

## 第四章 Lee-Carter 模型的比較

本章節引進目前國內外皆有多名學者正在進行研究的 Lee-Carter 模型與上一章所發展出來的 RF 模型做個比較，期許透過比較分析以了解兩模型間的特色。在資料方面，則沿用上一章所引用台灣地區 61 年至 93 年五齡組死亡率的資料，共有 0 歲、1~4 歲、...至 80~84 歲共 18 個年齡組。

### 第一節 Lee-Carter 模型的配適與預測

目前有許多文獻都於 Lee-Carter 配適的方法進行了深入的研究，發展出許多配適的方式，如單一值分解(SVD 法)、近似法與參數修正法(WLS)等，而本文在此將僅以近似法進行配適。

根據曾奕翔與余清祥(2005)文中提及，若對於參數  $b_x$  與  $k_t$  加予以標準化的限制，即是  $\sum_x b_x = 1$  與  $\sum_t k_t = 0$  的限制式。有了標準化的限制，雖說在使誤差平方和最小之下求取參數值的同時有  $\sum_x b_x = 1$  與  $\sum_t k_t = 0$  限制式的限制，但是在求解過程中則可以以近似法求解的過程進行較簡便的求解方式，其近似法求解過程為：

第一步：令參數  $k_t$  對所有時間和為 0，也就是  $\sum_t k_t = 0$ ，以及參數  $k_t$  對所有年齡

組和為 1，也就是  $\sum_x b_x = 1$ 。

第二步：在  $\sum_t k_t = 0$  的限制式上，各年齡的參數  $a_x$  估計值則會等於  $\ln(m_{x,t})$  在全部時間內的平均

第三步：在  $\sum_x b_x = 1$  的限制式上，參數  $k_t$  的估計值則近似於全年齡組的

$(\ln(m_{x,t}) - \hat{a}_x)$  的總和

第四步：參數 $b_x$ 的估計值則透過迴歸分析的方法求得。首先需令全部年齡組的

$\ln(m_{x,t}) - \hat{a}_x$  為反應變數，參數估計值 $\hat{k}_t$ 為自變數，在分別對各個年齡組配適無截距項的回歸線，則配適迴歸線所得到的係數則為參數 $b_x$ 的估計值。

經過以上近似法求解出各參數的估計值以後，代入 Lee-Carter 模型在經過指數轉換即可得到死亡率的配適值。倘若想更進一步預測未來死亡率的趨勢，通常會利用時間序列的模型，如 ARIMA(1,1,0)，估計未來 $k_t$ 值，再代回 Lee-Carter 模型即可得到未來死亡率的預測值。

## 第二節 RF 模型與 Lee-Carter 模型的比較

經過上一節 Lee-Carter 模型配適與預測方法的介紹以後，結合上一章的 RF 模型在配適與預測上面的表現，透過整體的 MAPE 來檢視，可以發現 Lee-Carter 模型不管在配適上或是預測上都優於 RF 模型。

表 十二、台灣資料模型配適與預測能力比較

		方法一	方法二	Lee-Carter
男性	配適 MAPE	8.29%	6.02%	4.93%
	預測 MAPE	19.998%	16.39%	12.73%
女性	配適 MAPE	7.80%	5.74%	4.81%
	預測 MAPE	13.168%	10.21%	9.42%

如果檢視各年齡層配適與預測情形則可以發現，目前這三種死亡率模型對於 30 歲以前的配適情形普遍不佳，這或許是 RF 模型與 Lee-Carter 模型所需共同克服的問題。對於 30 歲以後配適與預測的情形，三種模型則在各年齡層間皆有較為平穩的趨勢，值得注意的是，在高年齡部分方法二與 Lee-Carter 模型在配適上幾乎都優於方法二的 RF 模型，但在驗證方面，在某些年齡層方面 MAPE 的表現，卻顯現出方法二 RF 的模型優於 Lee-Carter 模型。

圖 十三、台灣地區各年齡層配適比較(男性)

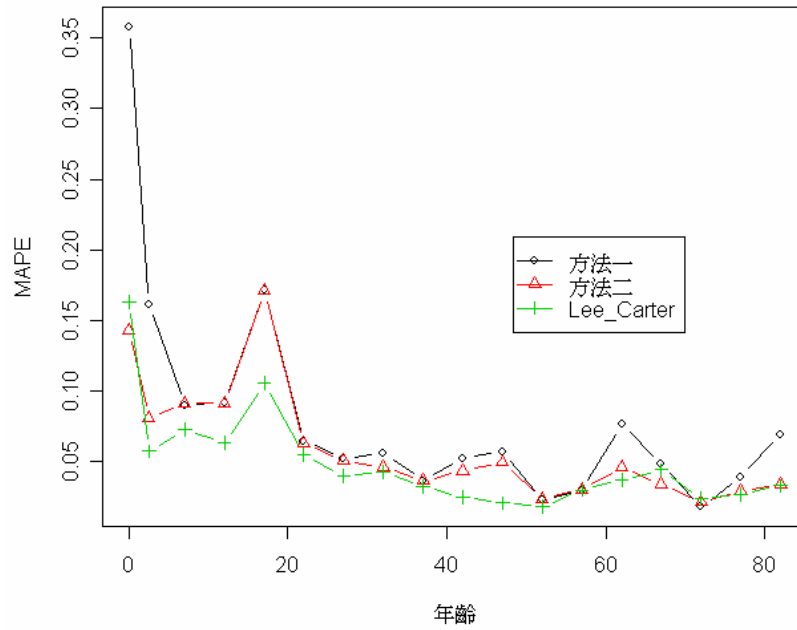
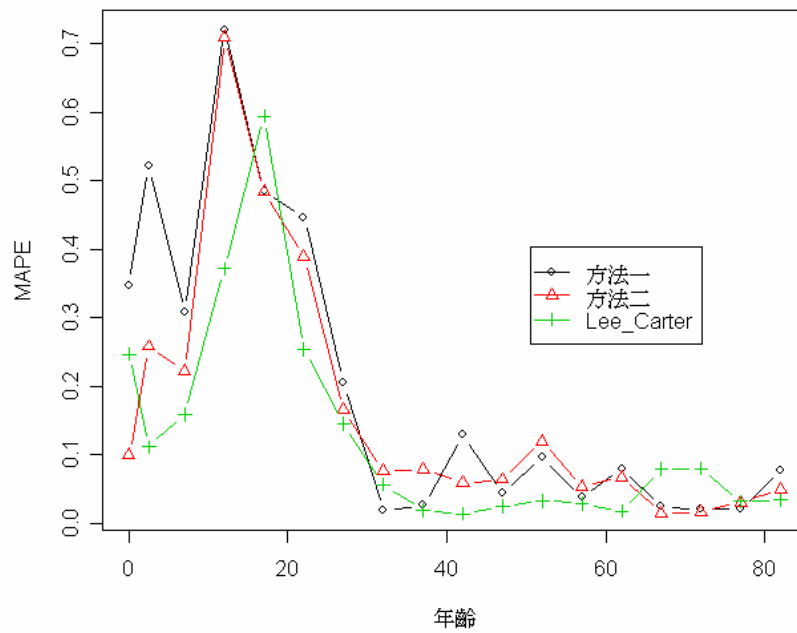


圖 十四、台灣地區各年齡層驗證比較(男性)



以上種種的實證結果雖然顯示 Lee-Carter 模型不管在配適上或是預測上都優於本文所改良的 RF 模型，但當我們更進一步探討 Lee-Carter 模型與 RF 模型的差異時，不難可以發現：在假設中央死亡率近似於死亡率時( $m_{x,t} \cong q_{x,t}$ )，根據

Lee-Carter 模型可以得知  $q_{x,t} \cong m_{x,t} = \exp(a_x + b_x k_t)$ ，若將 Lee-Carter 模型代入 Reduction Factor 的原始想法時，則會有以下的結果

$$RF(x,t) \equiv \frac{q_{x,t}}{q_{x,0}} \cong \frac{\exp(a_x + b_x k_t)}{\exp(a_x + b_x k_0)} = \exp\{b_x (k_t - k_0)\}$$

這樣的表示方式令人聯想到與第二章所介紹三大動態模型中的 SOA 模型。

$$\frac{q_{x,t}}{q_{x,0}} = (1 - AA_x)^t = \exp(\ln(1 - AA_x) \times t)$$

不難發現，Lee-Carter 可視為是 SOA 的通式，主要 Lee-Carter 模型較 SOA 模型更進一步放寬了死亡會隨時間而呈現指數下降的假設。從下面歸納出來的表格可以得知這三大動態模型主要的異同，主要可以發現 SOA 模型與 Lee-Carter 模型對於未來死亡率改善的情形認為人類最終可以達到零死亡率的境界，也就是代表著支持人類壽命無極限；反觀 RF 模型，其認為各年齡層死亡率終究會有個極限，這也代表著另外一個對於人類壽命的觀點-壽命是有極限的。而 RF 模型與 SOA 模型也相同的特色，即是其改善的方式皆是以固定變化率下降。故對於 Lee-Carter 模型的啟發也讓往後的研究有新的目標：更進一步的改良方向-放寬其每年 RF 的變化率固定的假設。

表 十三、動態模型比較

	英國 RF 模型	美國 SOA 模型	Lee-Carter 模型
當 $t \rightarrow \infty$ 時	$q_{x,t} = \alpha(x)q_{x,0}$	$q_{x,t} = 0$	$q_{x,t} = 0$
死亡率改善的方式	每年變化率固定	每年變化率固定	每年變化率隨 $k_t$ 改變