第四章　固定斜邊

我們由 (2) 式知畢氏三元組的斜邊皆型如 $k(a^2+b^2)$, 其中 $k \in \mathbb{N}$ 且 $\gcd(a,b)=1$。根據引理 8, a^2+b^2 的所有奇質因數都型如 $4m+1$, 而且兩個型如 $4m+1$ 的正整數相乘也是型如 $4m+1$, 再加上 a, b 爲一奇一偶, 所以 a^2+b^2 的質因數分解都是型如 $4m+1$ 的奇質數。因此, 若 $k(a^2+b^2)$ 有 2 或型如 $4m+3$ 的質因數, 它們都會是 k 的因數。我們得到一個必要條件: 任意給定一個正整數要成爲一個畢氏三元組的斜邊, 那個正整數必須要有型如 $4m+1$ 的質因數。

現在任意給定畢氏三元組的斜邊 $z \in \mathbb{N}$, z 的質因數分解爲

$$z = 2^t(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r})(q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_s^{\beta_s}), \tag{3}$$

其中 $p_1, p_2, \ldots, p_r$ 爲型如 $4m+1$ 的相異質數, $q_1, q_2, \ldots, q_s$ 爲型如 $4m+3$ 的相異質數。我們根據引理 8 與引理 9, 對所有的 $h = 1, 2, \ldots, r$, 要求

$$a^2+b^2 = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_h^{\alpha_h}$$

中 (a,b) 數對的組數。

類型一: 當 $a^2+b^2 = p_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, 根據定理 7, (a,b) 有 1 組。當 $a^2+b^2 = {p_i}^2$, $i = 1, 2, \ldots, r$, 因爲 $\gcd(a,b)=1$, 根據引理 9, (a,b) 有 1 組。依此類推, 直到當 $a^2+b^2 = p_i^{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \ldots, r$, (a,b) 也是有 1 組。

類型二: 當 $a^2+b^2 = p_ip_j$, $1 \le i < j \le r$。因爲 $\gcd(a,b)=1$, 根據引理 9, (a,b) 有 1×2 組。當 $a^2+b^2 = {p_i}^2p_j$, $1 \le i < j \le r$, 同樣根據引理 9, (a,b) 有 1×2 組。當 $a^2+b^2 = p_i{p_j}^2$, $1 \le i < j \le r$, 同理, (a,b) 有 1×2 組。依此類推, 直到當 $a^2+b^2 = p_i^{\alpha_i}p_j^{\alpha_j}$, $1 \le i < j \le r$, (a,b) 一樣有 1×2 組。

$$\vdots$$

類型 r: 當 $a^2+b^2 = p_1p_2\cdots p_r$。因爲 $\gcd(a,b)=1$, 根據引理 9, (a,b) 有 $1 \times 2^{r-1}$ 組。當 $a^2+b^2 = {p_1}^2p_2\cdots p_r$, 同理, (a,b) 有 $1 \times 2^{r-1}$ 組。依此類推, 直到當 $a^2+b^2 = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$, (a,b) 一樣有 $1 \times 2^{r-1}$ 組。

爲了計算, 我們用一個一般式來表示上述每一種類型的每一種情況: 當

$$a^2+b^2 = p_{i_1}^{\alpha_{i_1}}p_{i_2}^{\alpha_{i_2}}\cdots p_{i_h}^{\alpha_{i_h}},$$

其中 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_h \leq r$, h 代表第幾個類型 (如 $h = 3$ 代表類型三), 則 (a, b) 有

$$1 \times \overbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}^{h-1\text{個}} = 2^{h-1} \text{ 組。}$$

所以 (a, b) 數對的所有組數即是把全部的情形都加起來:

$$\begin{aligned}
&\sum_{h=1}^{r} 2^{h-1} \left(\sum_{i_1=1}^{r-h+1} \sum_{i_2=i_1+1}^{r-h+2} \sum_{i_3=i_2+1}^{r-h+3} \cdots \sum_{i_h=i_{h-1}+1}^{r} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_h} \right) \\
&= 2^{1-1} \cdot \sum_{i_1=1}^{r} \alpha_{i_1} + 2^{2-1} \left(\sum_{i_1=1}^{r-1} \sum_{i_2=i_1+1}^{r} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2} \right) + 2^{3-1} \left(\sum_{i_1=1}^{r-2} \sum_{i_2=i_1+1}^{r-1} \sum_{i_3=i_2+1}^{r} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\alpha_{i_3} \right) \\
&\quad + \cdots + 2^{r-1} \left(\sum_{i_1=1}^{1} \sum_{i_2=i_1+1}^{2} \sum_{i_3=i_2+1}^{3} \cdots \sum_{i_r=i_{r-1}+1}^{r} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_r} \right) \\
&= 2^0(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r) + 2^1(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{r-1}\alpha_r) \\
&\quad + 2^2(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_{r-2}\alpha_{r-1}\alpha_r) + \cdots + 2^{r-1}(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r)\text{。}
\end{aligned}$$

因爲

$$\begin{aligned}
&1 + 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r) + 2^2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{r-1}\alpha_r) \\
&\quad + 2^3(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_{r-2}\alpha_{r-1}\alpha_r) + \cdots + 2^r(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r) \\
&= (2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1)\cdots(2\alpha_r + 1) \\
&= \prod_{i=1}^{r}(2\alpha_i + 1),
\end{aligned}$$

所以以 z 爲斜邊的所有畢氏三元組組數爲

$$\begin{aligned}
T_h &= 2^0(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r) + 2^1(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{r-1}\alpha_r) \\
&\quad + 2^2(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_{r-2}\alpha_{r-1}\alpha_r) + \cdots + 2^{r-1}(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r) \\
&= \frac{1}{2}\left[(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1)\cdots(2\alpha_r + 1) - 1\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^{r}(2\alpha_i + 1) - 1\right]\text{。}
\end{aligned}$$

以 z 爲斜邊的所有畢氏三元組中, 基本解的情況發生在 $k=1$ 時, 也就是說, (3) 式中的 $t,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ 都必須爲 0, 這時 z 的質因數分解變成了

$$z=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}。$$

因爲 $\gcd(a,b)=1$, 根據引理 9, (a,b) 數對的數目有 2^{r-1} 組。我們得到基本解存在的充分必要條件爲 z 只有型如 $4m+1$ 的質因數, 沒有 2 與型如 $4m+3$ 的質因數。

我們將本章整理成以下的定理:

定理 8. 假設正整數 z 的質因數分解爲

$$z=2^t(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r})(q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_s^{\beta_s}),$$

其中 $p_1,p_2,\ldots,p_r$ 爲型如 $4m+1$ 的相異質數, $q_1,q_2,\ldots,q_s$ 爲型如 $4m+3$ 的相異質數。則以 z 爲斜邊的畢氏三元組組數爲

$$T_h=\frac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^{r}(2\alpha_i+1)-1\right]。$$

只有在 $t=\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_s=0$ 時才有基本解, 組數爲 $P_h=2^{r-1}$ 組。

例一: $z=65$。$z=5\times 13$, $T_h=\frac{1}{2}[(2\times 1+1)(2\times 1+1)-1]=4$。因爲 5 和 13 皆型如 $4m+1$, , 所以有基本解, $P_h=2^{2-1}=2$。分解所有可能的解組:

$$①\begin{cases}k=13\\a^2+b^2=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=13\\a=2\\b=1\end{cases}\Rightarrow(52,39,65),$$

$$②\begin{cases}k=5\\a^2+b^2=13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=5\\a=3\\b=2\end{cases}\Rightarrow(60,25,65),$$

$$\begin{cases}k=1\\a^2+b^2=5\times 13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=1\\a^2+b^2=(1^2+2^2)(2^2+3^2)\\=(2+6)^2+(4-3)^2\Rightarrow\begin{cases}k=1\\a=8\\b=1\end{cases}\Rightarrow ③\,(16,63,65)\\=(3+4)^2+(6-2)^2\Rightarrow\begin{cases}k=1\\a=7\\b=4\end{cases}\Rightarrow ④\,(56,33,65)\end{cases}。$$

其中基本解爲 $k=1$ 的部分: ③ $(16,63,65)$, ④ $(56,33,65)$。

例二: $z=2550$。$z=2\times3\times5^2\times17$, $T_h=\frac{1}{2}[(2\times2+1)(2\times1+1)-1]=7$。
分解所有可能的解組:

$$① \begin{cases} k=2\times3\times5\times17 \\ a^2+b^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=510 \\ a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow (2040,1530,2550),$$

$$② \begin{cases} k=2\times3\times5^2 \\ a^2+b^2=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=150 \\ a=4 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow (1200,2250,2550),$$

$$\begin{cases} k=2\times3\times17 \\ a^2+b^2=5^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=2\times3\times17 \\ a^2+b^2=(2^2+1^2)(2^2+1^2) \\ =(2+2)^2+(4-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} k=102 \\ a=4 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow ③\,(2448,714,2550) \end{cases},$$

$$\begin{cases} k=2\times3\times5 \\ a^2+b^2=5\times17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=30 \\ a^2+b^2=(2^2+1^2)(4^2+1^2) \\ =(8+1)^2+(4-2)^2 \Rightarrow \begin{cases} k=30 \\ a=9 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow ④\,(1080,2310,2550) \\ =(2+4)^2+(8-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} k=30 \\ a=7 \\ b=6 \end{cases} \Rightarrow ⑤\,(2520,390,2550) \end{cases},$$

$$\begin{cases} k=2\times3 \\ a^2+b^2=5^2\times17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=6 \\ a^2+b^2=(4^2+3^2)(4^2+1^2) \\ =(16+3)^2+(12-4)^2 \Rightarrow \begin{cases} k=6 \\ a=19 \\ b=8 \end{cases} \Rightarrow ⑥\,(1824,1782,2550) \\ =(4+12)^2+(16-3)^2 \Rightarrow \begin{cases} k=6 \\ a=16 \\ b=13 \end{cases} \Rightarrow ⑦\,(2496,522,2550) \end{cases}。$$

因爲有質因數 2, 所以沒有基本解。

例三: $z=5365$。$z=5\times29\times37$, $T_h=\frac{1}{2}[(2\times1+1)(2\times1+1)(2\times1+1)-1]=13$。因爲 $5,29,37$ 皆型如 $4m+1$, 所以有基本解, $P_h=2^{3-1}=4$。分解所有可能的解組:

$$①\begin{cases} k=29\times37 \\ a^2+b^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=1073 \\ a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow (4292,3219,5365),$$

$$②\begin{cases} k=5\times37 \\ a^2+b^2=29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=185 \\ a=5 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow (3700,3885,5365),$$

$$③\begin{cases} k=5\times29 \\ a^2+b^2=37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=145 \\ a=6 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow (1740,5075,5365),$$

$$\begin{cases} k=37 \\ a^2+b^2=5\times29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=37 \\ a^2+b^2=(2^2+1^2)(5^2+2^2) \\ =(10+2)^2+(5-4)^2 \Rightarrow \begin{cases} k=37 \\ a=12 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow ④\,(888,5291,5365) \\ =(4+5)^2+(10-2)^2 \Rightarrow \begin{cases} k=37 \\ a=9 \\ b=8 \end{cases} \Rightarrow ⑤\,(5328,629,5365) \end{cases},$$

$$\begin{cases} k=29 \\ a^2+b^2=5\times37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=29 \\ a^2+b^2=(2^2+1^2)(6^2+1^2) \\ =(12+1)^2+(6-2)^2 \Rightarrow \begin{cases} k=29 \\ a=13 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow ⑥\,(3016,4437,5365) \\ =(2+6)^2+(12-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} k=29 \\ a=11 \\ b=8 \end{cases} \Rightarrow ⑦\,(5104,1653,5365) \end{cases},$$

$$\begin{cases} k=5 \\ a^2+b^2=29\times 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=5 \\ a^2+b^2=(5^2+2^2)(6^2+1^2) \\ =(30+2)^2+(12-5)^2 \Rightarrow \begin{cases} k=5 \\ a=32 \\ b=7 \end{cases} \Rightarrow ⑧\,(2240,4875,5365) \\ =(5+12)^2+(30-2)^2 \Rightarrow \begin{cases} k=5 \\ a=28 \\ b=17 \end{cases} \Rightarrow ⑨\,(4760,2475,5365) \end{cases},$$

$$\begin{cases} k=1 \\ a^2+b^2=5\times 29\times 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ a^2+b^2=(2^2+1^2)(32^2+7^2) \\ =(64+7)^2+(32-14)^2 \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ a=71 \\ b=18 \end{cases} \Rightarrow ⑩\,(2556,4717,5365) \\ =(14+32)^2+(64-7)^2 \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ a=57 \\ b=46 \end{cases} \Rightarrow ⑪\,(5244,1133,5365) \\ =(2^2+1^2)(28^2+17^2) \\ =(56+17)^2+(34-28)^2 \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ a=73 \\ b=6 \end{cases} \Rightarrow ⑫\,(876,5293,5365) \\ =(34+28)^2+(56-17)^2 \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ a=62 \\ b=39 \end{cases} \Rightarrow ⑬\,(4836,2323,5365) \end{cases}。$$

其中基本解爲 $k=1$ 的部分: ⑩ $(2556,4717,5365)$, ⑪ $(5244,1133,5365)$, ⑫ $(876,5293,5365)$, ⑬ $(4836,2323,5365)$。