

2. 模糊時間數列模式建構

2.1 模糊邏輯

模糊集合理論是一種將人類的思考與語言量化的理論，對生活上的各種不確定性，以更合理的方式去分析，預期能更接近、合乎人性與智慧。在許多科學的研究過程中，資料會因人類本身的主觀意識、時間差異與環境的影響，而具備模糊性，為了適當建立合理的數學模式，方有模糊理論的產生。

在傳統的集合論中，元素對於集合的關係，只有屬於與不屬於該集合的觀念，二元集合以特徵函數來表達，即為

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } x \in A \\ 0, & \text{如果 } x \notin A \end{cases}$$

這樣的二分法，與人類平常的思考邏輯有很大的不同，人類對於一些人事物的思考邏輯，並非都是二分法，反而是有許多的不確定性，使得資料收集的時候，看似一精確值，而實際上所隱含的確是某一區間範圍的可能值，或是其他某種形式的表現方式。舉例來說，班上同學想要舉行暑期班遊活動，地點分別有(1)清境、廬山、奧萬大，(2)阿里山，(3)墾丁，(4)宜蘭，(5)走馬瀨，一般來說，都是班上同學舉行投票，得票最多的地點做為結果，但是在投票的過程中，假設甲同學投了1號的南投之旅，這就表示甲同學只想去南投而完全不想去其他四個地點嗎？相信這個問題不會是這麼簡單的答案，在人的思考邏輯當中，看到五個不同的投票內容，應該多多少少對其他地點都有點興趣，用10分來分配，五個地點分別得到5、1、1、2、1，最後的結果，以最有興趣的地點當作甲同學最後的決定，所以甲投1號，其中不一定是他只想去南投。類似的問題，在做問卷調查的時候也會出現，可能很多個選項都類似，最後一定要選一個的情況下，就用最高得分當作答案。於是在模糊集合理論中，將打破傳統的二元集合論，而採取軟計算(Soft computing)來表示元素與集合之間的隸屬程度，我們稱為隸屬度函數(Membership Function)。

隸屬度函數是模糊理論的基礎，用來表達元素對於集合之間的隸屬程度。但是對於不同的事件，要建立一個適當的隸屬度函數，卻是一件不容易的事情，雖然隸屬度代表這對事物客觀的屬性，但其中隱含著個人主觀意識的因素，到目前為止，尚未有通用的隸屬度函數的訂定法則，通常都是依據經驗或統計數據來輔助。因此在預測時間數列的時候，可以將模糊統計的概念融入時間數列，模糊的方式最主要在於隸屬度函數的取法與論域的分割數。模糊化採取的隸屬度函數有很多種目前也沒有一個確定的準則，本文也將重新定義隸屬度函數的取法；另一種是論域的分割數，分割數越多，理論上對預測會比較準確，然而在前言的文獻探討部分，也知道論域分割數越多，會使資料處理變得很複雜，所以準確度越高，相對運算的複雜度也會增加。一般來說，都是採用 5 或 7 個分割集，這對於資料的解釋比較容易，在計算上也簡易許多。

2.2 模式建立

所謂模糊時間數列，就是將模糊邏輯應用在時間數列的過程中，結合語言變數來解決資料的模糊性，因此，我們必須先給定模糊時間數列一些相關的定義。

定義 2.1 多變量模糊時間數列 (引用自[4])

令 $\{X_{a,t} \in R \mid t = 1, 2, \dots, n\}$ ， $a = 1, 2, \dots, q$ ，為一個 q 變量的時間數列， Ω_a 為其論域(Universe of Discourse)， $a = 1, 2, \dots, q$ 。給定 Ω_a 的一個次序分割集合(Ordered Partition Set)， $\{P_{ai} \mid i = 1, 2, \dots, \kappa_a, \bigcup_{i=1}^{\kappa_a} P_{ai} = \Omega_a\}$ ，其相對應的語言變數為 $\{L_{ai} \mid i = 1, 2, \dots, \kappa_a\}$ ，其中每一個變量的語言變數個數不需要相等。對任一 $a = 1, 2, \dots, q$ ， $t = 1, 2, \dots, n$ 而言，若觀察值 $X_{a,t}$ 相對於 $\{L_{ai} \mid i = 1, 2, \dots, \kappa_a\}$ 的模糊數 $FX_{a,t}$ 具有隸屬度函數為 $\{\mu_{ai}(X_{a,t}) \in R \mid i = 1, 2, \dots, \kappa_a\}$ ，則我們稱 $\{FX_{a,t}\}$ 為 $\{X_{a,t}\}$ 相對於 $\{L_{ai} \mid i = 1, 2, \dots, \kappa_a\}$ 上的一個 q 變量模糊時間序列，並且記為

$$FX_{a,t} = \frac{\mu_{a1}\{X_{a,t}\}}{L_{a1}} + \frac{\mu_{a2}\{X_{a,t}\}}{L_{a2}} + \cdots + \frac{\mu_{a\kappa_a}\{X_{a,t}\}}{L_{a\kappa_a}}.$$

其中+表示連結符號，而非一般加號； $X_{a,t}$ 代表第 a 個時間數列在時間點 t 的值，

κ_a 代表第 a 個時間數列的論域分割數， $\frac{\mu_{ai}(X_{a,t})}{L_{ai}}$ 表示 $X_{a,t}$ 相對於語言變數 L_{ai} 及

隸屬度函數 $\mu_{ai}(X_{a,t})$ 的相對應關係。若 $\mu_{ai}(X_{a,t}):R \rightarrow [0,1]$ ，且 $\sum_{i=1}^{\kappa_a} \mu_{ai}(X_{a,t}) = 1$ ，

對所有 $a = 1, 2, \dots, q$ ， $t = 1, 2, \dots, n$ 都成立，則 $\{FX_{a,t}\}$ 稱為隸屬度標準化的多變量模糊時間序列。

為了方便起見，以下我們將 $FX_{a,t} = \frac{\mu_{a1}\{X_{a,t}\}}{L_{a1}} + \frac{\mu_{a2}\{X_{a,t}\}}{L_{a2}} + \cdots + \frac{\mu_{a\kappa_a}\{X_{a,t}\}}{L_{a\kappa_a}}$

簡寫成向量形式 $FX_{a,t} = (\mu_{a1}(X_{a,t}), \mu_{a2}(X_{a,t}), \dots, \mu_{a\kappa_a}(X_{a,t}))$ 。

定義 2.2 q 變量 p 階自回歸模糊時間數列模式 $VFAR(p, q)$ (引用自[4])

給定一個 q 變量模糊時間數列 $\{FX_{a,t} | t = 1, 2, \dots, n\}$ ， $a = 1, 2, \dots, q$ ，其對應之語言變數為 $\{L_{ai} | i = 1, 2, \dots, \kappa_a\}$ ， $a = 1, 2, \dots, q$ ，其中 κ_a 為第 a 個變量之語言變數個數。隸屬度函數為 $\{\mu_{ai}(X_t) | t = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, \kappa_a\}$ ， $a = 1, 2, \dots, q$ ，寫成 $FX_{a,t} = (\mu_{a1}(X_t), \mu_{a2}(X_t), \dots, \mu_{a\kappa_a}(X_t))$ ， $t = 1, 2, \dots, n$ ， $a = 1, 2, \dots, q$ 。若存在一個 $(p \cdot \sum_{a=1}^q \kappa_a) \times (\sum_{a=1}^q \kappa_a)$ 之模糊關係矩陣 R ，使得 $[(FX_{1,t}, FX_{2,t}, \dots, FX_{q,t})] = [(FX_{1,t-1}, FX_{2,t-1}, \dots, FX_{q,t-1}), (FX_{1,t-2}, FX_{2,t-2}, \dots, FX_{q,t-2}), \dots, (FX_{1,t-p}, FX_{2,t-p}, \dots, FX_{q,t-p})] \circ R$ ，對於 $t = p+1, \dots, n$ 都成立，上述 \circ 為運算符號，其中

$$R = \begin{bmatrix} R(1) \\ R(2) \\ \vdots \\ R(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11}(1) & R_{12}(1) & \cdots & R_{1q}(1) \\ R_{21}(1) & R_{22}(1) & \cdots & R_{2q}(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{q1}(1) & R_{q2}(1) & \cdots & R_{qq}(1) \\ \hline R_{11}(2) & R_{12}(2) & \cdots & R_{1q}(2) \\ R_{21}(2) & R_{22}(2) & \cdots & R_{2q}(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{q1}(2) & R_{q2}(2) & \cdots & R_{qq}(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{11}(p) & R_{12}(p) & \cdots & R_{1q}(p) \\ R_{21}(p) & R_{22}(p) & \cdots & R_{2q}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{q1}(p) & R_{q2}(p) & \cdots & R_{qq}(p) \end{bmatrix},$$

我們稱此多變量模糊時間數列 $\{FX_{a,t} | t = 1, 2, \dots, n\}$ ， $a = 1, 2, \dots, q$ ，為一個 q

變量 p 階的多變量模糊自迴歸模式，記做 $VFAR(p, q)$ 。

在做多變量模糊時間數列預測時，若同時考慮的變量是當天加權股票指數的最小值與最大值，也就是區間的模糊數，那麼做出來的預測，也是個區間數，這個時候，我們要如何去說做出來的預測是好還是不好呢？因此我們需要一個函數去界定兩個區間之間的相似度。如何計算兩個區間的相似度呢？若要比較的兩個區間沒有交集，很明顯的，這兩個區間沒有相似度可言，所以在這種情形下，定義的相似度函數的函數值，將直接定為 0。在此，我們提供一個相似度函數。

定義 2.3 相似度函數

假設 $I_k = (a_k, b_k)$ ， $\ell(I_k) = \text{length}(I_k) = b_k - a_k$ ，以下的運算符號 $|a_i - a_j|$ 為普通的絕對值運算。則相似度函數為

$$S(I_i, I_j) = \begin{cases} 1 - \frac{|a_i - a_j| + |b_i - b_j|}{\ell(I_i) + \ell(I_j)}, & \text{若 } I_i \cap I_j \neq \emptyset \\ 0, & \text{若 } I_i \cap I_j = \emptyset \end{cases}$$

則 S 的函數值將會落在 $[0,1]$ ，若值為 1，代表區間完全吻合，也就是預測完全準確；若值為 0，表示區間完全不相似，預測完全不準。

Example :

$$I_1 = (50, 100), \quad I_2 = (45, 95), \quad I_3 = (55, 95), \quad I_4 = (75, 100), \quad I_5 = (0, 50),$$

$$S(I_1, I_2) = 1 - \frac{5+5}{50+50} = 1 - \frac{10}{100} = \frac{9}{10}$$

$$S(I_1, I_3) = 1 - \frac{5+5}{50+40} = 1 - \frac{10}{90} = \frac{8}{9}$$

$$S(I_1, I_4) = 1 - \frac{25+0}{50+25} = 1 - \frac{25}{75} = \frac{2}{3}$$

$$S(I_1, I_5) = 1 - \frac{50+50}{50+50} = 1 - \frac{100}{100} = 0$$

面對各種不同的問題，隸屬度函數的取法也都不同，因此對模糊時間數列有了一些定義之後，我們要決定本文所採用的隸屬度函數取法。在股票指數中，對於股票邊界的資訊相當重要，所以在定義 2.4 中，將最高與最低這兩段的隸屬度函數獨立定義。

定義 2.4 混合型隸屬度分佈函數

$X(t)$ 為某一時間點 $F(t)$ 的觀察值，假設目前使用的論域分割為 k 個分割集，為 $L_1 \sim L_k$ ，而 $m_1 \sim m_k$ 分別為 $L_1 \sim L_k$ 的中位數。如果 $X(t) < m_1$ ，則隸屬度取 $(1, 0, 0, \dots, 0)$ ；如果 $X(t) > m_k$ ，則隸屬度取 $(0, 0, \dots, 0, 0, 1)$ ；其他情況的隸屬度取法，如果 $m_i < X(t) < m_{i+1}$ ，則落在 L_i 的隸屬度為 $\frac{m_{i+1} - X(t)}{m_{i+1} - m_i}$ ，落在 L_{i+1} 的隸屬度為 $\frac{X(t) - m_i}{m_{i+1} - m_i}$ ，屬於其他語言變數 $L_1, L_2, \dots, L_{i-1}, L_{i+1}, \dots, L_k$ 的隸屬度皆為 0。

另一個決定模糊時間數列模式好壞的因素是模糊相關矩陣，假設 $F(t)$ 是一模糊時間數列($t = 1, 2, \dots, n$)， $i, j = \{1, 2, \dots, r\}$ 表示模糊時間數列分類的指標集合。為了方便起見，我們直接以 $f_j(t)$ 及 $f_j(t-1)$ 分別表示模糊集合 $F_j(t)$ 及 $F_j(t-1)$ 的隸屬度函數。以下為不同模糊時間數列的模糊關係矩陣 R 的計算方法。

定義 2.5 $FAR(1)$ (吳(2005) P.196)

設 $F(t)$ 為一 $FAR(1)$ 之非時變性的模糊時間數列。對任意 $f_j \in F(t)$ ， $j \in J$ ，存在 $f_i \in F(t-1)$ ， $i \in I$ ，及模糊關係矩陣 R ，使得 $f_j(t) = f_i(t-1) \circ R_{ij}$ ，此時模糊關係記為 $f_i \rightarrow f_j$ ，而 $R_{ij} = f_i^t \times f_j$ ， $R = \bigcup_{i,j} R_{i,j}$ 。此時 $F(t+1) = F(t) \circ R$ 。

定義 2.6 $FAR(p)$ (吳(2005) P.197)

設 $F(t)$ 為一 $FAR(p)$ 之非時變性的模糊時間數列。對任意 $f_j \in F(t)$ ， $j \in J$ ，存在 $f_{i_k} \in F(t-k)$ ， $i_k \in I$ ，及模糊關係矩陣 R ，使得

$$f_j(t) = (f_{i_1}(t-1) \circ f_{i_2}(t-2) \circ \dots \circ f_{i_p}(t-p)) \circ R_{i_1, i_2, \dots, i_p} \text{，此時模糊關係記為}$$

$$f_{i_1} \cup f_{i_2} \cup \dots \cup f_{i_p} \rightarrow f_j \text{，而 } R_{i_1, i_2, \dots, i_p} = f_{i_1}^t \times f_j \text{ or } f_{i_2}^t \times f_j \text{ or } \dots \text{ or } f_{i_p}^t \times f_j \text{，}$$

$$R = \bigcup_{i_1, i_2, \dots, i_p} R_{i_1, i_2, \dots, i_p} \text{。此時 } F(t) = (F(t-1) \circ F(t-2) \circ \dots \circ F(t-p)) \circ R$$

2.3 $FAR(1)$ 模式建構

然而我們在前言已經說過，定義 2.5 與 2.6 的模糊矩陣計算方式，無法推廣到多階的情形，於是我們將訂立新的模糊相關矩陣以及新的輸出值計算方式，以期改善並且推廣 Song 的方法。

首先針對於模糊相關矩陣的計算方式做改變，假設採取 5 分割集，且目前有

$F1 \rightarrow F1$ 、 $F1 \rightarrow F1$ 、 $F1 \rightarrow F2$ 、 $F2 \rightarrow F1$ 、 $F1 \rightarrow F1$ 的模糊關係，根據 Song 的方法，也就是定義 2.5，可以計算出模糊相關矩陣

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由於此方法不會計算到相同的模糊關係，所以三次的 $F1 \rightarrow F1$ 其實只有一次 $F1 \rightarrow F1$ 的效力，針對此點，本文想讓三次的 $F1 \rightarrow F1$ 顯現效力，於是我們改變模糊相關矩陣的計算方式，新的方法是讓所有的模糊矩陣直接用加法做運算，這樣新的模糊相關矩陣會變為

$$S = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0.5 & 0 & 0 \\ 3 & 2.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以新的計算方式確實可以讓重複多次的模糊關係顯現出來。對於模糊時間數列的模式與模糊相關矩陣有了新的計算方式，因此定義 2.5 與定義 2.6 將重新改寫，以下為新的定義。

定義 2.7 $NFAR(1)$

設 $F(t)$ 為一 $FAR(1)$ 之非時變性的模糊時間序列。對任意 $f_j \in F(t)$ ， $j \in J$ ，存在 $f_i \in F(t-1)$ ， $i \in I$ ，及模糊關係矩陣 R ，使得 $f_j(t) = f_i(t-1) \circ R_{ij}$ ，此時模糊關係記為 $f_i \rightarrow f_j$ ，而 $R_{ij} = f_i^t \times f_j$ ， $S = \sum_{i,j} R_{ij}$ 。此時 $F(t+1) = F(t) \times S$

定義 2.8 $NFAR(p)$

設 $F(t)$ 為一 $FAR(p)$ 之非時變性的模糊時間序列。對任意 $f_j \in F(t)$, $j \in J$,

存在 $f_{i_k} \in F(t-k)$, $i_k \in I$, 及模糊關係矩陣 R , 使得

$$f_j(t) = (f_{i_1}(t-1) \circ f_{i_2}(t-2) \circ \cdots \circ f_{i_p}(t-p)) \circ R_{i_1, i_2, \dots, i_p}$$

此時模糊關係記為 $f_{i_1} \cup f_{i_2} \cup \cdots \cup f_{i_p} \rightarrow f_j$, 而 $R_{i_1, i_2, \dots, i_p} = f_{i_1}^t \times f_j$ or $f_{i_2}^t \times f_j$

or ... or $f_{i_p}^t \times f_j$, $S = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p} R_{i_1, i_2, \dots, i_p}$ 。此時 $F(t+1) = F(t) \times S$ 。

到目前為止，模式的建立已經大概訂立完畢，在這裡我們整理一下，給定一個建構 $FAR(1)$ 模式的演算法則：

Step 1. 定義論域，為資料的最小值到最大值。

Step 2. 分割論域，通常分為 5 個分割或 7 個分割，按照情況需求，採取分割的方式，並且結合語言變數，給予對應的隸屬度函數；例如採取 5 個分割，將會有

$$F1 = (1, 0.5, 0, 0, 0)$$

$$F2 = (0.5, 1, 0.5, 0, 0)$$

$$F3 = (0, 0.5, 1, 0.5, 0)$$

$$F4 = (0, 0, 0.5, 1, 0.5)$$

$$F5 = (0, 0, 0, 0.5, 1)$$

Step 3. 將資料模糊化，根據模糊化後，最大的隸屬度來決定此筆資料屬於哪個分割集，並紀錄模糊關係。

EX: $FX_1 = (0.2, 0.8, 0, 0, 0)$, 則此筆資料屬於第二個分割集，將記為

$F2$, $FX_2 = (0, 0, 0.6, 0.4, 0)$, 則此筆資料屬於第三個分割集，將記為 $F3$, 那麼從 FX_1 到 FX_2 的模糊關係記為 $F2 \rightarrow F3$ 。

Step 4. 根據模糊關係，計算出模糊相關矩陣。承 Step 3，若 FX_1 到 FX_2 有模糊關係為 $F2 \rightarrow F3$ ，則 $R_1 = F2^t \times F3$ ，其中 \times 的運算取最小運算，經過計算之後，可以得到

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

也就是矩陣內相對應位置的數值為 1，相鄰的位置為 0.5，其餘地方為 0。以此類推，我們有一連串的矩陣，最後的模糊相關矩陣，分別有 Song 的方法與本篇文章新的方法。

1. [14,15,16] 的模糊相關矩陣， $R = \bigcup_i R_i$ ，其中運算符號取最大運算。

2. 本文模糊相關矩陣 $S = \sum_i R_i$ 。

EX：假設我們觀察一段時間的股票走勢，得到模糊關係為 $F2 \rightarrow F3$ 、 $F3 \rightarrow F4$ 、 $F4 \rightarrow F2$ 、 $F2 \rightarrow F3$ 、 $F3 \rightarrow F1$ ，以及模糊矩陣 $R_1 = F2^t \times F3$ 、 $R_2 = F3^t \times F4$ 、 $R_3 = F4^t \times F2$ 、 $R_4 = F2^t \times F3$ 、 $R_5 = F3^t \times F1$ ，經過計算之後，分別可以得到

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{與} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0.5 & 1.5 & 2.5 & 1.5 & 0.5 \\ 1.5 & 2 & 2 & 2 & 0.5 \\ 1 & 1.5 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Step 5. 為了讓新的模糊矩陣有效果，作輸出隸屬度時，採用的是普通矩陣乘法，再將輸出隸屬度函數作標準化，最後作輸出值。為了方便計算，以下採用一階模糊時間序列的輸出方式，即預測模式為 $F(t) = F(t-1) \circ R$ ，而新的方法為 $F(t) = F(t-1) \times S$ 。若隸屬度函數有單一最大值，最後的輸出值採用最大隸屬度的典型值作為預測值，其餘情況，取標準化後的隸屬度與各分割區間的中點的乘積。

EX：延續前面的走勢，假設最後一期的隸屬度函數為(0.7, 0.3, 0, 0, 0) ,

兩種模式的輸出結果分別為

$$(1) F(t) = (0.7, 0.3, 0, 0, 0) \circ R = (0.3, 0.5, 0.5, 0.5, 0.3)$$

由於隸屬度沒有單一最大值，則輸出值為

$$(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) \cdot (0.14, 0.24, 0.24, 0.24, 0.14)$$

$$(2) F(t) = (0.7, 0.3, 0, 0, 0) \times S = (0.15, 1.15, 1.45, 1.15, 0.15)$$

有單一最大隸屬度，所以輸出值為 m_3 。

2.4 FAR(p)模式建構

在 $FAR(1)$ 的模式中，不管是依據定義 2.2 或是定義 2.5 的法則，模式都相同，都是 $F(t+1) = F(t) \circ R$ ，其中 \circ 為運算符號。然而在 $FAR(p)$ 的模式中，會出現數種模式的分歧，主要仍在於模糊相關矩陣的取法，以下將一一介紹。為了方便起見，我們先定義模糊矩陣的符號，並以單變量模式來說明。

假設模糊時間數列 $\{F(t)\}$ 中， $F(t)$ 與 $F(t+p)$ 具有模糊關係 $f_i \rightarrow f_j$ ，則有模糊矩陣 $R_k^p = f_i^t \times f_j$ ，其中 p 表示期數， i, j, k 為指標， t 為轉置， \times 為運算符號，則序列 R_k^p 稱為 $\{F(t)\}$ 相差 p 期的模糊矩陣。所以，在定義 2.2 中的各個模糊相關矩陣為， $R_{11}(p) = \bigcup_k R_k^p$ ；定義 2.5 中的模糊相關矩陣為 $R = \bigcup_{k,p} R_k^p$ ；根據兩種定義，本文新設定的模糊相關矩陣可分數種情形， $S_{11}(p) = \sum_k R_k^p$ ， $S = \sum_{k,p} R_k^p$ 。因此 $FAR(p)$ 的模式分別有

$$F(t+p) = (F(t+p-1), F(t+p-2), \dots, F(t)) \circ \begin{bmatrix} R_{11}(1) \\ R_{11}(2) \\ \vdots \\ R_{11}(p) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$F(t+p) = (F(t+p-1) \circ F(t+p-2) \circ \dots \circ F(t)) \circ R \quad (2.2)$$

$$F(t+p) = (F(t+p-1), F(t+p-2), \dots, F(t)) \times \begin{bmatrix} S_{11}(1) \\ S_{11}(2) \\ \vdots \\ S_{11}(p) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$F(t+p) = (F(t+p-1) \circ F(t+p-2) \circ \dots \circ F(t)) \times S \quad (2.4)$$

$$F(t+p) = F(t+p-1) \times S \quad (2.5)$$

其中式子 2.3~2.4，是依據既有的模式，配合本文的矩陣修改，2.5 為針對本文新的模糊相關矩陣而設立的模式。

2.5 VFAR(1,2)模式建構

給定兩個模糊時間數列 $FX_{1,t}$ 與 $FX_{2,t}$ ，若此組時間數列確定彼此之間有交互關係存在，則可以合在一起看成一組多變量模糊時間數列 $(FX_{1,t}, FX_{2,t})$ ，根據定義 2.2，得到一個 2 變量自迴歸的模式，重新改寫指標，則 VFAR(1,2) 的模式為

$$(FX_{1,t+1}, FX_{2,t+1}) = (FX_{1,t}, FX_{2,t}) \circ \begin{bmatrix} R^{1,1}(1) & R^{1,2}(1) \\ R^{2,1}(1) & R^{2,2}(1) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

其中 $R^{1,1}(1)$ 與 $R^{2,2}(1)$ 的取法，與單變量 FAR(1) 模糊相關矩陣取法相同，需要定義的只剩下變數之間的模糊相關矩陣。

假設此組時間數列的語言指標變化為 $(a, b) \rightarrow (c, d)$ ，為了區分變數不同的模糊關係，第一個變數的自相關定為 $f_a \rightarrow f_c$ ，第二個變數的自相關定為 $g_b \rightarrow g_d$ 。我們定義第二個變數對第一個變數的模糊關係為 $g_b \rightarrow f_c$ ，則有模糊矩陣 $R_k^{2,1}(1) = g_b^t \times f_c$ ，與模糊相關矩陣 $S^{2,1}(1) = \sum_k R_k^{2,1}(1)$ 。所以對第一個變數的預測模式為

$$FX_{1,t+1} = FX_{1,t} \times S^{1,1}(1) + FX_{2,t} \times S^{2,1}(1) \quad (2.7)$$

其中 $FX_{2,t} \times S^{2,1}(1)$ 稱為第二個變量在時間點 t 對第一個變數在時間點 $t+1$ 的影響量。然而，考慮傳統的多變量模式 $X_1(t+1) = \phi_1 X_{1,1}(t) + \phi_2 X_{2,1}(t) + \varepsilon(t)$ ，我們知道 2.7 中應該還要有個比例常數，因此我們把 2.7 重新改寫為

$$FX_{1,t+1} = \phi_1 FX_{1,t} \times S^{1,1}(1) + \phi_2 FX_{2,t} \times S^{2,1}(1) \quad (2.8)$$

其中的比例常數部分，在模糊領域中，無法如傳統統計利用隨機變數的分配取得，因此借用傳統統計的回歸模式的比例常數。利用 matlab 的迴歸程式 regress 求得，即

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \text{regress}(X_1(2:t), X_1(1:t-1)) , \quad \phi_2 = \text{regress}(X_1(2:t), X_2(1:t-1)) \\ \text{如果 } \phi_2 > 1, \text{ 則 } \phi_2 &= \text{regress}((X_1(2:t) - X_1(1:t-1)), X_2(1:t-1)) \end{aligned} \quad (2.9)$$

建構了模糊時間數列模式以及新的模糊矩陣與演算法，我們已經能順利的進行預測，以下我們介紹如何由不同的標準來判別預估模式的準確度。

定義 2.9 誤差平方和函數 SSE (吳(2005))

令 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 為一組時間數列， \tilde{X}_{n+t} 為 X_n 往前第 t 期的預測值，則誤差平方和函數 $SSE = \sum_t \varepsilon_{n+t}^2$ ，其中 $\varepsilon_{n+t} = (X_{n+t} - \tilde{X}_{n+t})$ 。

定義 2.10 命中率函數 (引用自[1])

定義命中率函數為 $P = \frac{\sum_{i=1}^N I_{RL_i}(FL_i)}{N}$ ，其中 FL_i 表示預測語言變數值， RL_i 表示真實語言變數值， N 為樣本長度， I 為一指標函數，即 $I_t(x) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } x = t \\ 0, & \text{如果 } x \neq t \end{cases}$ ，也就是，若預測語言值座落的區間，與真實語言值座落的區間相同的話，指標函數會等於 1。