第五章　理論模型延伸

本章為第四章基本理論模型之延伸，主要加入了環境負外部性與技術進步的議題。回顧文獻，生產再生能源會造成環境負外部性，故需納入模型考量，但長期下一定有技術進步，是以本章將此兩議題皆納入模型討論。

第一節 環境外部性與防治成本

再生能源生產，除了會燃燒、耗用化石能源，造成溫室氣體累積外，其生產的本身，亦對環境造成影響。舉例而言，種植生質能源作物，其業者必須勤於灑農藥以防止能源作物遭受蟲害。不灑農藥將使農作物遭受蟲害，但灑了農藥卻直接間接的污染土壤與水。在此情況下，業者做好污染防治的努力 A_i，將對社會產生外部效益。不過，投入防治的努力所雇用的機器與人力，皆須另外耗用能源，我們假設投入防治的努力 A_i 所耗用的能源與防治活動的努力有一線性關係，即從事防治努力的邊際能源投入為 β。防治努力做的越多，所耗用的能源越多。因此，我們必須重寫社會規劃者之最適模型。

首先寫出社會規劃者之目標函數式式(5.1)，社會規劃者乃極大化所有再生能源廠商之利潤以及生產再生能源所得之外部效益：

$$\max_{Q_i, A_i} \int_0^T e^{-rt} \left\{ P(E)\left[Q - g(Q)\right] - c(Q) - c^h(A) + b(C - C_1) + b_1(A) \right\} dt \tag{5.1}$$

式(5.1)中，$c^h(A)$ 為污染防治之成本，其受到所有 m 家再生能源廠商防治污染之努力 $A = \sum_{i=1}^{m} A_i$ 的影響，而 $b_1(A)$ 為所有 m 家防治努力所帶來的外部效益。

由於廠商採用污染防治的努力行為A也需耗用掉能源βA，故此能源的耗用也將促使溫室氣體累積以及能源耗竭，於是我們再度改寫溫室氣體累積狀態方程式如式(5.2)：

$$\dot{C} = \alpha\left\{E - \left[Q - g(Q) - \beta A\right]\right\} - \delta C \tag{5.2}$$

另外我們再看化石能源耗竭之狀態方程式式(5.3)：

$$\dot{S} = -\left\{E - \left[Q - g(Q) - \beta A\right]\right\} \tag{5.3}$$

同樣的，式(5.3)說明當污染防治的努力做的越多，所需耗費的能源也越多，加速化石能源之耗竭。於是此社會最適模型將由式(5.1)、式(5.2)以及式(5.3)構成模型主幹，再加上初期值、終期值條件，即式(4.9)與式(4.10)，如此構成新的社會最適模型，即

$$\max_{Q_i, A_i} \int_0^T e^{-rt}\left\{P(E)\left[Q - g(Q)\right] - c(Q) - c^h(A) + b(C - C_1) + b_1(A)]\right\} dt$$

$$\dot{C} = \alpha\left\{E - \left[Q - g(Q) - \beta A\right]\right\} - \delta C$$

$$\dot{S} = -\{E - [Q - g(Q) - \beta A]\}$$

$$C(0) = C_0$$

$$S(0) = S_0, S(T) = \underline{S}$$

寫下其 Hamiltonian 現值函數：

$$H = P(E)\left[Q - g(Q)\right] - c(Q) - c^h(A) + b(C - C_1) + b_1(A)$$

$$+\lambda\Big(\alpha\left\{E - \left[Q - g(Q) - \beta A\right]\right\} - \delta C\Big) + \mu\Big(-\left\{E - \left[Q - g(Q) - \beta A\right]\right\}\Big) \qquad (5.4)$$

其共狀態方程式則如式(4.13)與式(4.14)。

接著求出短期下最適淨能源產出解，將式(5.4)對淨能源產出做一階微分，得到：

$$\frac{\partial H}{\partial Q_i} = 0 \Rightarrow \left[P(E) - \lambda\alpha + \mu\right](1 - g_Q) - c_Q = 0 \qquad (5.5)$$

式(5.5)所求出者乃短期下社會最適情況下之總能源產出。

至於廠商之污染防治活動 A_i 也需選擇。在利潤極大化的情況下，其一階條件如式(5.6):

$$\frac{\partial H}{\partial A_i} = 0 \Rightarrow -c_A^h + b_{1A} + \lambda\alpha\beta - \mu\beta = 0 \qquad (5.6)$$

$c_A^h = \partial c^h / \partial A_i$ 為增加一單位污染防治活動所需付出之防治成本，而 b_{1A} 為從事污染防治的邊際效益。如式(5.5)一樣，一階條件指社會最適情況所應選擇的最適污染防治活動。

由(5.5)與式(5.6)之一階條件，我們也可以進一步探討，當溫室氣體的影子價格增加與化石能源存量的影子價格增加會如何影響到再生能源產出與防治活動。將式(5.5)與式(5.6)作比較靜態分析，得到式(5.7)~式(5.10):

$$\frac{dQ_i}{d\mu} = \frac{-(1 - g_Q)(b_{1AA} - c_{AA}^h)}{\Delta} > 0 \qquad (5.7)$$

$$\frac{dA_i}{d\mu} = \frac{-\beta\left\{\left[P(E) - \lambda\alpha + \mu\right]g_{QQ} + c_{QQ}\right\}}{\Delta} < 0 \tag{5.8}$$

$$\frac{dQ_i}{d\lambda} = \frac{\alpha(1 - g_Q)(b_{1AA} - c_{AA}^h)}{\Delta} < 0 \tag{5.9}$$

$$\frac{dA_i}{d\lambda} = \frac{\alpha\beta\left\{\left[P(E) - \lambda\alpha + \mu\right]g_{QQ} + c_{QQ}\right\}}{\Delta} > 0 \tag{5.10}$$

其中 $\Delta = \begin{vmatrix} -\left[P(E) - \lambda\alpha + \mu\right]g_{QQ} - c_{QQ} & 0 \\ 0 & b_{1AA} - c_{AA}^h \end{vmatrix} > 0$

式(5.7)到(5.10)中，$b_{1AA} = b_1''(A) < 0$ 為防治活動所造成的邊際效益增加的幅度，而 $c_{AA}^h = c^{h''}(A) > 0$ 為防治成本增加的幅度。由上四式可看出，當化石能源存量的的影子價格增加時，再生能源的產量將增加，而防治活動將減少；而當溫室氣體的影子價格增加(絕對值越小)，表示溫室氣體累積的問題較不嚴重，再生能源產量應減少，而防治活動應增加。

接著看廠商利潤極大化模型。一樣不考慮技術進步與投資，所不同的是這次加入了污染防治之成本 $c^h(A_i)$。在以淨能源產出做為補貼基礎之價格政策下，廠商目標極大化之利潤函數：

$$\max_{Q_i, A_i} \int_0^T e^{-rt}\left\{P\cdot\left[Q_i - g(Q_i)\right] - c(Q_i) - c^h(A_i) + \tau\cdot\left[Q_i - g(Q_i) - \beta A_i\right] + \tau_1 A_i\right\}dt \tag{5.11}$$

由於廠商從事污染防治的努力會帶來外部效益，但此努力本身也耗用掉能源，造成溫室氣體增加、化石能源存量的減少，所以政府獎勵廠商污染防治所給的環境補貼 τ_1 要根據防治努力 A_i 的多寡給予補貼，但其因為此努力而耗用能源的部分，需算做能源投入，再從能源淨產出中扣除，即如式(5.11)中，環境補貼總額為 $\tau_1 A_i$，但淨能源的補貼總額卻變為 $\tau\cdot[Q_i - g(Q_i) - \beta A_i]$。

同樣受限制在化石能源存量固定，即式(4.10)下，並合併化石能源存量狀態方程式式(5.3)，得到 Hamiltonian 現值函數如式(5.12):

$$\begin{aligned} H &= P\cdot\left[Q_i - g(Q_i)\right] - c(Q_i) - c^h(A_i) + \tau\cdot\left[Q_i - g(Q_i) - \beta A_i\right] + \tau_1 A_i \\ &\quad + \mu\left(-\left\{E - \left[Q - g(Q) - \beta A\right]\right\}\right) \end{aligned} \tag{5.12}$$

接著在淨能源補貼的基礎與化石能源存量限制之下，求出短期下廠商最適之總能源產出與最適之污染減量活動，如式(5.13)與式(5.14):

$$(P+\tau+\mu)(1-g_Q) - c_Q = 0 \tag{5.13}$$

$$-c_A^h - \tau\beta + \tau_1 - \mu\beta = 0 \tag{5.14}$$

就能源政策而言，當補貼率等於溫室氣體存量的影子價格乘上排放係數時，產出就達到社會最適；就環境政策而言，當補貼率 τ_1 等於防治活動所帶來的外部效益 $b_{1A} = b_1'(A)$ 時，防治工作就達社會最適。欲知淨能源補貼變動與環境補貼變動對能源產出及污染防治活動的影響，可將式(5.13)與式(5.14)的短期產出分別對能源補貼與環境補貼做短期下的比較靜態分析，得到：

$$\frac{dQ_i}{d\tau} = \frac{(1-g_Q)c_{AA}^h}{\Delta} > 0 \tag{5.15}$$

$$\frac{dA_i}{d\tau} = \frac{-\beta\left[(P+\tau+\mu)g_{QQ} + c_{QQ}\right]}{\Delta} < 0 \tag{5.16}$$

$$\frac{dQ_i}{d\tau_1} = \frac{0}{\Delta} = 0 \tag{5.17}$$

$$\frac{dA_i}{d\tau_1} = \frac{(P+\tau+\mu)g_{QQ} + c_{QQ}}{\Delta} > 0 \tag{5.18}$$

其中，$\Delta = \begin{vmatrix} -(P+\tau+\mu)g_{QQ} - c_{QQ} & 0 \\ 0 & -c_{AA}^h \end{vmatrix} > 0$

式(5.15)~式(5.18)分別說明當能源補貼增加時，有效率的廠商產出會增加(沒有效率的廠商不會加入生產)，但能源補貼增加也會使防治活動減少；而環境補貼方面，當補貼率增加，能源產出不受影響，而防治活動則會跟著增加。

而在以淨能源產出為基礎的數量政策下，廠商之利潤函數將改為：

$$\max_{Q_i, A_i} \int_0^T e^{-rt} \left\{ P\left[Q_i - g(Q_i)\right] - c(Q_i) - c^h(A_i) + P_c\left[Q_i - g(Q_i) - \beta A_i - \overline{N}\right] + \tau_1 A_i \right\} dt \tag{5.19}$$

與化石能源存量狀態方程式式(5.3)配合，寫出其 Hamiltonian 現值函數如式(5.20):

$$\begin{aligned} H &= P\left[Q_i - g(Q_i)\right] - c(Q_i) - c^h(A_i) + P_c\left[Q_i - g(Q_i) - \beta A_i - \overline{N}\right] + \tau_1 A_i \\ &\quad + \mu\left(-\left\{E - \left[Q - g(Q) - \beta A\right]\right\}\right) \end{aligned} \tag{5.20}$$

求出一階條件如式(5.21)與式(5.22)，為廠商利潤極大化之下的能源產出與防治活動。

$$(P + P_c + \mu)(1 - g_Q) - c_Q = 0 \tag{5.21}$$

$$-c_A^h - P_c\beta + \tau_1 - \mu\beta = 0 \tag{5.22}$$

分別對式(5.21)與式(5.22)所求出之短期最適產出做比較靜態，我們也能得到當權證價格上升時，有效率的廠商會增加能源產出，但其防治活動會減少，而環境補貼增

加則使防治活動增加的結論，如式(5.23)~式(5.26):

$$\frac{dQ_i}{dP_c}=\frac{(1-g_Q)c_{AA}^h}{\Delta}>0 \tag{5.23}$$

$$\frac{dA_i}{dP_c}=\frac{-\beta\left[(P+P_c+\mu)g_{QQ}+c_{QQ}\right]}{\Delta}<0 \tag{5.24}$$

$$\frac{dQ_i}{d\tau_1}=\frac{0}{\Delta}=0 \tag{5.25}$$

$$\frac{dA_i}{d\tau_1}=\frac{(P+P_c+\mu)g_{QQ}+c_{QQ}}{\Delta}>0 \tag{5.26}$$

其中，$\Delta=\begin{vmatrix}-(P+P_c+\mu)g_{QQ}-c_{QQ} & 0\\ 0 & -c_{AA}^h\end{vmatrix}>0$

第二節　技術進步

以上模型論述，皆假設廠商沒有投資，所以沒有技術進步的問題。但是，長期下生產再生能源是存在技術進步的。技術進步將使廠商的生產成本降低以及能源投入減少。在此狀況下，能源投入為 $g(Q,k)$ ，其中，k 為技術(或知識)存量。因此，淨能源產出如式(5.27):

$$N_k = Q - g(Q,k) \tag{5.27}$$

式(5.27)中，N_k 為有技術進步下的能源淨產出。

技術進步不僅使能源投入減少，反映在 $g(Q,k)$ 中，也使得非能源成本結構有所改變，從原先的 $c(Q)$ 改變成 $c(Q,k)$ ，其中， $g_Q(Q,k)>0, g_{QQ}(Q_k,k)>0$ ，表示隨著能源產出增加，能源之邊際投入也跟著增加，且增加的幅度隨能源產出增加而增加。不過 $g_k(Q,k)<0, g_{kk}(Q,k)>0$ ，表示技術進步將使能源投入減少，但其邊際報酬遞減。另外，就非能源成本方面， $c_Q(Q,k)>0, c_{QQ}(Q,k)>0$ ，表示隨著產出增加，非能源投入成本也跟著增加，且增加的幅度隨能源產出增加而增加；而 $c_k(Q,k)<0, c_{kk}(Q,k)>0$ ，表示隨著技術存量增加，非能源成本減少，但其邊際報酬遞減。在此情況下，社會最適目標函數如式(5.28)：

$$\max_{Q_i, A_i} \int_0^T e^{-rt}\left\{P(E)\left[Q-g(Q,k)\right]-c(Q,k)-c^h(A)+b(C-C_1)+b_1(A)\right\}dt \tag{5.28}$$

而此技術進步存量受到每期的技術進步率 $l(Q,k)$ 以及存量折舊率 δ_k 影響，具體言之，可將技術存量之變動量表示如式(5.29):

$$\dot{k} = l(Q,k) - \delta_k k \qquad 0 < \delta_k < 1 \tag{5.29}$$

而技術進步使淨能源產出增加，這部分可以替代更多的化石能源燃燒及減少較多溫室氣體，故溫室氣體存量與化石能源存量方程式都必須重新改寫為如式(5.30)與式(5.31):

$$\dot{C} = \alpha\left\{E - \left[Q - g(Q,k) - \beta A\right]\right\} - \delta C \tag{5.30}$$

$$\dot{S} = -\left\{E - \left[Q - g(Q,k) - \beta A\right]\right\} \tag{5.31}$$

我們設定剛開始的知識存量大於零

$$k(0) = K_0 > 0 \tag{5.32}$$

於是我們根據式(4.9)、式(4.10)、式(5.28)、式(5.29)、式(5.30)、式(5.31)與式(5.32)重寫社會規劃者的整體模型：

$$\max_{Q,A_i} \int_0^T e^{-rt} \left\{P(E)\left[Q - g(Q,k)\right] - c(Q,k) - c^h(A) + b(C - C_1) + b_1(A)\right\} dt$$

$$\dot{k} = l(Q,k) - \delta_k k$$

$$\dot{C} = \alpha\left\{E - \left[Q - g(Q,k) - \beta A\right]\right\} - \delta C$$

$$\dot{S} = -\left\{E - \left[Q - g(Q,k) - \beta A\right]\right\}$$

$$k(0) = K_0 > 0$$

$$C(0) = C_0$$

$S(0)=S_0, S(T)=\underline{S}$

接著寫下其 Hamiltonian 現值函數:

$$H=P(E)\left[Q-g(Q,k)\right]-c(Q,k)-c^h(A)+b(C-C_1)+b_1(A)+\phi\left[l(Q,k)-\delta_k k\right]$$
$$+\lambda\left(\alpha\left\{E-\left[Q-g(Q,k)-\beta A\right]\right\}-\delta C\right)+\mu\left(-\left\{E-\left[Q-g(Q,k)-\beta A\right]\right\}\right) \qquad (5.33)$$

其技術存量之影子價格ϕ之變動則為：

$$\dot{\phi}=-\frac{\partial H}{\partial k}+rk=\left[P\left(E\right)-\lambda\alpha+\mu\right]g_k+c_k-\phi(l_k-\delta_k)+rk \qquad (5.34)$$

式(5.34)描述技術進步之影子價格變動，其變動率如式(5.35)：

$$\frac{\dot{\phi}}{\phi}=\frac{\left[P\left(E\right)-\lambda\alpha+\mu\right]g_k+c_k+rk}{\phi}-l_k+\delta_k \qquad (5.35)$$

由式(5.35)可知，技術存量影子價格受到其邊際投入、其他報酬、技術進步率與折舊率所影響。當折舊率越高，技術存量的影子價格就越高，而當技術進步率越高，其影子價格成長反而較緩。

其溫室氣體累積量及化石能源存量之共狀態方程式則如式(4.13)與式(4.14)。接著便可由一階條件求取短期下最適之再生能源產出以及污染防治活動，如式(5.36)與式(5.37)：

$$\frac{\partial H}{\partial Q_i}=0\Rightarrow[P(E)-\lambda\alpha+\mu][1-g_Q^k]-c_Q^k+\phi l_Q^k=0 \tag{5.36}$$

$$\frac{\partial H}{\partial A_i}=0\Rightarrow -c_A^h+b_{1A}+\lambda\alpha\beta-\mu\beta=0 \tag{5.37}$$

其中，g_Q^k為有技術進步下之邊際能源投入、c_Q^k為有技術進步下之邊際非能源成本，而$l_Q^k=l'(Q,k)>0$為產量對技術進步的邊際貢獻，此邊際貢獻增加的幅度漸緩，即$l_{QQ}^k=l''(Q,k)<0$。由上兩式即求出在技術進步之下社會最適之總能源產出及污染防治活動。

在技術進步的前提下，我們也可以將一階條件式(5.36)、式(5.37)對溫室氣體與化石能源的影子價格作比較靜態分析，得到類似式(5.7)~式(5.10)的結果，即當化石能源存量的的影子價格增加時，再生能源的產量將增加，而防治活動將減少；而當溫室氣體的影子價格增加(絕對值越小)，表示溫室氣體累積的問題較不嚴重，再生能源產量應該減少而防治活動應該增加。如式(5.38)~式(5.41)：

$$\frac{dQ_i}{d\mu}=\frac{-(1-g_Q^k)(b_{1AA}-c_{AA}^h)}{\Delta}>0 \tag{5.38}$$

$$\frac{dA_i}{d\mu}=\frac{-\beta\left\{\left[P(E)-\lambda\alpha+\mu\right]g_{QQ}^k+c_{QQ}^k-\phi l_{QQ}^k\right\}}{\Delta}<0 \tag{5.39}$$

$$\frac{dQ_i}{d\lambda}=\frac{\alpha(1-g_Q^k)(b_{1AA}-c_{AA}^h)}{\Delta}<0 \tag{5.40}$$

$$\frac{dA_i}{d\lambda}=\frac{\alpha\beta\left\{\left[P(E)-\lambda\alpha+\mu\right]g_{QQ}^k+c_{QQ}^k-\phi l_{QQ}^k\right\}}{\Delta}>0 \tag{5.41}$$

其中 $\Delta=\begin{vmatrix}-\left[P(E)-\lambda\alpha+\mu\right]g_{QQ}^k-c_{QQ}^k+\phi l_{QQ}^k & 0\\ 0 & b_{1AA}-c_{AA}^h\end{vmatrix}>0$

當然，我們也可以探討當知識存量的影子價格變動，對再生能源產出與防治活

動的影響。一樣將式(5.36)與(5.37)對知識存量的影子價格作比較靜態分析，得到式(5.42)與式(5.43):

$$\frac{dQ_i}{d\phi}=\frac{-l_Q^k(b_{1AA}-c_{AA}^h)}{\Delta}>0 \tag{5.42}$$

$$\frac{dA_i}{d\phi}=\frac{0}{\Delta}=0 \tag{5.43}$$

其中，$\Delta=\begin{vmatrix} -\left[P(E)-\lambda\alpha+\mu\right]g_{QQ}^k-c_{QQ}^k+\phi l_{QQ}^k & 0 \\ 0 & b_{1AA}-c_{AA}^h \end{vmatrix}>0$

式(5.42)與式(5.43)說明，當技術存量的影子價格增加時，再生能源產出就會增加，不過對防治活動則無影響。

接著，以價格面政策為例，追求利潤極大之廠商其目標函數為

$$\max_{Q_i,A_i}\int_0^T e^{-rt}\left\{P\cdot\left[Q_i-g(Q_i,k_i)\right]-c(Q_i,k_i)-c^h(A_i)+\tau\cdot\left[Q_i-g(Q_i,k_i)-\beta A_i\right]+\tau_1 A_i\right\}dt \tag{5.44}$$

而其技術存量變動率受本身產出之影響：

$$\dot{k}_i=l(Q_i,k_i)-\delta_k k_i \tag{5.45}$$

以及其初期值條件，再加上化石能源存量之狀態方程式及其初、終期值條件式，就可構成一動態最適控制模型，接著完整寫下其 Hamiltonian 當期值(current value)函數如式(5.46):

$$H = P\cdot\left[Q_i - g(Q_i,k_i)\right] - c(Q_i,k_i) - c^h(A_i) + \tau\cdot\left[Q_i - g(Q_i,k_i) - \beta A_i\right] + \tau_1 A_i$$
$$+\phi\left[l(Q_i,k_i) - \delta_k k_i\right] + \mu\left(-\left\{E - \left[Q - g(Q,k) - \beta A\right]\right\}\right) \tag{5.46}$$

如此便可由一階條件求取短期下最適之再生能源產出以及最適之污染防治活動，如式(5.47)及式(5.48):

$$\frac{\partial H}{\partial Q_i} = 0 \Rightarrow (P+\tau+\mu)(1-g_Q^k) - c_Q^k + \phi l_Q^k = 0 \tag{5.47}$$

$$\frac{\partial H}{\partial A_i} = 0 \Rightarrow -c_A^h + \tau_1 - \tau\beta - \mu\beta = 0 \tag{5.48}$$

一樣可以得到當環境補貼 τ_1 等於污染防治活動之邊際外部效益，而能源補貼等於溫室氣體存量之影子價格乘上排放係數時，便能達到社會最適。

在納入技術進步的考慮後，能源補貼與環境補貼兩者仍然對能源產出以及防治活動有所影響，對式(5.47)及式(5.48)短期下之產出作比較靜態分析，得到：

$$\frac{dQ_i}{d\tau} = \frac{(1-g_Q^k)c_{AA}^h}{\Delta} > 0 \tag{5.49}$$

$$\frac{dA_i}{d\tau} = \frac{-\beta\left[(P+\tau+\mu)g_{QQ}^k + c_{QQ}^k - \phi l_{QQ}^k\right]}{\Delta} < 0 \tag{5.50}$$

$$\frac{dQ_i}{d\tau_1} = \frac{0}{\Delta} = 0 \tag{5.51}$$

$$\frac{dA_i}{d\tau_1} = \frac{(P+\tau+\mu)g_{QQ}^k + c_{QQ}^k - \phi l_{QQ}^k}{\Delta} > 0 \tag{5.52}$$

其中，$\Delta = \begin{vmatrix} -(P+\tau+\mu)g_{QQ}^k - c_{QQ}^k + \phi l_{QQ}^k & 0 \\ 0 & -c_{AA}^h \end{vmatrix} > 0$

由式(5.49)~式(5.52)我們一樣得到當能源補貼增加時，有效率的廠商能源產出將增加。而對於環境補貼而言，其補貼增加無助於能源產出之增加。就防治活動而言，當能源補貼增加時，活動減少，而環境補貼增加時，活動增加。

而以數量面政策為例，有技術進步之下，廠商極大化其利潤之函數乃為：

$$\max_{Q_i, A_i} \int_0^T e^{-rt} \left\{ P \cdot \left[Q_i - g(Q_i, k_i) \right] - c(Q_i, k_i) - c^h(A_i) + P_c \cdot \left[Q_i - g(Q_i, k_i) - \beta A_i - \overline{N} \right] + \tau_1 A_i \right\} dt$$

(3.53)

其他最適控制條件如式(4.10)、式(5.31)、式(5.32)、式(5.45)，與式(5.53)合併，即可求取在技術進步之下，以淨能源為基礎之數量政策的最適控制模型，如下：

$$\max_{Q_i, A_i} \int_0^T e^{-rt} \left\{ P \cdot \left[Q_i - g(Q_i, k_i) \right] - c(Q_i, k_i) - c^h(A_i) + P_c \cdot \left[Q_i - g(Q_i, k_i) - \beta A_i - \overline{N} \right] + \tau_1 A_i \right\} dt$$

$$\dot{k}_i = l(Q_i, k_i) - \delta_k k_i$$

$$\dot{S} = -\left\{ E - \left[Q - g(Q, k) - \beta A \right] \right\}$$

$$k(0) = K_0 > 0$$

$$S(0) = S_0, S(T) = \underline{S}$$

而根據此最適控制模型，我們也可以寫出 Hamiltonian 當期值(current value)函數，如下式：

$$\begin{aligned} H = {} & P \cdot \left[Q_i - g(Q_i, k_i) \right] - c(Q_i, k_i) - c^h(A_i) + P_c \cdot \left[Q_i - g(Q_i, k_i) - \beta A_i - \overline{N} \right] + \tau_1 A_i \\ & + \phi \left[l(Q_i, k_i) - \delta_k k_i \right] + \mu \left(-\left\{ E - \left[Q - g(Q, k) - \beta A \right] \right\} \right) \end{aligned}$$

(5.54)

以及在一階條件下，求出最適之污防治活動與再生能源產出，並分析權證價格與環境補貼增加對能源產出以及防治活動的影響，如下列各式：

$$\frac{\partial H}{\partial Q_i} = 0 \Rightarrow (P + P_c + \mu)(1 - g_Q^k) - c_Q^k + \phi l_Q^k = 0 \tag{5.55}$$

$$\frac{\partial H}{\partial A_i} = 0 \Rightarrow -c_A^h + \tau_1 - P_c\beta - \mu\beta = 0 \tag{5.56}$$

$$\frac{dQ_i}{dP_c} = \frac{(1 - g_Q^k)c_{AA}^h}{\Delta} > 0 \tag{5.57}$$

$$\frac{dA_i}{dP_c} = \frac{-\beta\left[(P + P_c + \mu)g_{QQ}^k + c_{QQ}^k - \phi l_{QQ}^k\right]}{\Delta} < 0 \tag{5.58}$$

$$\frac{dQ_i}{d\tau_1} = \frac{0}{\Delta} = 0 \tag{5.59}$$

$$\frac{dA_i}{d\tau_1} = \frac{(P + P_c + \mu)g_{QQ}^k + c_{QQ}^k - \phi l_{QQ}^k}{\Delta} > 0 \tag{5.60}$$

其中，$\Delta = \begin{vmatrix} -(P + P_c + \mu)g_{QQ}^k - c_{QQ}^k + \phi l_{QQ}^k & 0 \\ 0 & -c_{AA}^h \end{vmatrix} > 0$

上列各式無非說明，權證價格增加，將使有效率的廠商增加能源產出。至於環境補貼增加對能源產出則沒有影響。另外，環境補貼增加將使防治活動增加，而能源補貼增加將使防治活動減少。