第三章　理論與迴歸模型

由第二章的文獻回顧得知，大部份檢測收斂假說的實證模型，皆從生產函數出發推導而得。然而，現今愈來愈強調以個體經濟學為基礎的總體經濟學，卻發現此類文獻除 Evans, Green, and Murinde(2002)之外，在生產函數的設定上大多未納入個體理論的觀點。因此，本文採用分析產業常使用之隨機生產邊界模型，並遵循 Evans, Green, and Murinde(2002)的架構，將生產函數設定為較具伸縮性且廣被運用的 translog 型式，使用組合誤差方式額外考慮技術無效率的部份，以此為主軸進行實證分析，不僅探討各國收斂的情況與過去文獻有何不同，也對各國技術效率的部份進行分析比較。

本章共分二節，第一節介紹理論模型，第二節則為迴歸模型的設定。

第一節　理論模型

本節從生產函數出發，將產出成長率分解為三種成份後，接著設定生產函數與技術無效率的型式，最後推導總要素生產力的成長率。

一、總體生產函數與技術效率

令一國總體生產函數表為

$$Y = f(X,t;\beta)e^{w-u}, \tag{3-1}$$

其中 Y 代表實質總產出，$f(\cdot)$為生產函數，亦稱為生產邊界(production frontier)，其中 X 為 $M\times 1$ 要素投入向量，t 為時間趨勢，β 是生產函數中的技術參數行向量，須利用樣本資料推估，e 表自然指數，w 是隨機變數，代表無法控制的隨機因素，此隨機變數假設與時間無關。等號右邊 $f(X,t;\beta)e^{w}$ 一般稱為隨機生產邊界，u 是一個非負值隨機變數且與 w 統計獨立，代表生產技術無效率的程度，其值愈大表示技術無效率程度愈高，導致實際產出 Y 愈低於隨機邊界產出 $f(X,t;\beta)e^{w}$；反之，其值愈小表示技術無效率程度愈低，即實際產出 Y 愈靠近

隨機邊界產出。將 (3-1) 式取自然對數後成為

$$\ln Y = \ln f(X, t; \beta) + w - u, \tag{3-2}$$

由於本文所欲探討的為成長率的變動與變數間的相關性，以及為了消除時間序列資料所具有非定態性質，進而轉換為具定態性，因此本文進一步將各總體變數轉換為成長率形式，

全微分 (3-2) 式後左右兩方再同除以 dt，可得下式：

$$\dot{Y} = T\Delta + \sum_{m=1}^{M} \eta_m \dot{X}_m + TE\Delta, \tag{3-3}$$

式中 $\dot{Y} = (dY/dt)/Y$ 代表產出成長率；$T\Delta = \partial \ln f / \partial t$ 代表技術變動率 (rate of technical change)；η_m 是第 m 生產要素的產量彈性，m = 1,…, M，定義為 $\eta_m = \partial \ln f / \partial \ln X_m$ ；$\dot{X}_m = (dX_m/dt)/X_m$ 代表第 m 生產要素的成長率；$TE\Delta = -du/dt$ 代表技術效率的變動率。由於隨機變數 w 假設與時間無關，故 $dw/dt = 0$。

若，$T\Delta$ >0，表該國發生技術進步，即隨時間經過總產出不斷上升。反之，若 $T\Delta$ <0，該國發生技術退步現象，導致總產出下降。另外，如果 $TE\Delta$ >0，代表該國的技術效率隨時間經過不斷改善，使實際產出逐漸接近其生產邊界 $f(\cdot)$。反之，如果 $TE\Delta$ <0，該國的技術效率逐漸惡化，實際產出逐漸偏離其生產邊界。

二、函數設定

本文將採用具有伸縮性的 translog 型式之生產函數，再加上時間趨勢一次式 (t)、二次式(t^2)及時間趨勢與要素投入的交乘項後，表示如下

$$\ln f(X_{it}, t; \beta) = \beta_0 + \sum_{m=1}^{M} \beta_m \ln X_{mit} + \beta_t t + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{M} \beta_{mk} \ln X_{mit} \ln X_{kit}$$
$$+ \frac{1}{2}\beta_{tt} t^2 + \sum_{m=1}^{M} \beta_{tm} t \ln X_{mit} \tag{3-4}$$

其中下標 i = 1,…, n 和 t = 1,…, T，分別代表國家和時間。而技術無效率的部份，設定為

$$u_{it} = u_i \exp[g(t;\alpha)] = u_i g_{it} \geq 0,^{9} \tag{3-5}$$

其中 u_i 假設是平均數為零，變異數等於 σ_u^2 之非負常態分配隨機變數，表為 $u_i \sim |N(0,\sigma_u^2)|$。exp 為數學自然指數符號，由於自然指數介於零與無限大之間，因此可保證為非負值。$g(\cdot)$ 函數則設定為

$$g(t;\alpha) = \alpha_t t + \frac{1}{2}\alpha_{tt} t^2 \tag{3-6}$$

為了能掌握各國技術效率變化情況，所以在 g(‧) 函數的設定上放入時間趨勢項一次式(t)與二次式(t^2)。α 為待估計參數行向量。

根據 (3-4) 至 (3-6) 式的設定，可以將 (3-3) 式中各項導出，其中技術變動率為

$$T_{it}\Delta = \frac{\partial \ln f}{\partial t} = \beta_t + \beta_{tt} t + \sum_{m=1}^{M} \beta_{tm} \ln X_{mit}, \tag{3-7}$$

第 m 生產要素的產量彈性為

$$\eta_{mit} = \frac{\partial \ln f}{\partial \ln X_{mit}} = \beta_m + \sum_{k=1}^{M} \beta_{mk} \ln X_{kit} + \beta_{tm} t, \tag{3-8}$$

最後，技術效率的變動率為

$$TE_{it}\Delta = -\frac{du_{it}}{dt} = -u_i \left[\frac{\partial g}{\partial t}\right] g_{it} = -u_i g_{it}^{'}, \tag{3-9}$$

式中 $g_{it}' = \left[\partial g / \partial t\right] g_{it}$ ，而 $\partial g / \partial t = \alpha_t + \alpha_{tt} t$ 。

將 (3-7) 至 (3-9) 式代入 (3-3) 式，再加上一個隨機干擾項 v_{it}，假設其符合平均數是零，變異數等於 σ_v^2 的常態分配，即 $v_{it} \sim N(0,\sigma_v^2)$，代表近似誤差，[10] 該式成為迴歸方程式如下：

$$\dot{Y}_{it} = \beta_t + \beta_{tt} t + \sum_{m=1}^{M} \beta_{tm} \ln X_{mit} + \sum_{m=1}^{M} (\beta_m + \sum_{k=1}^{M} \beta_{mk} \ln X_{kit} + \beta_{tm} t) \dot{X}_{mit} + v_{it} - u_i g_{it}^{'}. \tag{3-10}$$

---

[9] 參考 Kumbhakar et al. (1991)、Reifschneider and Stevenson (1991)、Huang and Liu (1994) 和 Battese and Coelli (1995)未考慮時間趨勢的設定，並將其改寫為適用於縱橫資料的型式。

[10] 此處近似誤差主要來自(1)使用(3-4)式代表生產函數，然而真正的生產函數型式未知；(2) 使用(3-5)與(3-6)兩式代表技術無效率，而真正的技術無效率型式未知；(3) 實證分析時所有變數 的改變率均須以間斷近似值取代。

三、 總要素生產力

總要素生產力的變動率（$T\dot{F}P$）定義如下

$$T\dot{F}P = \dot{Y} - \dot{X} = \dot{Y} - \sum_{m=1}^{M} S_m \dot{X}_m \,, \tag{3-11}$$

式中各變數上方若有一點代表變動率，S_m 是第 m 要素的支出份額。[11]將 (3-3) 式代入上式中，經整理後可得到

$$T\dot{F}P = T\Delta + (\eta - 1)\sum_m \frac{\eta_m}{\eta}\dot{X}_m + \sum_m \left(\frac{\eta_m}{\eta} - S_m\right)\dot{X}_m + TE\Delta \,, \tag{3-12}$$

等式右邊的第一項與第四項分別為上一小節所介紹的技術變動率與技術效率的變動率；第二項為規模效果，該項可能為正或負，其中 $\eta = \sum_m \eta_m$ 代表規模彈性，用來衡量規模報酬 (returns to scale) 的特性，其值大於一時，為規模報酬遞增，即規模經濟，等於一為固定規模報酬，小於一為規模報酬遞減，即規模不經濟。由於本研究所使用之模型，已隱含固定規模報酬之假設，故此項為零。

上式等號右邊第三項，反映配置效率對總要素生產力變動率的影響，若某國的要素使用達到配置效率，該項為零；反之，該項可能為正或負。如果有關要素價格資料無法取得，文獻上通常假設該項為零；換言之，假設已達到配置效率。由於本研究面臨相同問題，故亦做相同假設。綜合上述，我們可將總要素生產力的變動分解為技術變動與技術效率的變動這二項決定因素。

---

[11] (3-12)式中 $S_m = w_m X_m / E$ ，其中 w_m 為第 m 要素的價格，E 為要素投入的總支出。

第二節　迴歸模型設定

Evans, Green, and Murinde(2002)亦使用 translog 生產函數，要素投入包含每單位勞動之實質資本 (k，physical capital per unit of labor)、每單位勞動之實質貨幣餘額(m，real money balances per unit of labor)、每單位勞動之人力資本(h，human capital per unit of labor)及每單位勞動之期初所得 y_0 (initial income per unit of initial of labor)四種要素。放入期初所得的原因有二，(1)檢測收斂條件是否成立，(2)為了避免遺漏任何可能被忽略的生產要素。除此之外，由於 Evans, Green, and Murinde(2002)欲瞭解金融市場與人力資本對成長率的相對重要性，亦放入 m 於生產函數中做比較，[12]將迴歸式微分表達為如下的成長率型式：[13]

$$\dot{y}_{it} = \beta_0 + \beta_1 \dot{k}_{it} + \beta_2 \dot{m}_{it} + \beta_3 \dot{h}_{it} + \beta_4 \ln y_{io} + \beta_{11}(\dot{k}_{it} \ln k_{it}) + \beta_{12}(\dot{m}_{it} \ln k_{it} + \dot{k}_{it} \ln m_{it})$$
$$+\beta_{13}(\dot{h}_{it} \ln k_{it} + \dot{k}_{it} \ln h_{it}) + \beta_{14}(\dot{k}_{it} \ln y_{i0}) + \beta_{22}(\dot{m}_{it} \ln m_{it}) + \beta_{23}(\dot{h}_{it} \ln m_{it} + \dot{m}_{it} \ln h_{it})$$
$$+\beta_{24}(\dot{m}_{it} \ln y_{i0}) + \beta_{33}(\dot{h}_{it} \ln h_{it}) + \beta_{34}(\dot{h}_{it} \ln y_{i0}) + \varepsilon_{it} \qquad (3\text{-}13)$$

其中，$\dot{y}_{it} = \ln y_{it} - \ln y_{it-1}$、$\dot{k} = \ln k_{it} - \ln k_{it-1}$、$\dot{m} = \ln m_{it} - \ln m_{it-1}$、$\dot{h} = \ln h_{it} - \ln h_{it-1}$。

由 (3-13) 式，我們發現兩個問題，第一，由於期初所得視為一固定常數，經微分後應消失，然而該文卻仍直接放入期初所得於成長率的迴歸式中，第二，未考慮技術無效率隨時間變化的情形。本文乃根據前一小節所推導出之(3-10)式放入 k、 m、 h 和 y_0 視為固定投入，改寫 Evans, Green, and Murinde(2002)的迴歸式為：

$$\dot{y}_{it} = \beta_t + \beta_{tt} t + \beta_{t1} \ln k_{it} + \beta_{t2} \ln m_{it} + \beta_{t3} \ln h_{it} + \beta_{t4} \ln y_{i0} + \beta_1 \dot{k}_{it} + \beta_2 \dot{m}_{it} + \beta_3 \dot{h}_{it}$$
$$+\beta_{11}(\dot{k}_{it} \ln k_{it}) + \beta_{12}(\dot{m}_{it} \ln k_{it} + \dot{k}_{it} \ln m_{it}) + \beta_{13}(\dot{h}_{it} \ln k_{it} + \dot{k}_{it} \ln h_{it})$$

[12] Hasan and Mahmud(1993)和 Mahumd(1997)將外生貨幣納入 translog 生產函數中後，皆得到支持貨幣為生產函數中重要的要素之一的假說。

[13] Evans, Green, and Murinde(2002)假設生產函數具一階齊次性，故變數資料皆以每單位勞動表示之，本研究亦根據該假設進行迴歸式的設定。

$$+\beta_{14}(\dot{k}_{it}\ln y_{i0})+\beta_{22}(\dot{m}_{it}\ln m_{it})+\beta_{23}(\dot{h}_{it}\ln m_{it}+\dot{m}_{it}\ln h_{it})$$

$$+\beta_{24}(\dot{m}_{it}\ln y_{i0})+\beta_{33}(\dot{h}_{it}\ln h_{it})+\beta_{34}(\dot{h}_{it}\ln y_{i0})+\beta_{t1}t\dot{k}_{it}+\beta_{t2}t\dot{m}_{it}+\beta_{t3}t\dot{h}_{it}$$

$$+v_{it}-u_i g_{it}^{'} \tag{3-14}$$

以上推導方式，使期初所得自然出現於 (3-14) 式中。此外， (3-14) 式的誤差項為v_{it}和$-u_i g_{it}^{'}$兩項所組成，稱之為「組合誤差」(composed error)，其中前者具有雙邊分配，但後者的u_i僅有單邊分配，因此，採用最大概似法估計迴歸係數是較佳的選擇，故須先行推導組合誤差項$\varepsilon_{it}=v_{it}-u_i g_{it}^{'}$的機率密度函數。

經過繁複推導過程，可得到組合誤差項$\varepsilon_{it}=v_{it}-u_i g_{it}^{'}$的機率密度函數 $h(\varepsilon_i)$如下，全部的推導過程置於文末的附錄 1 中。

$$h(\varepsilon_i)=\frac{2}{\sigma_v^{T-1}\sigma}[1-\Phi(A_i)]\prod_{t=1}^{T}\phi\left(\frac{\varepsilon_{it}}{\sigma_v}\right)\exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_{it}g_{it}^{'}}{\sigma_v\sigma/\sigma_u}\right)^2\right], \tag{3-15}$$

式中$\sigma^2=\sigma_v^2+\sigma_u^2\sum_{t=1}^{T}g_{it}^{'2}$ ，$A_i=\sigma_u\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_{it}g_{it}^{'}/\sigma\sigma_v$，而$\phi(\cdot)$與$\Phi(\cdot)$分別是標準常態分配的機率密度和累積分配函數。對數概似函數為

$$\ln L=\sum_{i=1}^{n}\ln h(\varepsilon_i), \tag{3-16}$$

極大化上式即可獲得各係數估計值。

欲計算各樣本國家的技術效率值，須先導出條件機率密度函數 $h(u_i\,|\,\varepsilon_i)$，如下所示：

$$h(u_i\,|\,\varepsilon_i)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}[1-\Phi(A_i)]\sigma_*}\exp\left[\frac{-1}{2}\left(\frac{(u_i+\sigma_u^2\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_{it}g_{it}^{'}/\sigma^2)^2}{\sigma_u^2\sigma_v^2/\sigma^2}\right)\right], \tag{3-17}$$

此式其實就是一個常態分配隨機變數 $N(\mu_{*i},\sigma_*^2)$ 乘以$\left[1/(1-\Phi(A_i)\right]$ ，其中

$\mu_{*i} = -\sigma_u^2 \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_{it} g_{it}^{'} / \sigma^2$ ，$\sigma_*^2 = \sigma_u^2 \sigma_v^2 / \sigma^2$ ，故可證明 $A_i = -\mu_{*i} / \sigma_*$ ；換言之，$h(u_i | \varepsilon_i)$ 是一個從零以下被截斷常態分配隨機變數的機率密度函數，請參考 Battese and Coelli (1992)、Huang and Liu (1994) 和 Kumbhakar and Lovell (2000)。根據上式可求算 u_i 的條件平均數為

$$E(u_i | \varepsilon_i) = \mu_{*i} + \sigma_* \frac{\phi(-\mu_{*i} / \sigma_*)}{1 - \Phi(-\mu_{*i} / \sigma_*)}. \quad (3\text{-}18)$$

[14]

在文獻上有關 u_i 的估計式 $\hat{u}_i$ ，常以 (3-18) 式代表之。一旦得到 $\hat{u}_i$ ，即可得技術無效率 u_{it} 的估計式為

$$\hat{u}_{it} = \hat{u}_i \hat{g}_{it}, \quad (3\text{-}19)$$

而技術效率 TE_{it} 的估計式，可表示為如下：

$$\widehat{TE}_{it} = \exp(-\hat{u}_{it}). \quad (3\text{-}20)$$

綜合上述，我們將採用最大概似法，估計迴歸係數，利用係數估計值代入 (3-18) 至 (3-20) 式中，即可計算出各國的技術效率值。

[14] (3-16) 式的眾數 (mode) 亦可做為 u_i 的點估計值式，即

$$M(u_i | \varepsilon_i) = \mu_{*i}, \quad 若 \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_{it} g_{it}^{'} \geq 0.$$
$$= 0, \quad 其他.$$