第三章　二家銀行模型

本章考慮二家銀行模型，探討演化穩定策略在二家銀行模型下，存戶可能擠兌之行為是否會使個別銀行增加其承擔風險的程度。且計算系統性風險發生之可能性。

第一節　經濟環境

假設有 a,b 二家銀行，各有風險中立、偏好相同的 D^a, D^b 位存戶。每一個體在 T = 0 期初擁有一單位稟賦，由於假設個體沒有投資機會，所以同樣地會在 T=0 期初將其稟賦存入銀行。收到資金的二家銀行同樣投資其資金於風險性資產與安全性資產，且同樣會對其存款戶作出承諾，若二家銀行之存款戶在 T=1 期初即提回存款，皆可得固定存款報酬率 r_D ，$r_D \geq 1$。而在 T=1 期初未提回的存戶，至 T=1 期末時，可平分銀行的投資收益：銀行獲得 β 比例，存戶則獲得（1-β）比例。二家銀行與其各自的存戶因地域的區隔所以無來往，但其風險性資產的投資卻有相關性（參照 Acharya（2000）, p.6）。假設其風險性資產報酬率為：

$$r_R^i = f\left(R^i, R^j\right) + \varepsilon, \quad i = a,b \qquad i \neq j$$（ε 的假設如第二章所述）

且兩家銀行的風險性資產報酬率為正相關

$$COVariance\left(r_R^a, r_R^b\right) > 0$$ [1]

假設二家銀行沒有直接的相關性，即沒有 interbank 的機制，二家銀行沒有相互拆款。然而，二家銀行的風險性資產報酬卻具有相關性。由於假設風險性資產可控制的部分報酬率與總合投資規模成正相關，所以當二家銀行投資總額愈多時，部分可能獲利就會愈大。當然，當投資受到衝擊時，二家銀行無一能倖免，故聯合倒閉的可能性是由個別銀行承擔的風險與

1

$E\left(r_R^a\right) = E\left(r_R^b\right) = E(\varepsilon) = \mu$

$\mathrm{cov}\left(r_R^a, r_R^b\right) = E\left[\left(r_R^a - \mu\right)\left(r_R^b - \mu\right)\right] = E\left(r_R^a, r_R^b\right) - \mu^2 = E\left[f\left(R^a, R^b\right) + \varepsilon, f\left(R^a, R^b\right) + \varepsilon\right] - \mu^2 = f^2\left(R^a, R^b\right) + 2\mu f\left(R^a, R^b\right) + \sigma^2 - \mu^2 > 0$

投資的相關程度所決定。

第二節　存戶與銀行決策

每一個存戶有一策略集 S={ s_1, s_2 }，s_1 =在 T=1 期初即提早支領存款；s_2 =留至 T=1 期末。令 $z^i, i=a,b$ 為二家銀行個別留至 T=1 期末的存戶人數，即採 s_2 策略的參賽者數目（ z^i 為內生決定，以下有詳細分析）。給定在 T=0 期初銀行的投資組合（ S,R ），在考慮擠兌人數 z 與擠兌成本 r_D 後，銀行倒閉條件成為：

$$\pi^i = r_S S^i + \left[f\left(R^i, R^j\right) + \varepsilon\right]R^i - r_D\left(D^i - z^i\right) = 0 \text{ ， } S^i + R^i = D^i, i=a,b, i \neq j \text{ 。}$$

即二家銀行之間的報酬會透過風險性資產報酬交互影響，因此某一家銀行的倒閉與否會透過風險性資產而對另外一家銀行產生影響。

同樣的可以求得代表無投機性擠兌行為下，i 銀行倒閉的衝擊水準臨界值 $\bar{\varepsilon}^i$ 。則依定義可得：

$$\bar{\varepsilon}^i = -\frac{r_S D^i}{R^i} + r_S - f\left(R^i, R^j\right), \ i=a,b, \quad i \neq j$$

即當風險性資產隨機報酬低於 $\bar{\varepsilon}^i$ 時，銀行會因投資組合獲利不良而倒閉，與存戶是否提早提款之行為沒有關係。

令 $\varepsilon_\Lambda^i\left(R_\Lambda^i, R_\Lambda^j, z^i, z^j\right)$ = i 銀行在存戶擠兌行為可能存在的情況下的倒閉臨界值，$i=a,b, \quad i \neq j$ （ $\varepsilon_\Lambda^i\left(R_\Lambda^i, R_\Lambda^j, z^i, z^j\right)$ 為內生決定，以下有詳細分析）。給定每一個存戶之策略集 S={ s_1, s_2 }，則存戶採各策略報酬的情形為：

$$u_\Lambda^i\left(s_1, D^i - z^i, z^i\right) = \begin{cases} r_D & , \ \varepsilon_\Lambda^i > \varepsilon_\Lambda^i\left(R_\Lambda^i, R_\Lambda^j, z^i, z^j\right) \\ \dfrac{\delta}{D^i - z^i} r_D + \dfrac{D^i - z^i - \delta}{D^i - z^i} 0 & , \ \varepsilon_\Lambda^i \le \varepsilon_\Lambda^i\left(R_\Lambda^i, R_\Lambda^j, z^i, z^j\right) \end{cases}$$

$$u_{\Lambda}^{i}\left(s_2, D^i - z^i, z^i\right) = \begin{cases} \dfrac{(1-\beta)\pi_{\Lambda}^{i}}{z^i}, & , \ \varepsilon_{\Lambda}^{i} > \varepsilon_{\Lambda}^{i}\left(R_{\Lambda}^{i}, R_{\Lambda}^{j}, z^i, z^j\right) \\ 0 & , \ \varepsilon_{\Lambda}^{i} \le \varepsilon_{\Lambda}^{i}\left(R_{\Lambda}^{i}, R_{\Lambda}^{j}, z^i, z^j\right) \end{cases}$$
$$i = a, b, \quad i \ne j$$

其中，

$$\pi_{\Lambda}^{i} = \left\{r_S S_{\Lambda}^{i} - r_D\left(D^i - z^i\right) + \left[f\left(R_{\Lambda}^{i}, R_{\Lambda}^{j}\right) + \varepsilon\right]R_{\Lambda}^{i}\right\}, i = a, b, \quad i \ne j$$

令 E_1^i=i 銀行的所有存戶皆採 s_1 所形成之策略組合、E_2^i=i 銀行的所有存戶皆採 s_2 所形成之策略組合，$i = a, b, \quad i \ne j$。

定理 3:* E_1^i *及* E_2^i *為協調賽局的兩個嚴格 Nash 均衡,* $i = a, b, \quad i \ne j$ *。即即使在二家銀行下，銀行與其個別存戶之間仍存在多重均衡的情形。

證明如第二章所述。

類似代表性銀行之分析，本文定義 ψ_{Λ}^{i}：

$$\psi_{\Lambda}^{i}\left(D^i - z^i, z^i\right) = u_{\Lambda}^{i}\left(s_1, D^i - z^i, z^i\right) - u_{\Lambda}^{i}\left(s_2, D^i - z^i, z^i\right), i = a, b$$

由於存戶之報酬與銀行之報酬有關，而銀行報酬又 ε 及 R 有關，我們將 $\psi_{\Lambda}^{i}\left(\dfrac{D^i}{2}, \dfrac{D^i}{2}\right) > 0$ 的臨界值以 ε 及 R 之關係表示，可得下列關係：令 $z^i = D^i/2$，代入 $\psi_{\Lambda}^{i}\left(\dfrac{D^i}{2}, \dfrac{D^i}{2}\right) = 0$ 中可得：

$$\hat{\varepsilon}_A = \frac{D^i}{R_{\Lambda}^{i}}\left(r_D - r_S\right) + r_S - f\left(R_{\Lambda}^{i}, R_{\Lambda}^{j}\right), i = a, b, \quad i \ne j$$

同樣的本文將進一步探討 $D^i/2$ 演化穩定策略將如何影響銀行之投資組合決策及倒閉的機率。

命題3：在二家銀行模型下，只要存戶有擠兌的可能，仍會使銀行承擔風險的程度增加，而其所面臨的倒閉之倒閉機率亦會提高。

證明令U^i＝存戶不存在投機性擠兌行為下，存戶於i銀行存活至期末所能分得之報酬。故可推得$U^i = \frac{(1-\beta)\{r_S S^i + [f(R^i, R^j) + \varepsilon^i]R^i\}}{D^i}$。又$U^i$與$\pi_\Lambda^i$是$\varepsilon$的遞增函數（$\frac{\partial U^i}{\partial \varepsilon} > 0, \frac{\partial \pi_\Lambda^i}{\partial \varepsilon} > 0$），且$\pi_\Lambda^i(\hat{\varepsilon}_\Lambda^i) = \frac{D^i\ r_D}{2} > 0 = U^i(\bar{\varepsilon}^i)$，且故可推得$\bar{\varepsilon}^i < \hat{\varepsilon}_\Lambda^i$。

在無投機性擠兌下，銀行在 T=0 期初會極大化其預期報酬：

$$\underset{S^i, R^i}{Max} \quad E\pi^i = \beta\left\{r_S S^i + \int_{\varepsilon^*}^{\infty}[f(R^i, R^j) + \varepsilon]R^i g(\varepsilon)d\varepsilon\right\},$$

$$\text{st.} \quad S^i + R^i = D^i,$$

$$\bar{\varepsilon}^i = -\frac{r_S D^i}{R^i} + r_S - f(R^i, R^j), i, j = a, b, i \neq j。$$

第一階條件$\frac{\partial E\pi^i(R^i, \bar{\varepsilon}^i(R^i, R^j))}{\partial R} = H^i(\overline{R}^i(\bar{\varepsilon}^i)) = 0$，第二階條件$\frac{\partial H^i}{\partial R^i} < 0$。因此可得無投機性擠兌下最適風險性資產投資額為$\overline{R}^i = R^i(R^j, \bar{\varepsilon}^i, r_S, D^i)$。

又在款者採取$D^i/2$演化穩定策略後，銀行在 T=0 期初亦會極大化其預期報酬：

$$\underset{S^i, R^i}{Max} \quad E\pi^i = \beta\left\{r_S S^i + \int_{\hat{\varepsilon}}^{\infty}[f(R^i, R^j) + \varepsilon]R^i g(\varepsilon)d\varepsilon\right\},$$

$$\text{st.} \quad S^i + R^i = D^i,$$

$$\hat{\varepsilon}^i = \frac{(2-\beta)D^i}{2(1-\beta)R^i} r_D - \frac{D^i}{R^i} r_S + r_S - f(R^i, R^j)。$$

第一階條件$\frac{\partial E\pi^i(R^i, \hat{\varepsilon}(R^i, R^j))}{\partial R^i} = V^i(\hat{R}^i(\hat{\varepsilon})) = 0$，第二階條件$\frac{\partial V^i}{\partial R^i} < 0$。因此可得無投機性擠兌下最適風險性資產投資額為$\hat{R}^i = R^i(R^j, \hat{\varepsilon}^i, r_S, r_D, D^i)$。

比較$H^i - V^i$之大小：

$$
\begin{aligned}
H^i - V^i &= \beta\left[f'R^i + f\left(R^i, R^j\right)\right]\left[G(\hat{\varepsilon}) - G\left(\varepsilon^*\right)\right] + \beta\left[M(\hat{\varepsilon}) - M\left(\varepsilon^*\right)\right] \\
&\quad + g\left(\varepsilon^*\right) r_S S^i \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial R^i} - \beta\left\{g'(\hat{\varepsilon})\left[\Gamma + r_S\right] - \beta g(\hat{\varepsilon}) R^i\right\} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial R^i} \\
&\le \left\{\left[f'R^i + f\left(R^i, R^j\right)\right] R^i g\left(\varepsilon^*\right) + \varepsilon^* g\left(\varepsilon^*\right) R^i\right\}\left(\frac{\hat{\varepsilon} - \varepsilon^*}{R^i} + \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial R^i} - \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial R^i}\right) \\
&\quad + \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial R}\left[g'(\hat{\varepsilon})(\Gamma + r_S) + g(\hat{\varepsilon}) R - f'R^i g\left(\varepsilon^*\right) - f\left(R^i, R^J\right) g\left(\varepsilon^*\right)\right] \\
&\quad + \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial R}\left[f'R^i + f\left(R^i, R^j\right) + g\left(\varepsilon^*\right) r_S S^i + \varepsilon^* g\left(\varepsilon^*\right) R^i\right] < 0^2
\end{aligned}
$$

故可推得 $H^i\left(R^i\right) > V^i\left(R^i\right), \forall R^i$。而由第一階條件可得 $H^i\left(\overline{R}^i\right) \equiv 0 \equiv V^i\left(\hat{R}^i\right)$，第二階條件 $\frac{\partial H^i}{\partial R^i} < 0$， $\frac{\partial V^i}{\partial R^i} < 0$，故可推得 $\overline{R}^i < \hat{R}^i$，即 $\left(\overline{R}^a, \overline{R}^b\right) < \left(\hat{R}^a, \hat{R}^b\right)$。□

此表示在採取 $D^i/2$ 演化穩定策略後，二家銀行的存戶都會要求較高的風險性資產報酬率，而提高了銀行倒閉的臨界值。而二家銀行為防止存戶擠兌行為之發生，皆會重新調整其投資組合。為使其投資組合在事後有較高之收益以符合存戶之要求，二家銀行在事前會增加風險性資產的投資額，而使銀行承擔風險的程度增加。

第三節　系統性風險

在得知存戶的可能擠兌行為會促使銀行採高風險的投資組合，而使倒閉機率增加的情況下，本文進一步探討擠兌行為對系統性風險會有何影響？即考慮擠兌行為是否會加重銀行聯合倒閉發生之可能性。

二家銀行的系統性風險情形可分為三種：

1. 令 $R^a = \overline{R}^a$，$R^b = \overline{R}^b$，則二家銀行皆採無投機性擠兌下風險性資產投資額之系統性風險為 $p\left[\varepsilon < \overline{\varepsilon}^a\left(\overline{R}^a, \overline{R}^b\right)\right] p\left[\varepsilon < \overline{\varepsilon}^b\left(\overline{R}^a, \overline{R}^b\right)\right]$。

[2]假設 $r_S = r_D$ 令 $\Gamma = \frac{\beta r_D D}{2(1-\beta)}$；$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial R} = \frac{r_S D}{R^2} - f' < 0$；$\frac{\partial \varepsilon_A^*}{\partial R} = -\frac{\Gamma}{R^2} - f' < 0$

2. 令 $R^a=\hat{R}^a$，$R^b=\overline{R}^b$，則一家銀行採無投機性擠兌下風險性資產投資額，另一家採消除投機性擠兌後的風險性資產投資額之系統性風險為 $p\left[\varepsilon<\hat{\varepsilon}^a\left(\hat{R}^a,\overline{R}^b\right)\right]p\left[\varepsilon<\overline{\varepsilon}^b\left(\hat{R}^a,\overline{R}^b\right)\right]$。

3. 令 $R^a=\hat{R}^a$，$R^b=\hat{R}^b$，則二家銀行皆採消除投機性擠兌後的風險性資產投資額之系統性風險為 $p\left[\varepsilon<\hat{\varepsilon}^a\left(\hat{R}^a,\hat{R}^b\right)\right]p\left[\varepsilon<\hat{\varepsilon}^b\left(\hat{R}^a,\hat{R}^b\right)\right]$。

命題 4：愈多家銀行考慮存戶擠兌之可能性，愈會提高系統性風險發生之機率。

證明：由於 $\hat{R}^a>\overline{R}^a$，$f'>0$，可得 $\overline{\varepsilon}^b\left(\overline{R}^a,\overline{R}^b\right)-\overline{\varepsilon}^b\left(\hat{R}^a,\overline{R}^b\right)=-f\left(\overline{R}^a,\overline{R}^b\right)+f\left(\hat{R}^a,\overline{R}^b\right)>0$，且 $\hat{\varepsilon}^a\left(\hat{R}^a,\overline{R}^b\right)-\overline{\varepsilon}^a\left(\overline{R}^a,\overline{R}^b\right)=\overline{\varepsilon}^b\left(\overline{R}^a,\overline{R}^b\right)-\overline{\varepsilon}^b\left(\hat{R}^a,\overline{R}^b\right)+r_S D\left(\frac{1}{\overline{R}^a}-\frac{1}{\hat{R}^a}\right)+\frac{(2-\beta)Dr_D}{2(1-\beta)\hat{R}^a}>0$，所以 $p\left[\varepsilon<\hat{\varepsilon}^a\left(\hat{R}^a,\overline{R}^b\right)\right]p\left[\varepsilon<\overline{\varepsilon}^b\left(\hat{R}^a,\overline{R}^b\right)\right]>p\left[\varepsilon<\overline{\varepsilon}^a\left(\overline{R}^a,\overline{R}^b\right)\right]p\left[\varepsilon<\overline{\varepsilon}^b\left(\overline{R}^a,\overline{R}^b\right)\right]$。即有其中一家銀行考慮存戶擠兌之可能性將會引發較大的系統性風險。

又 $\hat{\varepsilon}^a\left(\hat{R}^a,\hat{R}^b\right)-\hat{\varepsilon}^a\left(\hat{R}^a,\overline{R}^b\right)=-f\left(\hat{R}^a,\hat{R}^b\right)+f\left(\hat{R}^a,\overline{R}^b\right)<0$，且 $\hat{\varepsilon}^b\left(\hat{R}^a,\hat{R}^b\right)-\overline{\varepsilon}^b\left(\hat{R}^a,\overline{R}^b\right)=\frac{(2-\beta)Dr_D}{2(1-\beta)\hat{R}^a}+\hat{\varepsilon}^a\left(\hat{R}^a,\hat{R}^b\right)-\hat{\varepsilon}^a\left(\hat{R}^a,\overline{R}^b\right)>0$，所以 $p\left[\varepsilon<\hat{\varepsilon}^a\left(\hat{R}^a,\hat{R}^b\right)\right]p\left[\varepsilon<\hat{\varepsilon}^b\left(\hat{R}^a,\hat{R}^b\right)\right]>p\left[\varepsilon<\hat{\varepsilon}^a\left(\hat{R}^a,\overline{R}^b\right)\right]p\left[\varepsilon<\overline{\varepsilon}^b\left(\hat{R}^a,\overline{R}^b\right)\right]$。即二家銀行皆考慮存戶擠兌可能性時會引發的系統性風險為最大。

換言之，當某一家銀行考慮存戶擠兌的可能性時，其投資組合的風險程度就會較高時，而其相應的倒閉機率勢必較高。則一經濟體系中一旦發生負向衝擊，愈多家銀行採取風險程度較高的投資組合，會造成愈高的系統性風險，使得經濟體系愈顯脆弱。