第五章　結論

我們利用多項式的組合基底，嘗試去解決不同的球放入相同的箱子每個箱子不限放的方法數，目前我們已經推得

$$
\begin{aligned}
b_{k,i} &= i(b_{k-1,i} + b_{k-1,i-1}) \\
&= \sum_{w=0}^{i} (-1)^w C_w^i (i-w)^k
\end{aligned}
$$

$,b_{k,i}$ 為 k 個相異的球放入 i 個相異箱子，不允許空箱的方法數

且 $b_{k,1} = 1$

$$
\begin{aligned}
& b_{k,2} = 2^k - 2 \\
& b_{k,3} = 3^k - C_1^k \cdot 2^k + C_2^k \cdot 1^k \\
& b_{k,k-4} = k! \cdot (k-4) \cdot \frac{1}{2!4!5!}(15k^3 - 150k^2 + 485k - 502) && ,k \geq 4 \\
& b_{k,k-3} = \frac{k!}{48}(k-3)(k-2)(k-3) && ,k \geq 3 \\
& b_{k,k-2} = \frac{k!}{4!}(k-2)(3k-5) && ,k \geq 2 \\
& b_{k,k-1} = k! \cdot \frac{k-1}{2} && ,k \geq 1 \\
& b_{k,k} = k! && ,k \geq 0
\end{aligned}
$$

所以如果我們要求例 1：6 個相異的球放入 4 個相同的箱子的方法數可以利用

$$
\begin{aligned}
& \frac{b_{6,1}}{1!} + \frac{b_{6,2}}{2!} + \frac{b_{6,3}}{3!} + \frac{b_{6,4}}{4!} \\
&= 1 + \frac{62}{2} + \frac{540}{6} + \frac{1560}{24} \\
&= 1 + 31 + 90 + 65 \\
&= 187
\end{aligned}
$$

就可以較簡便的求出方法數

所以如果我們要求 k 個相異的球放入 i 個相同的箱子每個箱子不限定球數的方法數為

$$
\frac{b_{k,1}}{1} + \frac{b_{k,2}}{2!} + \frac{b_{k,3}}{3!} + \cdots + \frac{b_{k,i}}{i!} = \sum_{r=1}^{i} \frac{b_{k,r}}{r!}
$$

雖然還是沒有辦法得到一個完美的公式，不過已經可以知道某幾項的通式，可惜目前無法悟出他的規則，希望將來有機會能繼續研究。