第四章、檢查 APC 模型理論假設

將台灣地區男性與女性的死亡資料代入本質估計量方法，求出年齡、年代及世代的參數估計值為參數理論值(附錄二)，透過蒙地卡羅(Monte Carlo)模擬卜瓦松分配下的死亡人數，給定參數理論值透過年中人口數(固定值)做調整，透過蒙地卡羅方式模擬死亡人數($\log E_{ij} = \log N_{ij} + \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k$)，檢查 APC 模型理論假設，即 $\varepsilon_{ij} \overset{i.i.d.}{\sim} N(0,\sigma^2)$。為方便討論，設台灣的死亡人數為 O_{ij}、取對數後台灣的死亡率為 Y_{ij}、蒙地卡羅的死亡人數模擬值為 O_{ij}''、蒙地卡羅取對數的模擬死亡率為 Y_{ij}''，故模擬的對數死亡率與台灣的對數死亡率的蒙地卡羅殘差為 $\tilde{\varepsilon}_{ij} = Y_{ij} - Y_{ij}''$，主要目的是在比較蒙地卡羅的模擬死亡資料與台灣的真實死亡資料的差異，來檢查理論假設。

第一節、殘差是否服從隨機常態分配

由於資料為二維表式，可以透過等高線圖(Contour Plot)方式表示平均的蒙地卡羅殘差(圖 12)，衡量模擬的對數死亡率與台灣的對數死亡率的差異，無論是男性或女性都有類似情形，集中以年齡組 5 歲~15 歲組且年長的年代組會低估，年輕的年齡組且年輕的年代組有高估的情況。另外，在較年長的年齡組且較年輕的年代組之平均殘差亦非在 0 附近，模擬資料的平均結果與原始資料很接近。

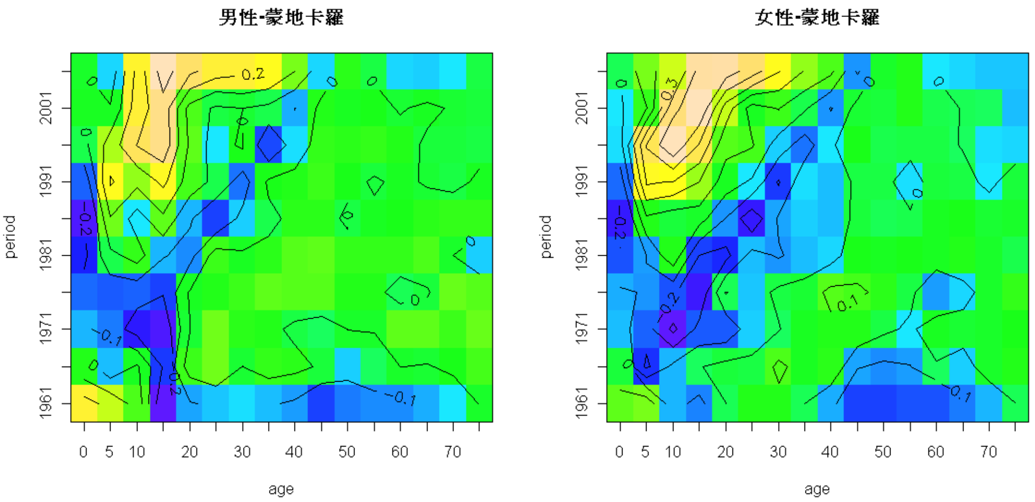

圖 12、蒙地卡羅殘差的等高線圖

Kolmogorov–Smirnov 檢定(KS 檢定)檢查蒙地卡羅殘差是否服從常態分配，即每次模擬的殘差是否服從常態分配，以顯著水準 0.05 衡量，男性的 p 值(介於 0~0.08)與女性的 p 值(介於 0~0.015)，男性拒絕的比例為 96%，女性為 100%，表示殘差相當不符合常態分配。檢視殘差的機率密度函數圖(圖 13)，顯示左尾較厚，有右偏的現象。

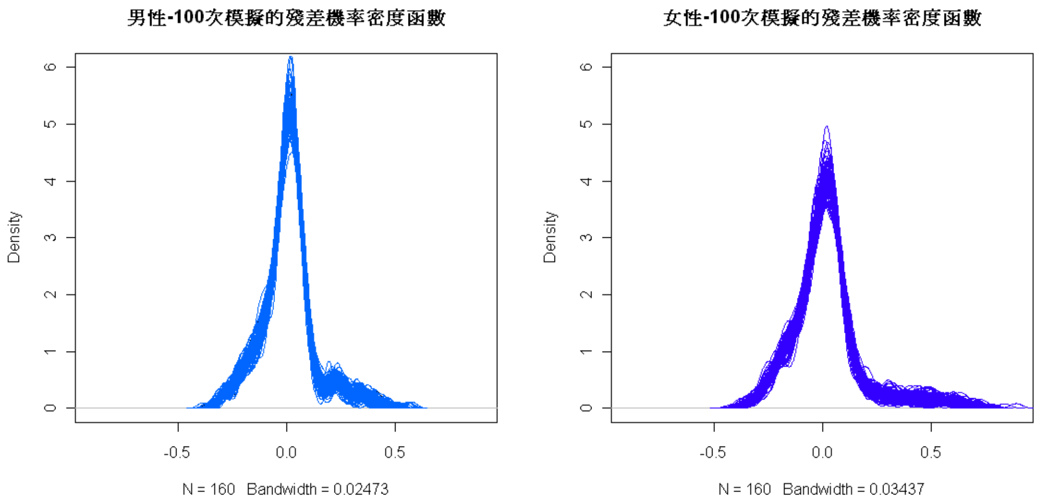

圖 13、蒙地卡羅殘差的機率密度函數

以殘差平方和表示蒙卡地羅變異數，即$\tilde{\sigma}^2 = SSE = \sum_{i=1}^{16}\sum_{j=1}^{10}(Y_{ij} - Y_{ij}^{"})^2$。其男性與女性的平均變異數分別為 2.39449(最大值：2.74995；最小值：2.15268)及 4.20788(最大值：5.00327；最小值：3.48790)，以 Hartley 及 Bartlett 檢定檢查每次模擬的變異數是否一致，結果是無論男性與女性皆符合變異數一致性，即各組的蒙地卡羅變異數變異程度不大，且變異數整體符合常態分配。

基於檢定資料的長度與範圍，使用 Up–and–Down 檢定檢查獨立性。該檢定為比較連續兩個數之間的大小，以正號(＋或 1)表示遞增、負號(－或 0)表示遞減。連續的 0 及 1 視為一個單位，稱為連(Run)，長度為 k 的連的期望值，變異數可參考 Levene and Wolfowiz 透過 $N!$(N 為資料長度)種排列數推導出連個數的期望值為 $(2N-1)/$ ，連個數的變異數為 $(16N-29)/9$，連個數符合常態分配 $N(0,1$。殘差 Up–and–Down 檢定幾乎拒絕，意謂殘差不具獨立性，遞減的個數多於遞增的個數。

表 5、蒙地卡羅殘差 Up–and–Down 檢定(拒絕次數)N=160

顯著水準	0.05	0.10
男	94	98
女	99	100

第二節、年齡組與年代組殘差是否服從隨機常態分配

討論固定在年齡組與年代組的蒙地卡羅殘差與變異數的特性，在此，並不考慮世代的蒙地卡羅變異數，因為各世代所包含的組數不同，難以分辨出是否在不同世代下其變異數是否固定。年齡組及年代組的蒙地卡羅殘差為 $\tilde{\varepsilon}_{age} = Y_{ij} - Y_{ij}^{''}$, $\forall i = 1,...,16$ 與 $\tilde{\varepsilon}_{period} = Y_{ij} - Y_{ij}^{''}, \forall j = 1,...,10$。各年齡組與年代組的殘差不具一致性，尤以較年輕的年齡組及較年長的年代組的變異數較大(圖 14)，各年齡組的殘差大都符合常態分配，但各年代組的殘差不符合常態分配的比例較高，尤以較年長的年代組最甚。年齡組及年代組的殘差機率密度函數圖，亦發現不服從常態分配外，殘差有相當集中亦有相當分散，高年齡組較低年齡組集中，年代組則都很類似，但也不符合常態分配。

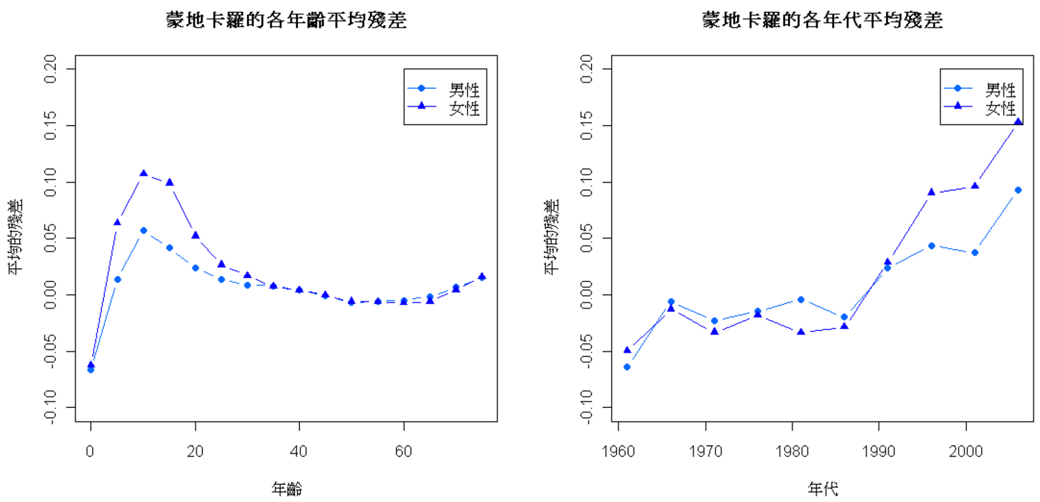

圖 14、各年齡組及年代組的蒙地卡羅殘差

年齡組和年代組的蒙地卡羅變異數為 $\tilde{\sigma}_{age} = SSE_{age} = \sum_{j=1}^{10}(Y_{ij} - Y_{ij}^{''})^2, \forall i = 1,...,16$ 與 $\tilde{\sigma}_{period} = SSE_{period} = \sum_{i=1}^{16}(Y_{ij} - Y_{ij}^{''})^2, \forall j = 1,...,10$。由於各年齡組與年代組的殘差不具一致性，變異數亦不具一致性，較年輕的年齡組及較年長的年代組的變異數較大

(圖 15)，各年齡組及年代組的蒙地卡羅變異數皆服從常態分配。

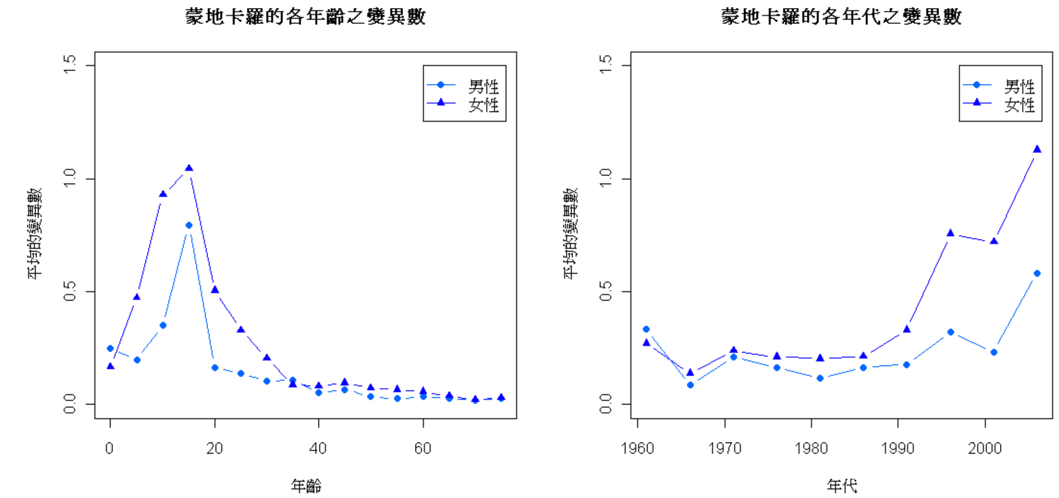

圖 15、各年齡組及年代組的蒙地卡羅變異數

使用 Up–and–Down 檢定檢查獨立性，檢視各年齡組下的殘差($N=10$)，即 10 個年代組的殘差變化，並不檢查各年代組下的殘差，因為年齡為固定效應。令各年齡組的殘差服從 $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} B(10,0.5), \forall i=1,\ldots,16$，則 $\bar{X}=\sum_{i=1}^{16} X_i/16$，且 $E(\bar{X})=5, V(\bar{X})=2.5/16=0.$，則 $\frac{\bar{X}-5}{\sqrt{0.15625}} \to N(0,1)$。由表 3 的結果發現各年齡組下的殘差具有獨立性。

表 6、蒙地卡羅殘差 Up–and–Down 檢定(拒絕次數) N=10

	0.05	0.10
男	0	4
女	0	1

本章發現，以本質估計量的參數估計值設為理論值做蒙地卡羅模擬，其殘差與變異數特色不完全符合 APC 模型的假設 $\varepsilon_{ij} \overset{i.i.d.}{\sim} N(0,\sigma^2)$，整體的殘差平均數在 0 附近，但年齡組與年代組的殘差平均數不在 0 附近，殘差計算而得的變異數更不會具有一致性。意謂 APC 模型在應用上可能有限制，模型假設若有疑慮，則結果會讓人不易信服。本章是針對本質估計量的參數估計值設為理論值，做模型假設的檢查，那其他方法的理論假設檢查結果如何呢？前一章告訴我們不同方法的配適度與預測能力皆很相近，類似的檢查方式下，其他方法的理論假設會與本質估計量的情形可能類似。