第七章

最適成長投資組合之動態避險策略

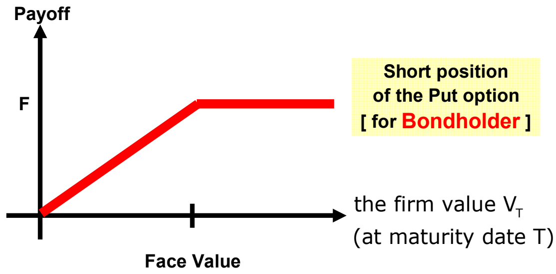
關於財富效用函數為對數型態之投資人而言，極大化每一段期間的財富效用期望值，恰為極大化財富於投資期間內「連續複利」後之投資報酬率，此即所謂的「最適成長投資組合」(Optimal Growth Portfolio)。由於最適成長投資組合之最適資產配置結果，乃是基於「極大化財富連續複利之後的投資報酬率」之架構，最適化的過程忽略財富變動之風險項(即：dW_V與dW_r兩項布朗運動所造成的風險)，固對於一名最適成長投資組合之投資者而言，雖然可依據本文第五章之「最適投資策略($\pi_B^*(t),\pi_S^*(t)$)」來複製出本身所希望之投資報酬率「期望值」，但由於忽略風險項波動，隨著標的資產(公司價值V_t)在投資期間內發生減損而造成手中所持有證券亦隨之產生跌價風險及提前違約風險，所以對於最適成長投資組合之投資者而言，顯著存有「避險策略」之需求。

若以公司價值(V_t)做為標的資產(underlying asset)而履約價格設為到期應支付給債券投資人的本金 F 時，公司債(B_t)與股票(S_t)分別可視為賣權的空部位以及買權的多部位，由此特性再配合上述章節所求出每期最適資產配置權重，若於投資期間內進行「**動態資產配置而調整持有證券數量**」之行為，便等同於進行公司債與股票兩項公司價值(V)衍生性金融商品之「**動態交易行為**」，於是避險策略變將隨「配置權重」與「證券避險參數(Delta)」兩項內生結果，應蘊而生。

一、身為債券投資人(Bondholder)：

在到期日(T)時，債券投資人收益(Payoff) 如同圖 7-1，可視為一筆金額再配合一個賣權的空部位：

[圖 7-1] 債券投資人報償收益示意圖



(資料來源：本研究自行整理)

基於 Briys-de Varenne(1997)利用機率平賭(Martingale)的評價方式，可知在未到期(未履約時刻) t 的債券價值為：

$$B(t,T) = V_t \cdot (N_1) + F \cdot P(t,T) \cdot (N_2)$$

在此 N_1 與 N_2 是一連串複雜的函數，可對本文 5.1 節相關結果，(在此僅以 N_1 與 N_2 取代)。在時間 t，公司債 B(t,T)可透過同時「**持有(購買) N_1 單位的公司價值(V_t)**」及「**持有(購買) $F \cdot N_2$ 單位的零息債券 P(t,T)**」來合成（複製）。於是公司債對於公司價值(V)之敏感度(Delta B)為 $\frac{\partial B_t}{\partial V_t} = B_V$ ，此處公司債券的避險參數(**B_V**)是介於 0 與 1 之小數。

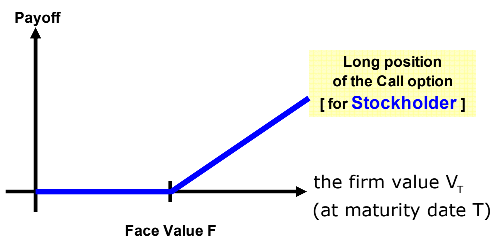
由於債券投資人之收益含有一個賣權空部位，一旦投資期間內公司價值(**V_t**)發生減損而向下跌落時，對債券投資人不利，因為企業償債能力變差，有違約之風險，所以針對公司價值(**V_t**)跌落，債券投資人有避險的需求。

在投資期間內，公司價值每下跌 1 單位，債券投資人應採取之避險策略為：放空(出售) **B_V** 單位的公司價值(**V_t**)，然而公司價值(**V_t**)無法在市場上直接交易，但基於「**公司價值(V_t) = 公司債券價值(B_t) + 股票價值(S_t)** 」之關係，所以債券投資人在時間 t 之避險策略可被取代為：同時放空(出售)「**B_V 單位的公司債 B(t,T)**」以及「**B_V 單位的股票 S(t,T)**」。

二、身為股東(Stockholder)：

在到期日(T)時，股東收益 (Payoff) 如同圖 7-2，可視為一個買權的多部位：

[圖 7-2] 股東報償收益示意圖



(資料來源：本研究自行整理)

利用股東權益、債權與資產的關係式，可知在未到期(未達履約時刻) t 之股東價值為：

$$S(t,T) = V_t - B(t,T) = V_t \cdot (1-N_1) - F \cdot P(t,T) \cdot (N_2)$$

在時間 t，股價 S(t,T)可透過同時「**持有(購買) (1-N_1)單位的公司價值(V_t)**」及「**放空(出售) F×N_1 單位的零息債券 P(t,T)**」來合成（複製）。而股價對於公司債之敏感度(Delta S)為：$\frac{\partial S_t}{\partial V_t} = \frac{\partial}{\partial V_t}(S_t - B_t) = (1\text{-}B_V) = S_V$，在此股價的避險參數(**$S_V$**)也是介於 0 與 1 之小數。

由於股東之收益是一個買權多部位，一旦投資期間內公司價值(V_t)發生減損而向下跌落時將對股東不利，所以針對公司價值(V_t)跌落，股東也如同前述債券投資人一樣有避險需求。在投資期間內，公司價值每下跌 1 單位，股東應採取之避險策略為：放空(出售) S_V 單位的公司價值(V_t)，然而公司價值(V_t)無法在市場上直接交易，基於「**公司價值(V_t) = 公司債券價值(B_t) + 股票價值(S_t)**」之關係，所以股東避險策略可被取代為：同時放空(出售)「**S_V 單位的公司債 B(t,T)**」以及「**S_V 單位的股票 S(t,T)**」。

三、最適成長投資組合的資產配置內容：

在到期日之前，選擇權未到履約時刻(T)的 t 時點，投資人財富為 X_t，最適配置策略為：配置 $\pi_B^*(t)$ 比例之財富 X_t 購買公司債 B(t,T) 以及配置 $\pi_S^*(t)$ 比例之財富 X_t 購買股票 S(t,T)，這也等同於：持有該企業全部公司債 B(t,T)之 $\varphi_B^*(t)$ 比例以及持有該企業所有股票 S(t,T)之 $\varphi_S^*(t)$ 比例，其中 $\varphi_B^*(t) = \pi_B^*(t) \cdot \left(\frac{X_t}{B_t}\right)$ 且 $\varphi_S^*(t) = \pi_S^*(t) \cdot \left(\frac{X_t}{S_t}\right)$。

透過上述債券投資人與股東對於公司價值(V)之避險策略(B_V 與 S_V)，可以推算出在 t 時刻一旦公司價值(V)向下跌落 1 單位，則此投資人(操盤者)對於投資組合內公司債部位以及股票部位相當於需要同時進行下列甲乙兩項避險策略：

策略甲：出售(減碼) $\varphi_B^*(t) \cdot B_V(t)$ 單位之公司價值$(\mathbf{V_t})$，

策略乙：出售(減碼) $\varphi_S^*(t) \cdot S_V(t)$ 單位之公司價值$(\mathbf{V_t})$，

其中，策略甲相當於同時出售(減碼)：

$\varphi_B^*(t) \cdot B_V(t)$ 單位之公司債 B(t,T) 及 $\varphi_B^*(t) \cdot B_V(t)$ 單位之股票 S(t,T)

同理，策略乙相當於同時出售(減碼)：

$\varphi_S^*(t) \cdot S_V(t)$ 單位之公司債 B(t,T) 及 $\varphi_S^*(t) \cdot S_V(t)$ 單位之股票 S(t,T)

經過拆解與重組之後，最適成長投資組合之投資者，針對投資期間內標的資產(公司價值 V)減損下跌而導致的證券跌價風險與違約風險，所採取之避險策略為應同時出售(減碼)：

$$\left(\varphi_B^*(t) \cdot B_V(t) + \varphi_S^*(t) \cdot S_V(t)\right) \text{ 單位之公司債 B(t,T)}$$

以及 $\left(\varphi_B^*(t) \cdot B_V(t) + \varphi_S^*(t) \cdot S_V(t)\right)$ 單位之股票 S(t,T)，

由於兩者出售(減碼)之單位數皆相同，設為 $\left(\pi_B^*(t) \cdot B_V(t) + \pi_S^*(t) \cdot S_V(t)\right) = G$，

則 G 可化簡為：

$$
\begin{aligned}
G &= \varphi_B^*(t)\cdot B_V(t) + \varphi_S^*(t)\cdot S_V(t) \\
&= \left(\pi_B^*(t)\cdot\frac{X_t}{B_t}\right)\cdot B_V(t) + \left(\pi_S^*(t)\cdot\frac{X_t}{S_t}\right)\cdot S_V(t) \\
&= \frac{X_t}{V_t}\cdot\left(\pi_B^*(t)\cdot\frac{B_V(t)\cdot V_t}{B_t} + \pi_S^*(t)\cdot\frac{S_V(t)\cdot V_t}{S_t}\right) \\
&= \frac{X_t}{V_t}\cdot\left(\pi_B^*(t)\cdot\varepsilon_B + \pi_S^*(t)\cdot\varepsilon_S\right) \\
&= \frac{X_t}{V_t}\cdot\varepsilon^* = \frac{X_t}{V_t}\cdot\left(\frac{\lambda_V}{\sigma_V^2}\right)
\end{aligned}
$$

ε^*是整體投資組合最適彈性,（如：本文附錄 I ）

λ_V是投資於公司價值(V)之超額報酬, σ_V是公司價值(V)之瞬間波動度.

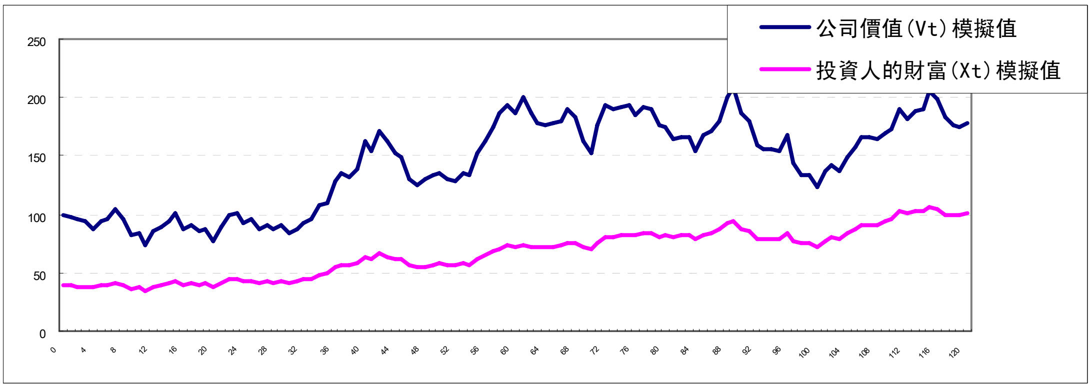
最後，可以推算出最適成長投資組合之投資者在每一期面對公司價值降低同時造成手中公司債與股票同時跌價以及違約的風險時，對於手中所持有之公司債部位與股票部位皆應該同時出售(減碼) $\frac{X_t}{V_t}\cdot\left(\frac{\lambda_V}{\sigma_V^2}\right)$ 單位。

四、避險策略數值模擬

外生參數	說明 (單位)	$\sigma_r = 10.00\%$	即期利率的波動度(年化)
$T = 10$	投資期間 (年)	$\lambda_r = 2.00\%$	即期利率的風險溢酬 (excess return)
$t = 0～10$	現在時點	$\sigma_V = 20.00\%$	公司價值的波動度(年化)
$V_0 = \$100$	公司價值 (仟萬)	$\lambda_V = 2.00\%$	公司價值的風險溢酬 (excess return)
$F = \$100$	公司債券到期時承諾支付的本金 (仟萬)	$\rho = 50\%$	公司價值與短期利率之間的相關係數
$\alpha = 80\%$	違約時的回收率 (Recovery Rate)	$f_1 = 100\%$	提前違約時債券投資人對公司殘值的求償比例
$a = 1$	均數迴歸的回復力道	$f_2 = 100\%$	到期違約時債券投資人對公司殘值的求償比例
$b = 7.00\%$	即期利率的長期水準	$\xi_r = 0.075$	無違約風險之債券的的風險市場價格
$r_0 = 2.00\%$	初始即期利率	$X_0 = 40$	投資人的初始財富 (仟萬)

在上列 17 項外生給定條件之下，利用蒙地卡羅模擬法模擬出投資期間 10 年內，每月公司價值(V_t)與投資人財富(X_t)的變化圖，如圖 7-3 所示：

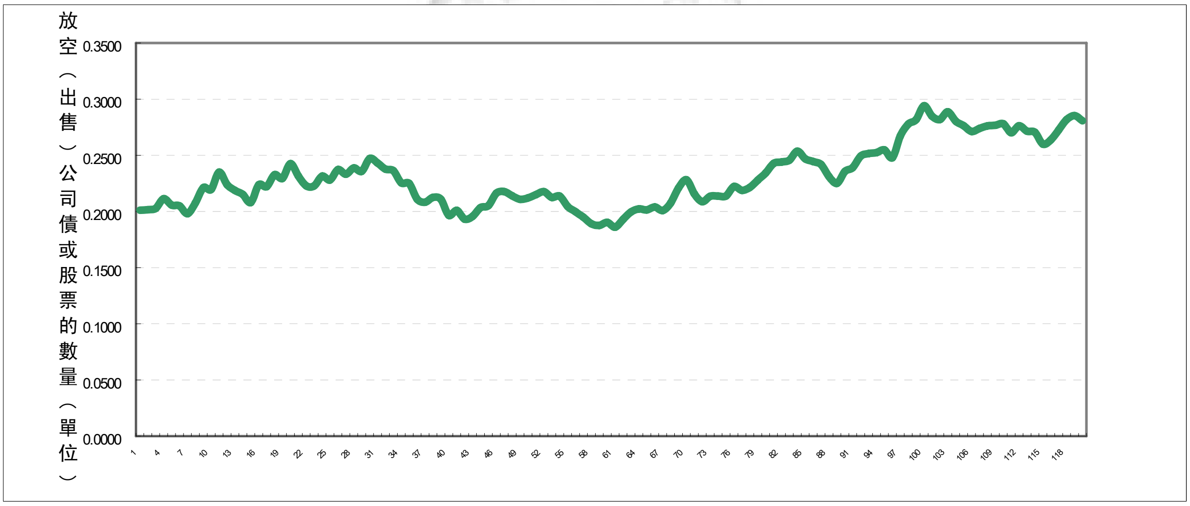
[圖 7-3] 公司價值與投資人財富值模擬圖



(資料來源：本研究自行整理)

同時可以得出 10 年內每個月該投資人之避險策略，如下列圖 7-4 所示：

[圖 7-4] 避險策略模擬圖



(資料來源：本研究自行整理)

圖 7-4 為模擬公司價值與投資人財富的動態變化之下，最適成長投資組合的投資人每個月為歸避持有證券的跌價風險與違約風險，而應該放空(減碼)的單位量。