# 第二章 理論模型

## 第一節 緒論

在理性預期形成與經濟體系沒有出現隨機干擾的環境下，如果所有政府政策的變化也都是確定的(即沒有隨機的性質)，則民眾皆可準確地預測相關的經濟變數；此時，理性預期模型就相當於完全預知(perfect foresight)模型。

完全預知模型最重要的內涵在於，它能夠處理事先宣告的政策；明確地說，政府未來將要實施的政策一經宣布，就會立即嵌入民眾的情報集合內，進而改變民眾的預期。民眾透過預期的修正，順勢將改變目前的行為模式，因而經濟體系必將隨之調整。這種政策只是宣告但尚未執行，就已經引發經濟體系調整的結論，是完全預知模型之所以讓人驚豔之處。[1]

## 第二節 模型介紹

本文從小型開放經濟的觀點，分析本國貨幣政策具不確性時，其政策宣告對於本國產出及匯率的衝擊效果。依據「政策無效定理(policy ineffectiveness theorem)」，任何有系統而被民眾掌握的總體經濟政策皆無法左右產出水準，只有未被民眾預料到的政策變動方能影響產出，此結論不僅有令人耳目一新的經濟邏輯，且有強烈的政策涵意，因此貨幣當局為使政策發揮功效，的確有誘因實施不確定政策。準此，本文的不確定貨幣政策內容為：宣布未來$T$期將調整國內利率，但調整幅度並未明確宣告，此時未來利率視為未知參數，完全預知的完美狀態不再成立。本文採 Fleming 的「資本不完全移動」假定，且央行政策的不確定因素主要為未來的利率調幅，即預期利率可視為在貨幣市場隨機干擾項，依據

[1] 有關完全預知宣示效果的理論發展，請參見賴景昌(1994，第三章)。

Poole(1970)貨幣指標原則，央行藉由控制名目貨幣的供給量來釘住名目利率，以達成穩定產出水準[2]；更明確地說，央行採行名目「利率指標(interest rate targeting)」政策；據此，名目貨幣的供給數量為內生變數，名目利率為外生給定變數。各時間點的先後順序如下圖示：

| | 0 | $T$ |
|---|---|---|
| 第一階段<br>政策宣示前，無不確定因素存在，屬完全預知狀態 | 第二階段<br>央行實行不確定政策，民眾對未來利率或執行時機產生預期 | 第三階段<br>政策確實被執行，所有情報完全揭露 |

在第一階段時，本國中央銀行未實施任何政策，經濟體系處於靜止均衡狀態(steady state)，體系內的變數皆恒定不變，因此預期值必然等於實際值；換言之，民眾的預期具有完全預知的特質。當央行在第 0 時宣示不確定政策後，社會大眾在第二階段的期初(時間$t$趨近$0^+$)，將立即對未來$T$時的「本國利率」產生一個預期值($r^E$)，其背後所隱含在政策確實被執行前，民眾已規劃一條完整的預期動態調整路徑，來因應央行的不確定宣示，因央行的政策不確定(調整幅度未知)，所以在缺少部分訊息下，此階段模型設定為「非完全預知」；直到央行在$T$時確實施行政策，真實利率指標在此刻被揭露，理性預期下不確定因素消失，民眾無須對政策變數作預測，是故在所有情報皆已充分掌握，本文模型回到完全預知狀態。

本文以 Fleming(1962)的對數線性模型為分析架構，唯一的變動就是將物價緩慢調整修改成產出有緩慢調整的特性，[3]即產出會隨商品市場失衡而調整。據

[2] 資本完全移動：$\beta \to \infty$，$r = r^*$ 無法執行利率指標。

[3] 若將模型改為物價緩慢調整，則利率指標政策會經常出現 Lucas 所稱的物價未定問題(Price In-determinance Problem)，$P$ 和 $e$ 有無窮多組解，總合需求線為垂直的情況。

此，我們可將小型開放經體系的模型表達於底下格式：[4]

$$\dot{y}=\pi\ [u+\alpha\, y-\sigma\, r+(\delta\, e-\theta\, y)-y]\ ；\pi>0,\alpha>0,\sigma>0,\delta>0,\theta>0 \quad (2.1)$$

$$m=-\lambda\, r+\phi\, y\ ；\lambda>0,\ \phi>0, \quad (2.2)$$

$$\mu(\delta\, e-\theta\, y)+\beta(r-r^{*}-\dot{e}^{E})=0\ ；\quad \beta<\infty \quad (2.3)$$

以上 3 個方程式當中，僅有內生變數產出水準 $y$ 、本國匯率 $e$ ，與名目貨幣供給 $m$ 以自然對數型式表示，其他模型變數皆無取自然對數，這些變數代表的經濟涵意分別為：

$r\equiv$ 本國名目利率

$u\equiv$ 自發性總合需求

$\dot{e}^{E}\equiv$ 匯率的預期變動率

$\beta\equiv$ 資本帳部門的移動程度

$r^{*}\equiv$ 國外利率

$\pi\equiv$ 商品市場之調整速度

第(2.1)式反映的是商品市場動態調整方程式，該式設定商品市場出現超額需求時，下一時刻均衡產出增加；若總合需求小於總合供給時，下一時刻所得則會下降。第(2.2)式表示貨幣市場均衡條件，即為實質貨幣供給等於實質貨幣需求，並將物價單位化且固定為 1，實質貨幣需求為利率的減函數，為所得的增函數；第(2.3)式表示外匯市場均衡方程式，該式設定經常帳餘額係外國商品與本國商品相對價格的增函，資本帳餘額則是本國債券與外國債券相對報酬率的增函數。值得特別強調的是，$\beta$ 值的大小反映了資移動程度。本文設定資本不完全移動的條件下，$\beta$ 為一個有限值(finite value)，有別於 Dornbusch(1976)假定 $\beta$ 為一個無窮的正值。

---

4 詳細的推導過程，請參見附錄一。

## 第三節　模型推導

在模型推導之前，我們必須闡述兩個本文的基本立場，第一、「本國央行政策宣告前」與「央行確實執行貨幣政策後」為完全預知狀態，所有情報皆已掌握，沒有不確定性因素，據此，理性預期值必須等於經濟體系真正運行的實際值；第二、從央行宣示不確定性政策後至貨幣當局真正貫徹利率指標政策之前，此一時段屬於「非完全預知」狀態，主要原因為，社會大眾缺乏某些關鍵訊息(例如：利率指標、政策執行之時間點)，而有情報集合不具完整的情況，政策的不確性誘使民眾需對經濟變數或關鍵訊息做預期。已知理性預期具不偏性、充分運用情報、隨機因素消失即為完全預知狀態[5]及其解值分成可被預料(anticipated)的部分和沒有被預料到的部分等特質，因此我們在不確定的階段，採用理性預期作為本文的預期方式。

首先，我們先對第(2.1)式至第(2.3)式的所有經濟變數取期望值，且根據利率指標原則將貨幣視為內生變數，利率視為外生變數。此外，為求長期靜止均衡(steady state)解值，令 $\dot{y}^E = 0 = \dot{e}^E$ ，且將內生變數放置等號右側整理如下：

$$\delta\, e^E + (\alpha - \theta - 1)\, y^E = -u + \sigma\, r^E \tag{2.4}$$

$$-\phi\, y^E + m^E = -\lambda\, r^E \tag{2.5}$$

$$\mu\,\delta\, e^E + (\mu\,\theta) y^E = -\beta\,(r^E - r^*) \tag{2.6}$$

其中，

$$\Delta_1 = \det\begin{pmatrix} \delta & \alpha-\theta-1 & 0 \\ 0 & -\phi & 1 \\ \mu\delta & -\mu\theta & 0 \end{pmatrix} = \mu\,\delta\,(\alpha - 1) < 0 \tag{2.7}$$

5 未來利率為本文的不確定因素，相當於隨機模型下的干擾項。

再依據第(2.4)式至第(2.6)式可以得到在預期下的靜止均衡狀態值：

$$\tilde{e}^E = \frac{1}{\mu\delta(\alpha-1)}\left\{ [\,\mu\theta\sigma - \beta(\alpha-\theta-1)\,]\,r^E + \beta\,(\alpha-\theta-1)\,r^* - \mu\theta u \right\} \tag{2.8}$$

$$\tilde{y}^E = \frac{\mu\sigma+\beta}{\mu(\alpha-1)}\,r^E - \frac{\beta}{\mu(\alpha-1)}\,r^* - \frac{u}{\alpha-1} \tag{2.9}$$

$$\tilde{m}^E = \frac{1}{\mu\delta(\alpha-1)}\left\{ \delta[\lambda\mu(\alpha-1)+\phi(\beta+\mu\sigma)]\,r^E - \delta\,\phi\,\beta\,r^* - \phi\,\mu\,u\,\delta \right\} \tag{2.10}$$

將以上三式與既有的宣示效果文獻[Dornbusch(1976), Gray and Turnovsky (1979),及 Wilson(1979)]加以比較可知：在完全預知的假定下，產出及匯率的長期均衡值是實際利率的函數；但引入不確定性之後，預期產出與預期匯率的長期均衡值則是預期利率的函數。此外，值得注意的是本文模型有 3 條方程式，分別代表商品市場、貨幣市場及外匯市場之均衡條件，但明顯可從上方的行列式元素位置看出：[6] $a_{13}=a_{33}=0$ 和 $a_{23}=1$；也就是說，雖然經濟體系依照此 3 條方程式運行，但在本文中只須引用其中 2 個市場均衡條件，即可決定 2 個內生變數，亦決定整經濟均衡點。亦可將第(2.1)式與第(2.3)式做預期且簡化如下：[7]

$$\dot{e}^E = \frac{\mu\delta}{\beta}\,e^E + \frac{-\mu\theta}{\beta}\,y^E + (r^E - r^*) \tag{2.11}$$

$$\dot{y}^E = \pi\delta\,e^E + [\,\pi(\alpha-\theta-1)]\,y^E + [\,\pi(u-\sigma\,r^E)] \tag{2.12}$$

令 $s_1, s_2$ 為本文的特性根，我們可使用特性根與係數的關係，來判別兩特性根的正負號：

$$s_1 + s_2 = trace(\Delta_1) = \frac{\mu\delta}{\beta} + \pi\left(\alpha-\theta-1\right) \tag{2.13}$$

---

6 $$\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

7 根據理性預期定義：變數的主觀猜測值等於該變數於相關經濟理論的客觀條件期望值，預期值為一種平均的概念，當預期匯率變動率為時間函數，且將任一時間 $t$ 值帶入預期變數，即可變成已知常數，因此在不確定性下採理性預期(rational expectation)和完全預知的動態調整路徑雷同。

$$s_1 \cdot s_2 = \det(\Delta_1) = \frac{\mu\delta\pi}{\beta}(\alpha - 1) < 0 \tag{2.14}$$

從上一式可明顯知道，本文模型有一正根及一負根，因而經濟體系具有馬鞍安定(saddle point stability)的特質，在分析上為求方便操作，我們將其設定：$s_1 < 0 < s_2$；一般要求匯率必須為「跳躍變數(jump variable)」，主要原因為在金融市場裡，匯率具前瞻性質，是一種貨幣交換或買賣的相對價格，其隨市場上當期供給及實際需求共同決定，它可隨著每期市場上，不同供給量和需求量決定不同價格，而價格可以隨時波動，自然在每一時間點上的匯率可任意跳動，是故匯率在兩差距極小的時點，且有瞬間改變的能力。至於在本文的產出變數設定為「狀態變數(state variable)」，主要原因不外乎當期的產出水準和上一期產出水準有密不可分的關係；簡單來說，從事生產活動的硬體設備通常無法在極短時間內大幅度調整，前後兩期機器存量的調整速度相較於資本移動速度明顯緩慢許多；據以，當期產出水準會受前一期產出(或機器數量)影響。故前後兩期時間差趨近零時，產出具緩慢調整的特質，我們適切地將所得設為狀態變數。

由第(2.7)式可知矩陣的行列式值為負，代表模型有一正根及一負根，這樣計算結果同時符合本文的設定，一個跳躍變數搭配一個正根，模型要有唯一解的必要條件為：跳躍變數之個數須和正特性根(root)的個數相同。[8]根據先前的說明，我們可先由外匯市場與商品市場之均衡條件計算出匯率與所得的解，再將所得帶入貨幣市場，即可得到 3 個內生變數的一般解：[9]

---

[8] 正根的數目大於跳躍變數個數，則模型無解；正根的數目小於跳躍變數個數，模型會有無限多組解。

[9] $x = \tilde{x} + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$

$y = \tilde{y} + \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} A_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} A_2 e^{\lambda_2 t}$

$$e^E = \tilde{e}^E(r^E) + A_1\,\mathrm{e}^{s_1 t} + A_2\,\mathrm{e}^{s_2 t} \tag{2.15}$$

$$y^{\mathrm{E}} = \tilde{y}^E(r^E) + \frac{-s_1\beta + \mu\delta}{\mu\theta} A_1\,\mathrm{e}^{s_1 t} + \frac{-s_2\beta + \mu\delta}{\mu\theta} A_2\,\mathrm{e}^{s_2 t} \tag{2.16}$$

$$m^{\mathrm{E}} = -\lambda r^E + \phi\left\{\tilde{y}^E(r^E) + \frac{-s_1\beta + \mu\delta}{\mu\theta} A_1\,\mathrm{e}^{s_1 t} + \frac{-s_2\beta + \mu\delta}{\mu\theta} A_2\,\mathrm{e}^{s_2 t}\right\} \tag{2.17}$$

第(2.15)式與第(2.16)式之等號右邊第一項為聯立微分方程的特解(particular solution)，該解即為各個變數的長期均衡值，文獻將它稱之為市場基要(market fundamentals)；另外，兩式等號右邊的第二項及第三項則為聯立微分方程的齊次解(homogeneous solution)，我們將它稱之為投機幻泡(speculative bubbles)。在 $t = 0^+$ 時，民眾採理性預期下的動態調整方式如下：

$$\begin{aligned} e_t^E &= \tilde{e}^E(r_0) && t = 0^- \\ &= \tilde{e}^E(r_0) + A_1 \mathrm{e}^{s_1 t} + A_2 \mathrm{e}^{s_2 t} && 0^+ \le t \le T^- \\ &= \tilde{e}(r^E) + A_1^* \mathrm{e}^{s_1 t} + A_2^* \mathrm{e}^{s_2 t} && T^+ \le t < \infty \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} y_t^E &= \tilde{y}^E(r_0) && t = 0^- \\ &= \tilde{y}^E(r_0) + \frac{-s_1\beta + \mu\delta}{\mu\theta} A_1 \mathrm{e}^{s_1 t} + \frac{-s_2\beta + \mu\delta}{\mu\theta} A_2 \mathrm{e}^{s_2 t} && 0^+ \le t \le T^- \\ &= \tilde{y}^E(r^E) + \frac{-s_1\beta + \mu\delta}{\mu\theta} A_1^* \mathrm{e}^{s_1 t} + \frac{-s_2\beta + \mu\delta}{\mu\theta} A_2^* \mathrm{e}^{s_2 t} && T^+ \le t < \infty \end{aligned} \tag{2.19}$$

依據第(2.15)式及第(2.16)式，我們可知預期馬鞍路徑(saddlepoint stability) $SS^E$ 線 $(A_2 = 0)$ 與不安定手臂(unstable arm) $UU^E$ 線 $(A_1 = 0)$ 的斜率分別為：

$$\left.\frac{y^E - \tilde{y}^E}{e^E - \tilde{e}^E}\right|^{SS^{\mathrm{E}}} = \frac{-s_1\beta + \mu\delta}{\mu\theta} > 0 \tag{2.20}$$

$$\left.\frac{y^E - \tilde{y}^E}{e^E - \tilde{e}^E}\right|^{UU^{\mathrm{E}}} = \frac{-s_2\beta + \mu\delta}{\mu\theta} \gtrless 0 \tag{2.21}$$

欲瞭解預期匯率及預期產出的明確調整路徑，必須先求算 $A_1, A_2, A_1^*$ 的數值。依據理性預期的前瞻性特質，既然民眾已經知道 $T$ 時的利率將改變，理性的民眾將會事前有所因應；因此，在政策執行前後的瞬間，預期匯率不會出現跳動情況，否則將出現資本利得或損失。此外，根據產出緩慢調整的特性，在政策宣告和政策執行前後瞬間，產出不會出現跳躍現象；綜合上述我們將利用理性預期的連續條件、模型收斂必要條件，以及產出緩慢調整的特性，可求得待解參數 $A_1, A_2, A_1^*$ 數值：

$$e_{T^-}^E = e_{\mathrm{T}^+}^E \tag{2.22}$$

$$A_2^* = 0 \tag{2.23}$$

$$y_{0^-}^E = y_{0^+}^E \tag{2.24}$$

$$y_{T^-}^E = y_{T^+}^E \tag{2.25}$$

將第(2.23)式帶入第(2.22)式和第(2.25)式，則矩陣排列如下：

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{s_1T} & \mathrm{e}^{s_2T} & -\mathrm{e}^{s_1T} \\ \dfrac{s_1\beta-\mu\delta}{\mu\theta} & \dfrac{s_2\beta-\mu\delta}{\mu\theta} & 0 \\ -\dfrac{s_1\beta-\mu\delta}{\mu\theta}\mathrm{e}^{s_1T} & -\dfrac{s_2\beta-\mu\delta}{\mu\theta}\mathrm{e}^{s_2T} & \dfrac{s_1\beta-\mu\delta}{\mu\theta}\mathrm{e}^{s_1T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_1^* \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\mu\theta\sigma-(\alpha-\theta-1)}{\mu\delta(\alpha-1)}(r^E-r_0) \\ 0 \\ \dfrac{\mu\sigma+\beta}{\mu(\alpha-1)}(r^E-r_0) \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

利用 *Cramer's* 法則可求算出 $A_1$, $A_2$, $A_1^*$ 的數值，它們分別為：

$$A_1 = \frac{1}{\Delta}(r^E - r_0)\left(\frac{s_2\beta - \mu\delta}{\mu\theta}\right)\mathrm{e}^{s_1 T}P \tag{2.27}$$

$$A_2 = \frac{-1}{\Delta}(r^E - r_0)\left(\frac{s_1\beta - \mu\delta}{\mu\theta}\right)\mathrm{e}^{s_1 T}P \tag{2.28}$$

$$A_1^* = \frac{1}{\Delta}(r^E - r_0)\left\{\begin{array}{l}\left(\dfrac{\mu\sigma + \beta}{\mu(\alpha - 1)}\right)\left[\dfrac{s_2\beta - \mu\delta}{\mu\theta}\mathrm{e}^{s_1 T} - \dfrac{s_1\beta - \mu\delta}{\mu\theta}\mathrm{e}^{s_2 T}\right] \\ + \left(\dfrac{s_1\beta - \mu\delta}{\mu\theta}\right)\left(\dfrac{s_2\beta - \mu\delta}{\mu\theta}\right)\dfrac{\mu\theta\sigma - \beta(\alpha - \theta - 1)}{\mu\delta(1 - \alpha)}(\mathrm{e}^{s_2 T} - \mathrm{e}^{s_1 T})\end{array}\right\} \tag{2.29}$$

其中，

$$\Delta = \det[A] = \frac{\beta(s_2 - s_1)}{(\mu\theta)^2}(s_1\beta - \mu\delta)\,\mathrm{e}^{(s_1 + s_2)T} < 0 \tag{2.30}$$

$$P = \frac{s_1\beta\mu\theta\sigma - s_1\beta^2(\alpha - \theta - 1) + \beta\mu\delta(\alpha - 1)}{\mu^2\theta\delta(\alpha - 1)} \quad > \quad 0 \tag{2.31}$$

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{\Delta}(r^E - r_0)\frac{\beta(s_2 - s_1)}{\mu\theta}\mathrm{e}^{s_1 T}P \tag{2.32}$$

故我們將 $A_1$ 、 $A_2$ 數值代回第(2.18)式與第(2.19)式，即可獲得在不確定期間，預期匯率和預期產出之修正前預期調整路徑，本文以上標「$E$」表示修正前；在下一章我們利用經濟邏輯，連結「政策宣示後」與「政策確實執行後」之預期動態路徑，以上標「$EX$」重新表示修正後的預期路徑，另外，我們預告 $A_1$ 、 $A_2$ 參數值，將在本文第四章利率調幅不確定性政策中，在分析上扮演關鍵性角色。