法數

可以把他想成

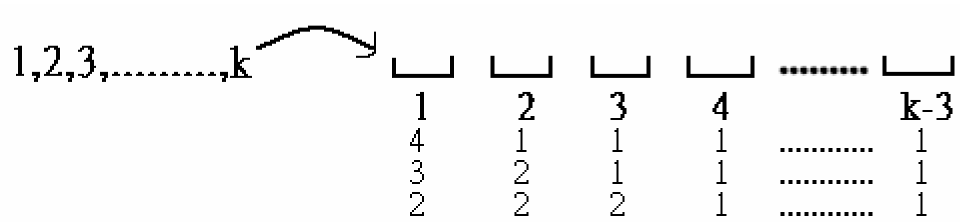


所以方法數爲

$$C_3^k (k-2)! + \frac{C_2^k C_2^{k-2}}{2!}(k-2)!$$
$$= (k-2)![\frac{k(k-1)(k-2)}{3!} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{8}]$$
$$= \frac{k!}{24}(k-2)(3k-5)$$

$b_{k,k-3}$相當於 k 個相異的球放入 k-3 個相異箱子，不允許空箱的方法數

可以把他想成

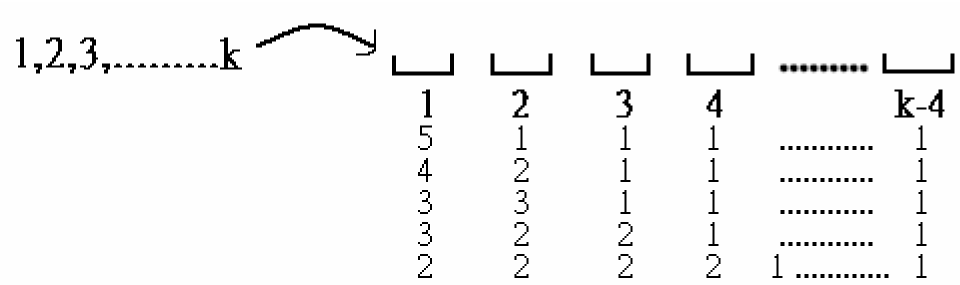


所以方法數爲

$$C_4^k(k-3)!+C_3^kC_2^{k-3}(k-2)!+\frac{C_2^kC_2^{k-2}C_2^{k-4}}{3!}(k-3)!$$
$$=(k-3)![\frac{k!}{4!(k-4)!}+\frac{1}{12}\cdot\frac{k!}{(k-5)!}+\frac{1}{48}\cdot\frac{k!}{(k-6)!}]$$
$$=\frac{1}{48}\cdot k!(k-3)(2+4k-16+k^2-9k+20)$$
$$=\frac{1}{48}\cdot k!(k-3)(k-2)(k-3)$$

$b_{k,k-4}$ 相當於 k 個相異的球放入 k-4 個相異箱子，不允許空箱的方法數

可以把他想成



所以方法數爲

$$C_5^k(k-4)!+C_4^kC_2^{k-4}(k-4)!+\frac{C_3^kC_3^{k-3}}{2!}(k-4)!+\frac{C_3^kC_2^{k-3}C_2^{k-5}}{2!}(k-4)!+\frac{C_2^kC_2^{k-2}C_2^{k-4}C_2^{k-6}}{4!}(k-4)!$$
$$=\frac{1}{2!4!5!}k!(k-4)[48+120(k-5)+80(k-5)+120(k-5)(k-6)+15(k-5)(k-6)(k-7)$$
$$=\frac{1}{2!4!5!}k!(k-4)[15k^3-150k^2+485k-502]$$