

### 3 因子隨機波動模型

因子分析的主要目的是想以將多個變量的資訊，縮減成幾個互斥的變數，少數幾個因素來解釋一群相互之間有關係存在的變數，每個變數除了受共同因素 (common factor) 的影響之外，尚有獨特的因素 (specifif factor) 存在。基本設定爲

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{f} + \mathbf{u}$$

$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_p)'$  表  $P$  維的觀察值， $\mathbf{B}$  為一個  $p \times k$  的因素負荷矩陣 (factor loading)， $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k)$  為一  $k \times 1$  的因子向量。其中  $f_1, \dots, f_k$  是共同因素，他是在每個變數  $\mathbf{y}$  中都共同擁有，而  $u_i$  是獨特因素，只有變數  $y_i$  中才擁有。傳統的因素分析假定獨特因素  $u_1, \dots, u_p$  為相互獨立的常態分配，且獨特因素與共同因素先也是相互獨立的，並假定  $\mathbf{f}$  的期望值爲零，且共變數變異數矩陣爲定值，則在常態假設之下，

$$\text{Cov}(\mathbf{y}) = \Sigma = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}' + \mathbf{V},$$

其中  $\mathbf{D}$  與  $\mathbf{V}$  分別代表因子與殘差的變異數共變數矩陣，因爲假設  $u_i$  為相互獨立，所以  $\mathbf{V}$  為一對稱矩陣。Chib et al (2006) 將其單變量隨機波動的模型加入其中，讓各變量的隨機衝擊項  $u_i$  與因子  $f$  服從隨機波動，這樣的設定，與傳統因子分析最大的不同在於讓變異數共變數矩陣有  $t$  下標，

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{B}\mathbf{f}_t + \mathbf{u}_t$$

$$\mathbf{u}_t | \mathbf{V}_t \sim N_p(0, \mathbf{V}_t),$$

$$\mathbf{f}_t | \mathbf{D}_t \sim N_p(0, \mathbf{D}_t),$$

其中

$$\mathbf{V}_t = \mathbf{V}_t(h_t) = \text{diag}[\exp(h_{1,t}), \dots, \exp(h_{p,t})] : p \times p$$

$$\mathbf{D}_t = \mathbf{D}_t(h_t) = \text{diag}[\exp(h_{p+1,t}), \dots, \exp(h_{p+k,t})] : k \times k$$

波動本身服從一階自我相關，

$$h_{jt} - \mu_j = \phi_j(h_{jt-1} - \mu_j) + \sigma_j \eta_{jt}, \quad \eta_{jt} \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, 1)$$

則  $\mathbf{y}_t$  的變異數共變數矩陣為

$$\text{Cov}(\mathbf{y}_t) = \boldsymbol{\Sigma}_t = \mathbf{B}\mathbf{D}_t\mathbf{B}' + \mathbf{V}_t,$$

則  $p$  維的序列觀察值, 不再是有共同的變異數共變數矩陣, 而是讓每一個時點  $t$  的變異數共變數矩陣都不相同。其中,  $\mathbf{V}_t$  仍是一個對角矩陣, 殘差之間是相互獨立的, 用來抓各自個別觀察值的自有變動, 而  $\mathbf{B}\mathbf{D}_t\mathbf{B}'$  非對角線的部分, 用來抓住相關係數間的變異過程。及除了個別資產本身自有的波動讓  $\mathbf{V}$  有下標  $t$  之外, 因子的變異數不再固定的假設, 可以用來捕捉變量之間相關性的變動。讓每個時點的變異數或是共變數不相同, 在想法上是可行的, 我們合理認為, 每一時點的資料其背後參數, 是可以不一樣的, 且並非所有出像都是來自於一個固定的參數。然而我們知道, 只有一組資料, 是不足以估計出一個變異數共變數矩陣的, 也因此, 估計的方法只有藉助於模擬了。

我們另外需要對因素負荷矩陣  $\mathbf{B}$  加以限制來避免認定問題 (identification problems), 令  $\beta$  表給定認定條件之後的自由元素 (free element), 我們引用 Geweke (1996) 與 Aguilar (2000) 對因素負荷矩陣的設定, 當  $j > i$ ,  $b_{ij} = 0$  當  $i \leq k$ ,  $b_{ii} = 1$ 。則矩陣的型式為:

$$\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_{2,1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{p,1} & \beta_{p,2} & \cdots & \beta_{p,k} \end{bmatrix}.$$

模型參數共計有:  $\mathbf{B}$  裡有  $pk - (k^2 + k)/2$  個;  $\boldsymbol{\theta}_j = (\phi_j, \mu_j, \sigma_j^2)$  有  $3(p + k)$  個, 此外在變異數矩陣  $\mathbf{V}_t, \mathbf{D}_t$  中共  $n(p + k)$  個隱藏變數  $\{\mathbf{h}_t\}$ 。