Appendix D
回顧 Vasicek 模型之零息債券計價公式以及對應之存續期間

本附錄說明：求取公司債與股票對利率的避險參數(Rho)過程裡，相關參數不能直接對利率(r_t)偏微分，必須先對零息債價格 P(t,T)微分，再求零息債價格 P(t,T)對利率(r_t)偏微分，最後利用連鎖律得出相關參數對利率(r_t)的偏微分值。

對於短期利率的隨機模型

Vasicek Interest Rate Model：

$$dr_t = a(b-r_t)dt + \sigma \cdot dW_t$$

此處的a與b設定為常數,也可以是a(t)與B(t)為時間的函數.

在 Vasicek 的利率隨機模型下，無違約風險的零息債券 P(t,T)計價公式為：

$$P(t,T) = G(t,T) \cdot e^{-H(t,T) \cdot r_t}$$

其中：

$$H(t,T) = \frac{1}{a}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)$$

$$\ln\left[G(t,T)\right] = \left(b+\frac{\sigma \cdot \lambda}{a}-\frac{\sigma^2}{2a^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{a}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)-(T-t)\right)-\frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2$$

此處的波動度σ與超額報酬λ,到時候代回到EAPO法求最適部位解時,符號將會改成σ_r與λ_r以與公司價值V做區分.

針對Vasicek模型的零息債P(t,T)求利率的敏感度：

$$P(r_t,t,T) = G(t,T) \cdot e^{-H(t,T) \cdot r_t}$$

$$\frac{\partial P(r_t,t,T)}{\partial r_t} = \left[G(t,T) \cdot e^{-H(t,T) \cdot r_t}\right] \cdot \left(-H(t,T)\right)$$

$$= -H(t,T) \cdot P(r_t,t,T)$$

所以零息債P(t,T)的Modified Duration= $-\dfrac{\frac{\partial P(r_t,t,T)}{\partial r_t}}{P(r_t,t,T)} = H(t,T)$

而 $H(t,T)=\frac{1}{a}\left(1-e^{-a(T-t)}\right) > 0$, 對此上述的Duration > 0.

由此可知：以後若在公司債或股票這種衍生性商品求Rho時,

可以利用連鎖律(chain-rule)：先對P偏微分,再由P對r偏微分而得出.

如此針對求利率的避險參數可以較為方便與簡潔.