第二章 文獻回顧

第一節 分量迴歸與二元分量迴歸

迴歸分析多用以分析橫斷面資料或縱斷面資料，甚至兩者並俱之資料，而此分析的主要目的係在於給定的訊息下，即在固定的解釋變數下去描述被解釋變數的行為方式，而較佳的該模型能解釋的部分愈多，亦即模型所計算的誤差愈小愈好。誤差平方和極小化的普通最小平方法(Ordinary Least Squares, OLS)即是以誤差平方和極小化為目的所計算出迴歸係數之方法，另一個方式為使誤差絕對值和極小化的絕對值離差法(Least Absolute deviations, LAD)，而分量迴歸係屬後者，而誤差絕對值和極小化的絕對值離差法所計算出的結果即為分量迴歸在在最中間方量所計算出的結果。

分量迴歸(Quantiles Regression)最早是由Koenker and Bassett(1978)所提出。其與最小平方法最大的不同就在於分量迴歸之係數用以衡量解釋變數的「邊際效果」-不同分量下不同的係數結果；然最小平方法的迴歸係數在解釋上意涵不同，OLS估計式乃指解釋變數對被解釋變數的「平均」邊際效果，而分量迴歸則是解釋變數對被解釋變數在某個某個「特定分位點」時的邊際效果。在許多實證研究中，我們關心的往往不只是該變數的平均表現，甚或更在意分配兩端的情況，最小平方法只能提供一個平均數字，但QR卻能提供更多不同分位數的估計結果，因此更可清楚闡釋被解釋變數的整個分配，甚且可處理資料異質性問題，其理論模型詳述如下。

假設一個隨機變數Y的分配為F_Y，而Y的θ分量記為$Q_\theta(y)$，$\theta\in(0,1)$。令等於某個數值，則:

$$Q_\theta(y)=F_Y^{-1}(\theta)=q_\theta \tag{1}$$

(1)式中的y會有θ部分的數值小於或等於q_θ，因此也將會有(1-θ)部分大於或等於q_θ。而q_θ可由下式求解得到:

$$q_\theta=\arg\min[\theta\int_{y\ge q_\theta}|y-q_\theta|dF_Y(y)+(1-\theta)\int_{y\le q_\theta}|y-q_\theta|dF_Y(y)] \tag{2}$$

令X與Y為兩個隨機變數，此時在給定X下，設定一條件分配為 $\hat{\beta}_\theta = \arg\min \frac{1}{T}[\theta \sum_{t:y_t > x_t'\beta} | y_t - x_t'\beta | + (1-\theta) \sum_{t:y_t < x_t'\beta} | y_t - x_t'\beta |]$。則Y的條件分量為:

$$Q_\theta(Y \mid X) = F_{Y|X}^{-1} \tag{3}$$

條件分量 $Q_\theta(Y \mid X)$ 是X的函數，令 $Q_\theta(Y \mid X) = q_\theta(X)$，在給定X=x下，y小於等於 $q_\theta(X)$ 的機率等於 θ，y大於 $q_\theta(X)$ 的機率等於(1-θ)。而(2)式可表示成:

$$q_\theta(x) = \arg\min[\theta \int_{y \geq q_\theta(x)} | y - q_\theta(x) | dF_{Y|X-x}(y) + (1-\theta) \int_{y \leq q_\theta(x)} | y - q_\theta(x) | dF_{Y|X-x}(y)] \tag{4}$$

而在不同x的條件之下，將有 θ 部分的y小於或等於 $q_\theta(X)$，而有(1-θ)部分的y大於 $q_\theta(X)$，此可看出Y在不同的 θ 下，受x影響程度之差異，我們可設定一線性模型如下：

$$y_t = x_t'\beta + e_t \tag{5}$$

x_t 為k×1之行向量，由k個解釋變數的第t個觀察值所構成，β 為k×1的行向量，為各解釋變數的迴歸係數，e_t 為誤差項。而分量迴歸第 θ 分位數所估計的參數可以透過最小化平均的非對稱加權絕對誤差(the average if asymmetrically weighted absolute errors)求得，非對稱之意是因為對負的誤差給予 θ 的權數，而對正的誤差項給予(1-θ)的權數，因此參數可以透過極小化下列式子而求得:

$$\hat{\beta}_\theta = \arg\min \frac{1}{T}[\theta \sum_{t:y_t > x_t'\beta} | y_t - x_t'\beta | + (1-\theta) \sum_{t:y_t < x_t'\beta} | y_t - x_t'\beta |] \tag{6}$$

而二元分量迴歸與分量迴歸最大的不同，在於分量迴歸的被解釋變數為連續性的變數，而二元分量迴歸的被解釋變數為間斷的兩種屬質變數，如此的變數設定和logit及Probit模型的對於變數的設定相同，用於分析被解釋變數為二元的情形，如勞動參與率，嬰兒初生率等，而本文研究目的則是該公司被列為全額交割類股與否的可能性。

關於二元分量迴歸，我們可以設定以下模型:

$$Q_{y_i^*}(\tau \mid x_i) \equiv F_{y_i^*}^{-1}(\tau \mid x_i) = x_i^{'}\beta(\tau) \tag{7}$$

其中$\tau \in (0,1)$，y^*為真實違約與否之變數，$Q(.)$為分量函數，F()為y^*的分配函數，而真正y^*無法藉由觀測（7）式而直接獲得。我們需要將此變數轉換成另一種可以觀測到的指標變數$y_i = 1(y_i^* \geq 0)$，而可以透過單調轉換將此設定轉換成:

$$g\{Q_{y_i^*}(\tau \mid x_i)\} = Q_{g(y_i^*)}(\tau \mid x_i) \tag{8}$$

而既然$g(y_i^*) = 1\{y_i^* \geq 0\}$也是單調轉換函數，我們可做如此設定:

$$1\{Q_{y_i^*}(\tau \mid x_i) > 0\} = Q_{1\{y_i^* > 0\}}(\tau \mid x_i) \equiv Q_{y_i}(\tau \mid x_i) \tag{9}$$

而根據（9）式則(7)式可改寫為:

$$Q_{y_i}(\tau \mid x_i) = 1\{x_i^{'}\beta(\tau) \geq 0\} \tag{10}$$

(10)式之模型即是Manski(1975,1985)的Maximum Score Estimation.而我們可以透過極小化下列式求得欲估計之參數:

$$b_N^*(\tau) \in \arg\min_b N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\rho_\tau(y_i - 1\{b' x_i \geq 0\}) \tag{11}$$

此處的$\rho_\tau(v) \equiv [\tau - 1\{v < 0\}]v$，為Koender和Bassett(1978)所提及的勾函數(check function)，而Manki(1985)證明了Maximum Score Estimation或二元分量迴歸模型所估計的結果符合了一致性。

第二節 信用風險模型與信用風險模型效力之驗證

一.區別系統分析(discriminate system):

區別分析是早期最常使用的信用評等方法。其主要是根據樣本特性，將樣本歸類於數個事先群組中的某一個群組，並依其樣本值建立區別函數，然後以區別函數來對樣本進行分類評分。

Altman(1968)是首位利用區別分析來做企業失敗分類問題的研究。他運用流動性、獲利能力、財務槓桿、償債能力、以及週轉能力等五大類共計22個財務比率發展模式，在1946-1965 年間選取33 家按各行業別，規模大小分層隨機抽取配對，以及利用多變量區別分析(MDA)技術粹取得五種最具共同預測能力的財務比率，而將這些財務比率結合成綜合性指標，即著名的 Z-Score模型。其估計式如下:

$$Z = 1.2\ X_1 + 1.4\ X_2 + 3.3\ X_3 + 0.6\ X_4 + 1.0\ X_5$$

X_1 = 營運資金/總資產

X_2 = 保留盈餘/總資產

X_3 = 息前稅前盈餘/總資產

X_4 = 權益市值/長期負債帳面價值

X_5 = 銷貨收入/總資產

Altman 利用Z 值將借款人區分成高、低違約風險兩等級，Z 值愈高，表示借款人的違約風險等級愈低。Z-score的分隔區間介於1.81至2.99，低於1.81為財務危機公司且分數愈低代表財務狀況愈差，高於2.99為體質健全之公司，介於兩者之間為模糊地帶，且多為分類錯誤公司所在。而此模型的分類正確率，在財務危機前一年高達95%，財務危機前二年為72%，超過二年以上，則此模型不適用之。

Altman 等人在（1977）將原模型加入二項變數並加以修正，重新再建立一個新模型，稱之為 Zeta 模型，此一新模型的變數包括七個變數：資產報酬率、盈餘穩定性、利息保障倍數、流動比率、累積獲利情形、資本總額與規模，和Z-score相較之下，解釋變數改變了，權益市值、銷貨收入不納入Zeta模型中，而多增加了利息保障倍數、累積獲利、以及資本總額此三項不同以往的變數。最後甚至據此設立一個風險分析機構Zeta Services，利用Zeta 分數衡量受評公司的破產風險。

在Altman之後，在區別分析的發展方面，有Deakin(1972)建立二次式區別函數模型(Quadratic Function)。藉以改善區別效果。其不同於Altman 的觀點是，他分別為每一年建立區別函數，而非如Altman 僅建立一條區別函數。

國內學者何太山（1977）是首先將區別分析應用於銀行放款信用評估上，陳肇榮（1983）同樣也使用區別分析，以民國 67 年至 71 年共 144 家公司為樣本，以財務比率來預測危機公司，其研究結果發現多變量模式較單變量模式為佳。

此外這類模型還有一些限制，例如:區別分析的變數需符合常態假設，但財務比率顯然並不符合這假設。另外，變數需先標準化，且變數的選取無一套理論基礎，以致變數選擇的偏差會對分類能力造成影響。分析結果僅能做成度高低排列、模型無法處理非線性狀況、亦無法處理非量化變數。

二. 迴歸模型:

（一）線性機率模型（Linear Probability Model）

線性機率模型利用 0 與 1 的二元虛擬應變數迴歸模式，以歷史財務比率資料（X_{ij}）為自變數解釋過去的信用記錄，並預測違約可能性。例如，將觀察過去的貸款分成兩群，違約的貸款（$P_i = 1$）以及未違約的貸款（$P_i = 0$），利用線性迴歸模型，代入一組自變數 X_{ij}，表示關於第 i 個借款人的財務資訊，例如槓桿比率或盈餘。迴歸式如下所示：

$$P_i = \sum_{j=i}^{n} \beta_i X_{ij} + \text{error}_i$$

其中βi 指第 j 個變數在解釋過去還款記錄時的重要程度，亦即 Xj 每變動一單位，違約發生的機率增減 βi 單位。銀行可利用此模型計算借款人的預期違約機率，或做為信用評等分類的依據。

Pogue & Soldofsky（1969）即利用線性機率模型，針對1961-1964 年間接受Moody's 評等之公司債，預測其屬於投資級組或投機級組。此法的優點在於簡單直接，只要有借款人目前的財務資料即可。

其最大的缺點是所估計的違約機率可能在落在0~1 的區間外，完全違反機率定義。而且利用一般的最小平方法來處理，所求得的估計量雖滿足不偏性(Unbiased)，但反應變數並不滿足迴歸分析中常態分配的假設、殘差項存在異質變異數的問題。而 Logit 模型及 Probit 模型可以解決上述問題，將預測值限制在 0~1 的區間內。

(二) Logit 模型及 Probit 模型

為避為一般線性機率模型對條件機率的估計值可能落在〔0,1〕之外的嚴重缺陷，研究者改以指定事件發生機率服從某種累積分配，以克服上述缺點。若假設事件發生的機率服從累積 Logistic 分配的條件機率模型就稱為 Logit 模型：

$$P_i = F(Z_i) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-Z_i}} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta x_i)}} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha+\beta x_i}}{1+\mathrm{e}^{\alpha+\beta x_i}}$$

其中 exp 是指數函數，F（Z_i）是貸款的累積違約機率，Z_i是由類似線性機率模型的迴歸式所估計而來。

Ohlson(1980)首先運用Logit模型發展其預測模式。並以1970年至1976年間的上市和上櫃的製造業資料做為樣本，選擇105家破產公司為對象，並隨機選樣

方式，選出2058家正常公司，因此其研究樣本比之前之學者更大。其以9個變數分別建立一年內、二年內及一年或二年內會發生財務危機的Logit預警模型，經由實證發現，三個模型之正確率分別為 96.12%、95.55%與 92.84%。

至於Probit 模型方面，若假設事件發生的機率服從累積常態分配的條件機率模型就稱為Probit 模型。雖然其起始較早(Kaplan & Urwitz,1979)，由於其轉換程序較為複雜,且在實證上無Logistic 模型準確,所以相關研究與Logistic模型相較較少。

陳明賢（1985）利用Probit迴歸與Logit迴歸建立預警模型的學者，發現其準確度較Altman（1968）為佳，黃小玉（1988）運用四種模式（區別分析、線性模式、Probit迴歸、Logit迴歸）比較其預測準確度，發現Logit迴歸較其他三者為佳。

三.KMV市場模型

KMV 信用風險管理模型是由 KMV 顧問公司所發展，該模型認為，資產的市場價值低於負債到期現值時，公司即會發生違約，該模型是依據 Black 與 Scholes（1973）、Merton（1974）的選擇權定價模式，公司若舉債經營，可視為股東向債權人買進一買權，該買權的標的資產價格為該公司之資產價值，履約價為公司所揹負的債務價值，到期日為公司債務的到期日。當公司債務到期時，若公司之資產價值大於債務價值，則代表公司有能力清償債務，公司得以繼續經營，而清償債務後的剩餘部份，為股東所有；若公司之資產價值小於債務價值，則代表公司無清償債務的能力，面臨倒閉。依據選擇權定價模式，公司倒閉的機率就是公司資產價值小於公司所揹負債務價值的機率。

KMV 公司即是以這種選擇權模式的概念，發展出一套估算公司違約機率的模型，其計算的步驟如下：

（1） 估算公司資產的價值及波動度：將股東權益看成選擇權買權的性質，

以股票市值及股票報酬率標準差，反推出資產的隱含價值及隱含波動度。

（2） 計算預期違約率（Expected Default Frequency，EDF）：預期違約機率的定義為「在到期日時，公司的資產價值小於債務價值的累積機率」，根據 Black 與 Scholes（1973）選擇權定價模式，可推導出 EDF 為：

$$EDF_t = N\left[-\frac{\ln\frac{V_0}{X} + (\mu - \frac{\sigma_A^2}{2})\tau}{\sigma_A\sqrt{\tau}} \right]$$

V_0 ：資產的期初價值

X ：債務的價值

μ ：資產價值的瞬間期望報酬率

σ_A^2 ：資產價值的瞬間波動度

τ ：距到期日期間

$N(\cdot)$ ：累積常態分配

前二種所介紹的模式為會計基礎的信用風險模型，多倚賴過去的歷史資料，KMV 模型則是屬於市場基礎的信用風險模型，其 EDF 是採用動態、預測性的即時指標，並非依據過去的資料進行推估，所以相對上更具有「前瞻性」。然而必須要經由上市公司的股價來估算某些參數，故僅能適用於上市公司違約機率的估算。饒多年（2002）利用 KMV 模式計算出違約距離（Distance-to-Default，DD），再以 Logit 迴歸建構 DD 與違約機率之間的關係，發現 DD 對於對於預測 1 年內是否會發生危機事件，有顯著的影響力。林妙宜（2002）、王懷德（2002）也以 KMV 模式估算國內企業的違約情況。

區別分析系統及迴歸模型多建構於會計財務基礎上，都是依賴財務報表資訊，來進行企業體信用風險之衡量分析。而 KMV 市場模型建構於市場價格資訊上；兩者建構基礎不同，對於信用風險衡量的效果也存在差異，見【表 2-1】。

【表 2-1】市場及財務信用風險模型比較

	市場模型 (Market Model)	財務模型 (Financial Model)
說明	利用股票或債卷價格及其波動資訊，對公司未來的償債能力加以估計	利用歷史資料來評估公司，並對公司未來信用償債能力的變化情形加以記錄，如因違約、降等的機率而產生的信用資訊
頻率	每日	每季(年)
即時性	具即時監控反應	預測性佳
預測性	股價使預測能力過於敏感	需另建立預測指標
穩定性	對股價波動過於敏感性者不適用	評等變動較穩定
準確性	高估或低估情況較為頻繁	以評等品質為準
複雜性	修正調整難度較高	修正調整較易
代表模型	1.Merton 選擇權評價法 2.價券價格法	1.Logistic 迴歸模型 2.Probitc 迴歸模型 3.區別分析模型 4.類神經網路模型

資料來源:聯合徵信中心信用月刊

四.信用風險模型效力之驗證與比較

本研究在信用模型間的預測效力比較上,使用林公韻(2005)中的主要兩種方法：CAP 曲線（Cumulative Accuracy Profiles）、ROC （Relative or Receiver Operation Characteristic）。

1.CAPs 曲線（Cumulative Accuracy Profiles）

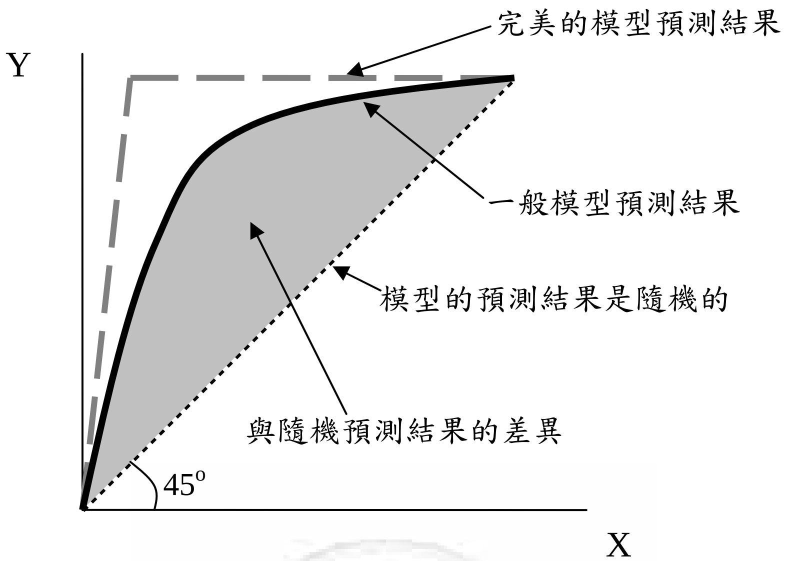
模型間的表現好壞，可以直接從 CAP 的圖形上來看，直接的判定即是圖形上 CAP 曲線越偏向左上方，則該模型的預測效力越好。簡單的來說，CAP 的圖形橫軸為判定違約與否的截斷點(越靠近左邊原點則截斷點越大)，縱軸為預測準確的

累積機率，故如果模型的預出的配適值和真實質相同的話，CAP 曲線會是以縱軸為 100%出發的一條與 X 軸平行的線段。

假設共有（N+D）家公司，其中有 D 家為「違約」公司（即觀察值為 1 的公司），N 家為未違約公司（即觀察值為 0 的公司）。經過模型配適後，每一家公司都會有個模型所配適出的「違約機率」，首先，我們將出事機率由大排到小（即由「最可能出事」的公司依序排至「最不可能出事」的公司），然後，取前 x％（即：(N+D)×x％）的公司數，計算這前 x％家公司中，模型所配適出違約機率為(1-x)％以上，也就是以(1-x)％為臨界值且實際上也是屬於出事公司的數目，佔所有出事公司數目的百分比，令其為 y(x％)。以 x 為橫軸，y(x％)為縱軸，則可繪製出 CAP 曲線，如果模型配適出的情況和真實情況一樣，則曲線在 x%質很小時，y%就會是 100％。

舉例來說，假設現在有 500 家公司（即 500 個觀察值），其中有 50 家為出事公司，450 家為未出事公司，在這個例子中，N＋D＝500，D＝50，N＝450。經過模型配適後，這 500 家公司各有模型配適後的違約機率，將這些違約機率由大排到小之後，取前 5％家公司（即 x=5，代表前 25 家公司），發現模型所配適的違約機率為 95％以上且實際上觀察值也是 1 的公司（即實際上為出事公司）的數目總計有 4 個，這代表當模型以 95％為截斷點（Cut Point）時，模型可以偵測出 8％（$\frac{4}{50}\times 100\% = 8\%$，即 y(5%)=8%）的違約公司；接著再取前 10％家公司（即 x=10，代表前 50 家公司），發現模型所配適的違約機率為 90％以上且實際上觀察值也是 1 的公司（即實際上為出事公司）的數目總計有 9 個，這代表當模型以 90％為截斷點（cut point）時，模型可以偵測出 18％（$\frac{9}{50}\times 100\% = 18\%$，即 y(5%)=18%）的違約公司，如此進行，直到取到 100％（即取完所有 500 家公司）為止，以 x％（即 5％、10％、…、100％）為橫軸，y(x%)（即 8％、18％、…、100％）為縱軸，則可繪製出 CAP 曲線。

【圖 2-1】CAP 曲線



2.ROC 曲線（Relative or Receiver Operation Characteristic）

ROC 曲線的概念與 CAP 曲線概念很像，在討論 ROC 曲線之前，要先定義【表 2-2】中的幾個名詞：

【表 2-2】 交叉分類表

實際情況 / 模型判定	出事公司（$y_i=1$）	未出事公司（$y_i=0$）
出事公司（$\hat{y}_i = F\left(x_i\hat{\beta}^*\right) \geq$ 截斷點）	TP%×D	型二誤差 FP%×N
未出事公司（$\hat{y}_i = F\left(x_i\hat{\beta}^*\right) <$ 截斷點）	型一誤差 FN%×D	TN%×N

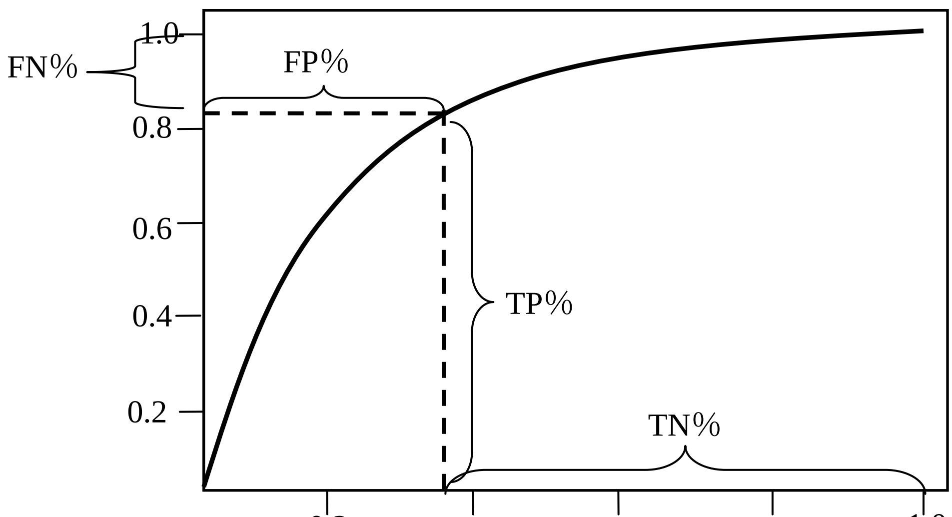
【表 2-2】中 TP 為 True Positive 之意，TP%即實際上違約且模型的估計結果也判定違約的比率；FN 為 False Negative 之意，FN%即實際上違約但模型的

估計結果卻未判定是違約的比率，這種錯誤稱為型一錯誤（Type I Error），在這樣的定義之下，TP%＋FN%＝1。FP 為 False Positive 之意，FP%即實際上未違約但模型的估計結果卻判定為違約的比率，這種錯誤稱為型二錯誤（Type II Error）；TN 為 True Negative 之意，TN%即實際上未違約且模型的估計結果也判定未違約的比率，這樣的定義之下，FP%＋TN%＝1

型一誤差、型二誤差越小則表示模型的預測能力越好，根據不同的截斷點，我們可以得到不同的型一錯誤、型二錯誤，我們可以製作如 <圖 2.2> ROC 曲線 FN%為型一錯誤、FP 為型二錯誤，則如果此二錯誤越小，曲線會越往左上方偏，故如果是預測完全準確的模型，不存在型一錯誤、型二錯誤，則 ROC 曲線 CAP 曲線會是以縱軸為 100%出發的一條與 X 軸平行的線段。

例如:我們依據不同的截斷點，可以得到不同的交叉分類表，而 ROC 曲線就是在繪製 FP%與 TP%之間的關係。即對應 10%、15%、…、100%的型二誤差，找到不同的截斷點 c%，再根據不同的截斷點找到不同的 TP_1%、TP_2%、…、TP_{20}%。以型二錯誤為橫軸，即 5%、10%、15%、…、100%，縱軸為 TP_1%、TP_2%、…、TP_{20}%，則可繪製出 ROC 曲線，如【圖 2-2】。

【圖 2-2】 ROC 曲線



由<圖2.2> ROC曲線來看，一個完美的模型配適出的結果會出現型一誤差以及型二誤差等於零的狀態，如此的ROC曲線將會是在Y軸為1且平行X軸的線段，如同CAP曲線在最佳的狀態下的表示是一樣的。