2 文獻回顧

一般而言, 金融性的時間序列資料如股票報酬與匯率總體等, 會隨時間變化而變化。一個優良的時間序列模型, 要能夠充分的解釋現實資料上所發生的現象, 並且要能幫助使用者正確地推論與預測。關於財務的時間序列模型, 一開始的發展主要著重在資產的條件平均值, 也就是一階動差的概念。隨著風險與不確定因素在經濟理論中漸漸扮演重要的角色, 大量的文獻發現數列的變異數與共變數陣並不是固定的, 而是隨著時間而改變。根據大部分的資產定價論, 風險貼水會與資產未來報酬, 和市場投資組合, 或消費成長率之間的共變異數有關。爲了實證上的應用與理論的發展, 需要一個更合理的模型來配合。將二皆動差納入模型內, 並加以解釋, 其中當屬 Engle (1982) 的 ARCH 模型, 其打破傳統計量方法中同質變異數的設定, 假設條件變異數是過去觀察值平方的函數。ARCH 爲計量模型開啓新頁, 其後所引伸出來的模型, 多達十餘種如: GARCH, EGARCH, IGARCH,$\cdots$。

與 ARCH 模型不同的另一種設定, 爲 Taylor (1982) 所提出。其假設變異數爲一種隨機過程, 是由無法觀察或隱藏變數 (latent variable) 所決定。文獻上稱爲隨機波動模型簡稱 SV 模型。SV 模型提供一個較 ARCH 更有彈性, 更貼近現實狀態的模型設計。基本上他爲一個具有兩個隨機衝擊的模型, 一個在觀察方程式, 另一個則在波動方程式。觀察誤差用來界測量及抽樣的誤差, 而波動方程式的隨機衝擊項用來解釋波動的動態過程,

模型的設定不同, 就會有不一樣的優缺點, Taylor (1994), 與 Shephard (1996) 針對 SV 與 ARCH 作了些比較, 認爲 SV 有個相較於 ARCH 的優點,

- ARCH 模型雖然在單變數模型較容易處理, 但延伸到多變數模型時, 會產生參數過多的問題,SV 的模型雖然估計較困難, 再近幾年電腦計算能力快速提升之下, 以模擬的方式來估計, 已沒那麼困難。且也可很容易的將之延伸到多變數模型。

- 許多理論, 均假設某些無法觀察到的波動或隱藏變數會影響資產報酬。引起波動的原因可能因爲交易量隨著每天改變, 而交易量的大小取決於流通於市場上的所有訊息。一旦有新訊息的產

生, 市場會開始調整, 市場上的參與者會重新評估他們的資產, 並且從事交易來達到另一個新的均衡 , Clark (1973) 假定訊息流通爲服從對數常態隨機過程, 而將訊息視爲一項變數。這些模型中, 對於引起價格波動的來源, 就是新訊息的產生。

- 在財務或經濟理論的散佈模型, 用以捕捉隨著時間而變化的波動, 然而隨機波動的設定可以滿足這樣的要求。且 SV 模型可以用來描述交易量與波動的相關現象。

既然計量模型希望能找出在資料身後服從的規律, 所以不管模型的建構是如何, 其無非都是要解釋資產報酬的一些基本特性 (stylized facts), 例如: (1) 資產的報酬率具有高狹峰或厚尾分配的現象, (2) 波動群聚, (3) 槓桿效果, (4) 波動共移性, (5) 資產間的相關性因時而異, 在這方面, ARCH 模型的研究已經廣泛被討論研究, 而 SV 模型先前討論的文獻比較少, 但近幾年許多對許多根據基本設定而擴充的 SV, 也證明能解釋財務上面的幾個性質, 我們在下一節將對不同設定, 所能解釋的現象作說明。

2.1 單變量SV

SV 模型定義爲:

$$y_t = \exp(h_t/2)\varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1),$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi h_t + \sigma_\nu \eta_t, \qquad \eta_t \sim N(0,1)。$$

其中, y_t 爲在 t 期持有的資產報酬; h_t 爲在第 t 期對數化後的波動; μ 可視爲波動的固定水準值; ϕ 爲波動的持續程度; 而 σ_ν^2 則爲爲波動的變異數。$\{\varepsilon_t, \eta_t\}$ 爲互相獨立的標準常態分配。如果 $|\phi| < 1$ 則服從一個恆定的 AR(1) , 常態的隨機過程; 如果 $\phi = 1$, 則 h_t 服從隨機漫步過程。Clark (1973) 解釋 h_t 爲在金融市場無法觀察也無法預料到的新訊息, 因此將 h_t 視爲隱藏變數。

SV 模型符合實證上發現資產報酬的一些性質。首先, 假設對數常態分配符合資產報酬的變異數右偏的現象。另外我們也可以求出 y_t 的動差與 y_t 非條件分配的性質。如果 $|\phi| < 1$, 則可以求得 h_t

的非條件平均數與變異數.

$$\mu_h = \mathrm{E}(h_t) = \frac{\mu}{1-\phi}, \qquad \sigma_h^2 = \mathrm{Var}(h_t) = \frac{\sigma_\nu^2}{1-\phi^2}。$$

由於 ε_t 是常態隨機變數, 因此若 h_t 爲一恆定的隨機過程, 又 y_t 是兩個穩定的隨機過程相乘, y_t 也會是一個恆定的隨機過程。ε_t 是一個對稱的分配, 所以 y_t 的單數階動差爲零, 偶數階動差可由對數常分配求出, y_t 的 r 階動差爲:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(y_t^r\right) &= \mathrm{E}\left(\varepsilon_t^r\right)\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{r}{2}h_t\right)\right)\\ &= \left[\frac{r!}{2^{r/2}(r/2)!}\right]\left[\exp\left(\frac{r}{2}\mu_h + \frac{r^2}{8}\sigma_h^2\right)\right]。\end{aligned}$$

我們可以求出 y_t 的二階動差 $\mathrm{E}\left(y_t^2\right) = \exp\left(\mu_h + 1/2\sigma_h^2\right)$ 與的四階動差 $\mathrm{E}\left(y_t^4\right) = 3\exp\left(2\mu_h + 2\sigma_h^2\right)$ 進一步可以得 y_t 的峰態系數 $\mathrm{E}\left(y_t^4\right)/\left[\mathrm{E}\left(y_t^2\right)\right]^2 = 3\exp\left(\sigma_h^2\right) \geq 3$。這表示 SV 模型中 y_t 的非條件分配爲厚尾的分配, 有助於解釋時間序列資料高峽峰的現象。

文獻上有許多對基本模型的擴充, Liesenfeld (2003) , 與 Koopman (1998) 認爲觀察值的平均數不一定要爲零, 可爲其他解釋變數的函數, 同樣的, h_t 雖然爲不可見的狀態變數, 但其可能爲其他可見變數的函數, 模型可改爲

$$y_t = x'\gamma + \exp(h_t/2)\varepsilon,$$

$$h_{t+1} = \mu + z'\alpha + \phi h_t + \sigma\eta_t。$$

Chib et al. (2002) 則在模型中的波動方程式中加入跳躍項 $k_t q_t$, 用來解釋報酬短暫、不規則的跳動。另外 Jacquier (2004) 則放鬆 $\{\varepsilon_t, \eta_t\}$ 相關係數爲零的假設。如果 ε_t 與 η_t 的相關係數爲負, ε_t 的一個短暫的下降, 或者說報酬的負衝擊, 傾向使 η_t 增加, 則 h_{t+1} 也因此而增加。這可以爲股票市場的槓桿效果作解釋, 即股票價格與股票的波動變化有負相關的傾向, 在相同幅度的衝擊之下, 壞消息造成的波動會比好消息來的大。

SV 模型雖然差不多與 ARCH 同時間因被提出來, 但他直到近幾年, 才被廣泛的應用。原因在於模型中的參數估計非常困難。他不像 ARCH 一樣能夠容易的計算出概似函數, SV 模型中的概似函

數包含隱藏變數, 且觀察的樣本一般非常的多, 所以很難將隱藏變數積分掉。也因爲概似函數沒有封閉解, 參數的估計, 也就沒有制式解法。早期關於 SV 的文獻, 大都著墨於參數的估計方法如: 一般化動差估計法 (GMM) , 準最大概似估計法 (QML) , 有效重要抽樣法 (EIS) , 與馬可夫鏈蒙地卡羅 (MCMC) 法等等。近幾年的文獻普遍認爲 MCMC 估計法, 優點較多且效率高。以 MCMC 法估計 SV 模型時把隱藏變數 h_t 與 $\theta = (\mu, \phi, \sigma)$ 一起視爲要估計的參數, 可以避免計算麻煩的概似函數 $f(y_t|\theta) = \int f(y|h,\theta)f(h|\theta)dh$, 而且使聯合事後分配 $\pi(h,\theta|y)$ 容易模擬。我們可藉著對條件分配 $f(h|y,\theta)$ 與 $f(\theta|y,\ h)$ 疊代抽樣建構出一個馬可夫鏈, 來模擬出目標分配, 也就是 $\pi(h,\theta|y)$ 。從這個聯合事後分配中可以求得 $\pi(\theta|y)$, 與 $\pi(h|y)$ 。邊際分配 $\pi(\theta|y)$ 可以進一步用來估計與推論 SV 模型的參數; 而邊際分配 $\pi(h|y)$ 可以對無法觀察的波動, $h = (h_1, ..., h_t)$ 做過濾, 平滑與預測。

2.2 多變量SV

不僅是實證上或是理論的需要, 多變量模型在財務上是非常重要的, 一方面, 在許多的財務決策如資產配置, 風險控管, 或是資產定價, 都需將資產間的相關性考量進去, 且已經有需多的文獻顯示, 財務市場的波動, 是跨市場跨資產的, 或者說財務資料是有共移性或外溢效果的, 故研究資產間的相關係數的變化過程, 成爲財務研究上很重要的課題。多變量 GARCH 在這方面的研究也很多, Bauwens et al. (2004) 有詳細的文獻回顧。然而因爲在估計上的困難, 使得其模型假設條件相關係數是定值。Engle (2001) 試圖放寬這個假設, 但只能做到雙變量。多變量隨機波動模型, 因爲本身設定不同, 其資產的相關係數, 是因時而變的, 及假定每個時點間的相關係數, 其背後本身的參數是不一樣的。雖然 MSV 對資料本身的限制比較少, 然而多變量隨機波動模型在實證方面的文獻也是近幾年才陸續出來。第一個 MSV 由 Harvey, Ruiz, Shephard (1994) 提出, 其基本設定爲

$$\mathbf{y}_t = \mathrm{diag}(\exp(\mathbf{h}_t/2))\boldsymbol{\varepsilon}_t, \qquad i = 1, ..., n, \qquad t = 1, ..., T,$$

$$\mathbf{h}_t = \boldsymbol{\mu} + \mathrm{diag}(\phi)(\mathbf{h}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\eta}_t, \qquad , i = 1, ..., N,$$

$\mathbf{y}_t = (y_{1t}, y_{2t}, ...y_{nt})'$, 表資產 i 在時間 t 的觀察值, 而 $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{1t}, ...\varepsilon_{nt})$, 與 $\boldsymbol{\eta}_t = (\eta_{1t}, ...\eta_{nt})$ 爲平均數等於零, 共變數矩陣分別爲 Σ_ε , Σ_η 的多變量常態分配。資產間的報酬與波動, 是有相關性的。如果認爲常態分配不夠厚尾, 一般可將 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 設爲多變量 t 分配。同樣的, 許多人對基本的模型作擴充改良, 來解釋不同的問題。

Jacquier et al. (1995) 將因子分析加入 MSV 模型裡面,

$$\mathbf{y}_t = \mathrm{D} f_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t \overset{i.i.d.}{\sim} N\left(\mathbf{0}, \operatorname{diag}\left(\sigma_{\varepsilon 1}^2, \sigma_{\varepsilon 2}^2\right)\right)$$

$$f_t = \exp(h_t/2) u_t, \quad u_t \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, 1),$$

$$h_t = \mu + \phi(h_{t-1} - \mu) + \sigma_\eta, \quad \eta_t \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, 1)$$

其中 f_t 是一個看不見的因子, 模型的想法是將報酬的變異拆解成兩部分, 並藉由一個較爲低維的變數結構, 也就是因子, 用他來解釋所有資產共同變動的部分, 而 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$, 則爲扣除因子影響後, 個別資產的自有變動。此種設定的好處是其大大減少了參數的數量。此模型也被證明能夠說明, 高狹峰與波動群聚的現象, 以及報酬間與波動間的相關性。Pitt, Shephard (1999a) 與 Aguilar, West (2000) 分別就類似模型, 提出不同的估計方法, 而 Shephard et al. (2006) 讓殘差項也服從隨機波動。除了一般多變量模型皆會遇到的問題, 例如參數多, 變異數共變數矩陣限定爲正半定, 再加上 MSV 的概似函數複雜, 使得估計模型的參數上顯得費力而耗時。本文採用 Shephard (2006) 的模型, 基本上其應用 (2002) 估計單變量模型的方法, 經過比較之後, 他們證明它的的抽樣方法, 是相對有效率的, 在下一節將對估計方法作完整的說明。