第四章　多次方和的公式

以往解決$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

我們用的方法是利用　$\sum_{n\geq 0} n^2 x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3}$

所以　$[\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3}] \cdot \frac{1}{1-x}$的$x^k$的係數即爲$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2$的和

$$
\begin{aligned}
\because\ & [\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3}] \cdot \frac{1}{1-x} \\
&= \frac{x}{(1-x)^3} + \frac{2x^2}{(1-x)^4} \\
&= x \cdot \sum_{n\geq 0} H_n^3 x^n + 2x^2 \cdot \sum_{n\geq 0} H_n^4 x^n \\
&= \sum_{n\geq 0} H_n^3 x^{n+1} + \sum_{n\geq 0} 2H_n^4 x^{n+2} \\
&= \sum_{k\geq 1} H_{k-1}^3 x^k + \sum_{k\geq 2} 2 \cdot H_{k-2}^4 x^k \\
&= H_0^3 x + \sum_{k\geq 2} (H_{k-1}^3 + 2H_{k-2}^4) x^k
\end{aligned}
$$

$\therefore x^k$的係數爲

$$
\begin{aligned}
& H_{k-1}^3 + 2H_{k-2}^4 \\
&= C_{k-1}^{3+k-1-1} + 2C_{k-2}^{4+k-2-1} \\
&= C_{k-1}^{k+1} + 2C_{k-2}^{k+1} \\
&= C_2^{k+1} + 2C_3^{k+1} \\
&= \frac{(k+1)k}{2} + 2 \cdot \frac{(k+1)k(k-1)}{3!} \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}
\end{aligned}
$$

所以我們得到$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

這樣的方法可能會花費比較多的時間，但是我們可以利用組合基底更有效的算出 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2$ 的公式

首先我們先驗證一個組合等式

定理 6：

證明 $\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$ 　其中 $k,m,n\in N$

證明：

考慮 $n+1$ 的數，將其編號爲 $0.1.2.3\cdots\cdots.n-1.n$

由這 $n+1$ 的數取 $m+1$ 的數共有 $\binom{n+1}{m+1}$ 個方法數

但從另外一個角度來看他可以想成若取到最大數爲 k

相當於由另外的 $0.1.2.\cdots\cdots.k-1$ 個數中取 m 個數

其方法數有 $\binom{k}{m}$ 種方法，其中 $k=m,m+1,\cdots\cdots n$

利用加法原理可以得到共有 $\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}$ 種方法

所以我們就可以得到 $\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$ 這個組合等式

接下來我們可以比較輕鬆的算出

$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2$ 的公式以及更高次方和的公式

Example1：

$\because\ k^2=C_1^k+2C_2^k$

$\therefore$ 我們可以得到

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}k^2 &= \sum_{k=1}^{n}C_1^k+2\sum_{k=1}^{n}C_2^k \\
&= C_2^{n+1}+2C_3^{n+1} \\
&= C_3^{n+1}+C_3^{n+2} \\
&= \frac{(n+1)(n)(n-1)}{3!}+\frac{(n+2)(n+1)n}{3!} \\
&= \frac{(n+1)(n)}{3!}(n-1+n-2) \\
&= \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

Example2：

$$\because\ k^3 = C_1^k + 6C_2^k + 6C_3^k$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} C_1^k + 6\sum_{k=1}^{n} C_2^k + 6\sum_{k=1}^{n} C_3^k \\ &= C_2^{n+1} + 6C_3^{n+1} + 6C_4^{n+1} \\ &= C_2^{n+1} + 6C_4^{n+2} \\ &= \frac{(n)(n+1)}{2} + 6\cdot\frac{(n+2)(n+1)(n)(n-1)}{4!} \\ &= \frac{n(n+1)}{2}[1+\frac{(n+2)(n-1)}{2}] \\ &= [\frac{n(n+1)}{2}]^2\end{aligned}$$

Example3：

$$\because\ k^4 = C_1^k + 14C_2^k + 36C_3^k + 24C_4^k$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{k=1}^{n} k^4 &= \sum_{k=1}^{n} C_1^k + 14\sum_{k=1}^{n} C_2^k + 36\sum_{k=1}^{n} C_3^k + 24\sum_{k=1}^{n} C_4^k \\ &= C_2^{n+1} + 14C_3^{n+1} + 36C_4^{n+1} + 24C_5^{n+1} \\ &= C_2^{n+1} + 2C_3^{n+1} + 12C_4^{n+2} + 24C_5^{n+2} \\ &= \frac{(n)(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n)(n-1)}{3} + \frac{(n+2)(n+1)(n)(n-1)}{2} + \frac{(n+2)(n+1)(n)(n-1)(n-2)}{5} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{10}(n+2)(n+1)(n)(n-1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{30}(n)(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)\end{aligned}$$

Example4：

$$\because\ k^5 = C_1^k + 30C_2^k + 150C_3^k + 240C_4^k + 150C_5^k$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{k=1}^{n} k^5 &= \sum_{k=1}^{n} C_1^k + 30\sum_{k=1}^{n} C_2^k + 150\sum_{k=1}^{n} C_3^k + 240\sum_{k=1}^{n} C_4^k + 120\sum_{k=1}^{n} C_5^k \\ &= C_2^{n+1} + 30C_3^{n+1} + 150C_4^{n+1} + 240C_5^{n+1} + 120C_6^{n+1} \\ &= C_2^{n+1} + 30C_4^{n+2} + 120C_5^{n+2} + 120C_6^{n+2} \\ &= C_2^{n+1} + 30C_4^{n+2} + 120C_6^{n+3} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 30\cdot\frac{(n+2)(n+1)(n)(n-1)}{4!} + 120\cdot\frac{(n+3)(n+2)(n+1)(n)(n-1)(n-2)}{6!} \\ &= \frac{1}{3}[\frac{n(n+1)}{2}]^2[2n^2+2n-1]\end{aligned}$$

所以我們如果要求 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 的公式可以利用多項式的組合基底

$$\because\ n^m = b_{m,1}C_1^n + b_{m,2}C_2^n + \cdots\cdots + b_{m,m-1}C_{m-1}^n + b_{m,m}C_m^n$$

$$\therefore k^m = b_{m,1}C_1^k + b_{m,2}C_2^k + \cdots\cdots + b_{m,m-1}C_{m-1}^k + b_{m,m}C_m^k$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{n} k^m &= \sum_{k=1}^{n}(b_{m,1}C_1^k + b_{m,2}C_2^k + \cdots\cdots + b_{m,m-1}C_{m-1}^k + b_{m,m}C_m^k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_{m,1}C_1^k + \sum_{k=1}^{n} b_{m,2}C_2^k + \cdots\cdots + \sum_{k=1}^{n} b_{m,m-1}C_{m-1}^k + \sum_{k=1}^{n} b_{m,m}C_m^k \\ &= b_{m,1}C_2^{n+1} + b_{m,2}C_3^{n+1} + \cdots\cdots + b_{m,m-1}C_m^{n+1} + b_{m,m}C_{m+1}^{n+1}\end{aligned}$$