第二章　固定直角的一邊

我們現在任意給定 $n \geq 3$ 來計算以 n 爲直角的一邊的畢氏三元組組數, 我們將其用 T_o 或 T_e 表示 [5]。

1. 當 n 爲奇數, 令 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, 其中 $p_1, p_2, \ldots, p_r$ 爲相異奇質數, 則

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} = k(a-b)(a+b)。$$

因爲 $a-b$ 與 $a+b$ 都是奇數, 所以

$$\gcd(a-b, a+b) = \gcd(2a, a+b) = \gcd(a, a+b) = \gcd(a, b) = 1。$$

所求的組數相當於有 r 種不同顏色的球, 第 1 種顏色有 α_1 個, 第 2 種顏色有 α_2 個,. . ., 第 r 種顏色有 α_r 個, 丟到 2 個相同的箱子裡, 但是這兩個箱子彼此間沒有共同顏色的球。對所有的 $i = 1, 2, \ldots, r$, 第 i 種顏色的球可選擇丟到第 1 個箱子或第 2 個箱子, 選定一個箱子後, 再選擇丟的顆數, 可丟 1 個, 2個,. . ., α_i 個或不丟, 剩餘的顆數放在第 3 個箱子, 第 3 個箱子就是 k 值 [4]。所以

$$\begin{aligned} T_o &= \frac{1}{2!}[(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)\cdots(2\alpha_r+1)-1] \\ &= \frac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^{r}(2\alpha_i+1)-1\right]。 \end{aligned}$$

接下來求以 n 爲直角的一邊的基本解組數。基本解即爲 (2) 式中 $k=1$ 的特例, 也就是說第三個箱子不得有球, 每種顏色的球必須全部分配到第一個箱子與第二個箱子, 每種顏色的球選定箱子後就全部丟入, 所以基本解組數爲 $P_o = \frac{1}{2!} \cdot 2^r = 2^{r-1}$。

2. 當 n 爲偶數, 令 $n = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, 其中 $p_1, p_2, \ldots, p_r$ 爲相異奇質數。

情形一: $n = 2kab$。若 $\alpha_0 = 1$, 則 $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} = kab$, 矛盾, 所以 α_0 必須大於等於 2。於是

$$\begin{aligned} 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} &= 2kab \\ \Rightarrow 2^{\alpha_0-1} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} &= kab, \end{aligned}$$

情形一的組數爲

$$T_x = \frac{1}{2!}[2(\alpha_0 - 1)(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1)\cdots(2\alpha_r + 1)]。$$

情形二: $n = k(a-b)(a+b)$, 其中 $a-b$ 和 $a+b$ 爲互質奇數, 組數爲

$$T_y = \frac{1}{2!}[(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1)\cdots(2\alpha_r + 1) - 1]。$$

我們所要求的 T_e 即爲兩者相加:

$$\begin{aligned} T_e = T_x + T_y &= \frac{1}{2!}[2(\alpha_0 - 1)(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1)\cdots(2\alpha_r + 1)] \\ &\quad + \frac{1}{2!}[(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1)\cdots(2\alpha_r + 1) - 1] \\ &= \left(\alpha_0 - \frac{1}{2}\right)(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1)\cdots(2\alpha_r + 1) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[(2\alpha_0 - 1)\prod_{i=1}^{r}(2\alpha_i + 1) - 1\right]。 \end{aligned}$$

現在考慮以 n 爲直角的一邊的基本解組數。因 n 爲偶數, 所以 n 不爲 $a^2 - b^2$ 這種型式。若 $\alpha_0 = 1$, 則 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r} = ab$, 矛盾, 沒有基本解。當 $\alpha_0 \geq 2$,

$$\begin{aligned} 2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r} &= 2ab \\ \Rightarrow 2^{\alpha_0 - 1}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r} &= ab, \end{aligned}$$

基本解的組數爲 $P_e = \frac{1}{2!} \cdot 2^{r+1} = 2^r$。

我們將上述的論證過程歸納成以下的定理:

定理 2. 假設 n 爲大於 2 的正整數, $p_1, p_2, \ldots, p_r$ 爲相異的奇質數。

1. 當 n 爲奇數且 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 時, 以 n 爲直角的一邊的畢氏三元組組數爲

$$T_o = \frac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^{r}(2\alpha_i + 1) - 1\right],$$

基本解的組數爲 $P_o = 2^{r-1}$。

2. 當 n 爲偶數且 $n = 2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 時, 以 n 爲直角的一邊的畢氏三元組組數爲

$$T_e = \frac{1}{2}\left[(2\alpha_0 - 1)\prod_{i=1}^{r}(2\alpha_i + 1) - 1\right]。$$

當 $\alpha_0 \geq 2$ 時, 才有基本解, 組數爲 $P_e = 2^r$。

例一: n 爲奇數 1. $n=63$, 2. $n=1105$。

1. $n=3^2\times 7$, $T_o=\frac{1}{2}[(2\times 2+1)(2\times 1+1)-1]=7$, $P_o=2^{2-1}=2$。分解所有可能的解組:

$$① \begin{cases} k=3\times 7 \\ a+b=3 \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=21 \\ a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow (84,63,105),$$

$$② \begin{cases} k=3^2 \\ a+b=7 \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=9 \\ a=4 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow (216,63,225),$$

$$③ \begin{cases} k=7 \\ a+b=3^2 \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=7 \\ a=5 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow (280,63,287),$$

$$④ \begin{cases} k=3 \\ a+b=3\times 7 \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ a=11 \\ b=10 \end{cases} \Rightarrow (660,63,663),$$

$$⑤ \begin{cases} k=3 \\ a+b=7 \\ a-b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ a=5 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow (60,63,87),$$

$$⑥ \begin{cases} k=1 \\ a+b=3^2\times 7 \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ a=32 \\ b=31 \end{cases} \Rightarrow (1984,63,1985),$$

$$⑦ \begin{cases} k=1 \\ a+b=3^2 \\ a-b=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ a=8 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow (16,63,65)。$$

其中基本解爲 $k=1$ 的部分: ⑥ $(1984,63,1985)$, ⑦ $(16,63,65)$。

2. $n=5\times 13\times 17$, $T_o=\frac{1}{2}[(2\times 1+1)(2\times 1+1)(2\times 1+1)-1]=13$, $P_o=2^{3-1}=4$。分解所有可能的解組:

$$① \begin{cases} k=13\times 17 \\ a+b=5 \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=221 \\ a=3 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow (2652,1105,2873),$$

② $\begin{cases} k = 5 \times 17 \\ a + b = 13 \\ a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 85 \\ a = 7 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow (7140, 1105, 7225),$

③ $\begin{cases} k = 5 \times 13 \\ a + b = 17 \\ a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 65 \\ a = 9 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow (9360, 1105, 9425),$

④ $\begin{cases} k = 17 \\ a + b = 5 \times 13 \\ a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 17 \\ a = 33 \\ b = 32 \end{cases} \Rightarrow (35904, 1105, 35921),$

⑤ $\begin{cases} k = 13 \\ a + b = 5 \times 17 \\ a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 13 \\ a = 43 \\ b = 42 \end{cases} \Rightarrow (46956, 1105, 46969),$

⑥ $\begin{cases} k = 5 \\ a + b = 13 \times 17 \\ a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 5 \\ a = 111 \\ b = 110 \end{cases} \Rightarrow (122100, 1105, 122105),$

⑦ $\begin{cases} k = 17 \\ a + b = 13 \\ a - b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 17 \\ a = 9 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow (1224, 1105, 1649),$

⑧ $\begin{cases} k = 13 \\ a + b = 17 \\ a - b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 13 \\ a = 11 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow (1716, 1105, 2041),$

⑨ $\begin{cases} k = 5 \\ a + b = 17 \\ a - b = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 5 \\ a = 15 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow (300, 1105, 1145),$

⑩ $\begin{cases} k = 1 \\ a + b = 13 \times 17 \\ a - b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ a = 113 \\ b = 108 \end{cases} \Rightarrow (24408, 1105, 24433),$

⑪ $\begin{cases} k = 1 \\ a + b = 5 \times 17 \\ a - b = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ a = 49 \\ b = 36 \end{cases} \Rightarrow (3528, 1105, 3697),$

$$⑫\begin{cases} k=1 \\ a+b=5\times 13\times 17 \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ a=553 \\ b=552 \end{cases} \Rightarrow (610512, 1105, 610513),$$

$$⑬\begin{cases} k=1 \\ a+b=5\times 13 \\ a-b=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ a=41 \\ b=24 \end{cases} \Rightarrow (1968, 1105, 2257)。$$

其中基本解爲 $k=1$ 的部分: ⑩ $(24408, 1105, 24433)$, ⑪ $(3528, 1105, 3697)$, ⑫ $(610512, 1105, 610513)$, ⑬ $(1968, 1105, 2257)$。

例二: n 爲偶數 1. $n=42$, 2. $n=72$。

1. $n=2\times 3\times 7$, $T_e=\frac{1}{2}[(2\times 1-1)(2\times 1+1)(2\times 1+1)-1]=4$。因爲 $\alpha_0=1$, n 不爲 $2kab$ 這種型式, n 是 $k(a^2-b^2)$ 的型式。分解所有可能的解組:

$$①\begin{cases} k=2 \\ a-b=3 \\ a+b=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=2 \\ a=5 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow (40, 42, 58),$$

$$②\begin{cases} k=2 \\ a-b=1 \\ a+b=3\times 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=2 \\ a=11 \\ b=10 \end{cases} \Rightarrow (440, 42, 442),$$

$$③\begin{cases} k=2\times 3 \\ a-b=1 \\ a+b=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=6 \\ a=4 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow (144, 42, 150),$$

$$④\begin{cases} k=2\times 7 \\ a-b=1 \\ a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=14 \\ a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow (56, 42, 70)。$$

因爲 $\alpha_0=1$, 沒有基本解。

2. $n=2^3\times 3^2$, $T_e=\frac{1}{2}[(2\times 3-1)(2\times 2+1)-1]=12$, $P_e=2^1=2$。當 $n=2kab$ 時, 分解所有可能的解組:

$$①\begin{cases} k=1 \\ a=2^2\times 3^2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow (72, 1295, 1297),$$

② $\begin{cases} k=1 \\ a=3^2 \\ b=2^2 \end{cases} \Rightarrow (72,65,97)$,

③ $\begin{cases} k=2 \\ a=2\times 3^2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow (72,646,650)$,

④ $\begin{cases} k=3 \\ a=2^2\times 3 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow (72,429,435)$,

⑤ $\begin{cases} k=2\times 3 \\ a=2\times 3 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow (72,210,222)$,

⑥ $\begin{cases} k=3^2 \\ a=2^2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow (72,135,153)$,

⑦ $\begin{cases} k=2\times 3^2 \\ a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow (72,54,90)$,

⑧ $\begin{cases} k=2 \\ a=3^2 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow (72,154,170)$,

⑨ $\begin{cases} k=2\times 3 \\ a=3 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow (72,30,78)$,

⑩ $\begin{cases} k=3 \\ a=2^2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow (72,21,75)$。

當 $n=k(a-b)(a+b)$ 時, 分解所有可能的解組:

$$⑪\begin{cases} k = 2^3 \\ a - b = 1 \\ a + b = 3^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 8 \\ a = 5 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow (320, 72, 328),$$

$$⑫\begin{cases} k = 2^3 \times 3 \\ a - b = 1 \\ a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 24 \\ a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow (96, 72, 120)。$$

其中基本解爲 $k = 1$ 的部分: ① $(72, 1295, 1297)$, ② $(72, 65, 97)$。