2.模糊評估系統分析

管理決策過程並非 0、1 邏輯，更充斥許多不確定性、可變性，而多元思維逐漸取代傳統二元邏輯的思考與分析方法，因爲一個決策的過程中某些重要因素考量都可能是下決策的關鍵。傳統的系統分析其數量方法均以實數爲係數，本研究考慮以模糊數爲基礎，楊亨利、傅豐玲…等(2001)指出系統分析的概念，系統分析之目的在了解現行作業流程、資訊系統現況，並分析現行作業問題後，定義使用者的需求，並依據使用者需求，提出改善或建立新系統的優先順序。其應包括下列三個階段的工作：

1. 調查階段：調查計畫的可行性。
2. 分析階段：了解及分析現行系統。
3. 定義階段：定義使用者需求及需求的優先順序。

爲了能整合所有專案的相關文件，將與文件、程式等相關資料，集中儲存在專案辭典(Repository)中，如此不僅使得系統分析各階段工作所要用到的資料，所產生的資料，可以隨時互通，甚至可以使軟體生命週期中各工作要項(Activities)所需要用到或所產生的輸出資料(Output)能夠整合，相互爲用。

一般而言，當舊有的作業方式可能已經無法再繼續承受下去，而必須以新的方法取而代之。此時，相關人員就必須應用系統分析的觀念，剖析當前所面臨的是何種問題，並研擬解決當前問題的可行方案，同時應對每一方案進行可行性評估。黃敬仁(2001)

模糊評估系統分析的流程圖如下：

步驟 1：模糊問卷抽樣調查

步驟 2：計算模糊相對權重

步驟 3：計算模糊評估矩陣

步驟 4：進行模糊綜合評估值運算

步驟 5：運算後的模糊綜合評估值，檢定其評語是否唯一。若為唯一，則取最優者完成決策；反之，則比較百分比，取其最優者再做出決策。

將以上建構模糊評估系統分析的步驟畫成一簡要的流程圖如圖 2.1

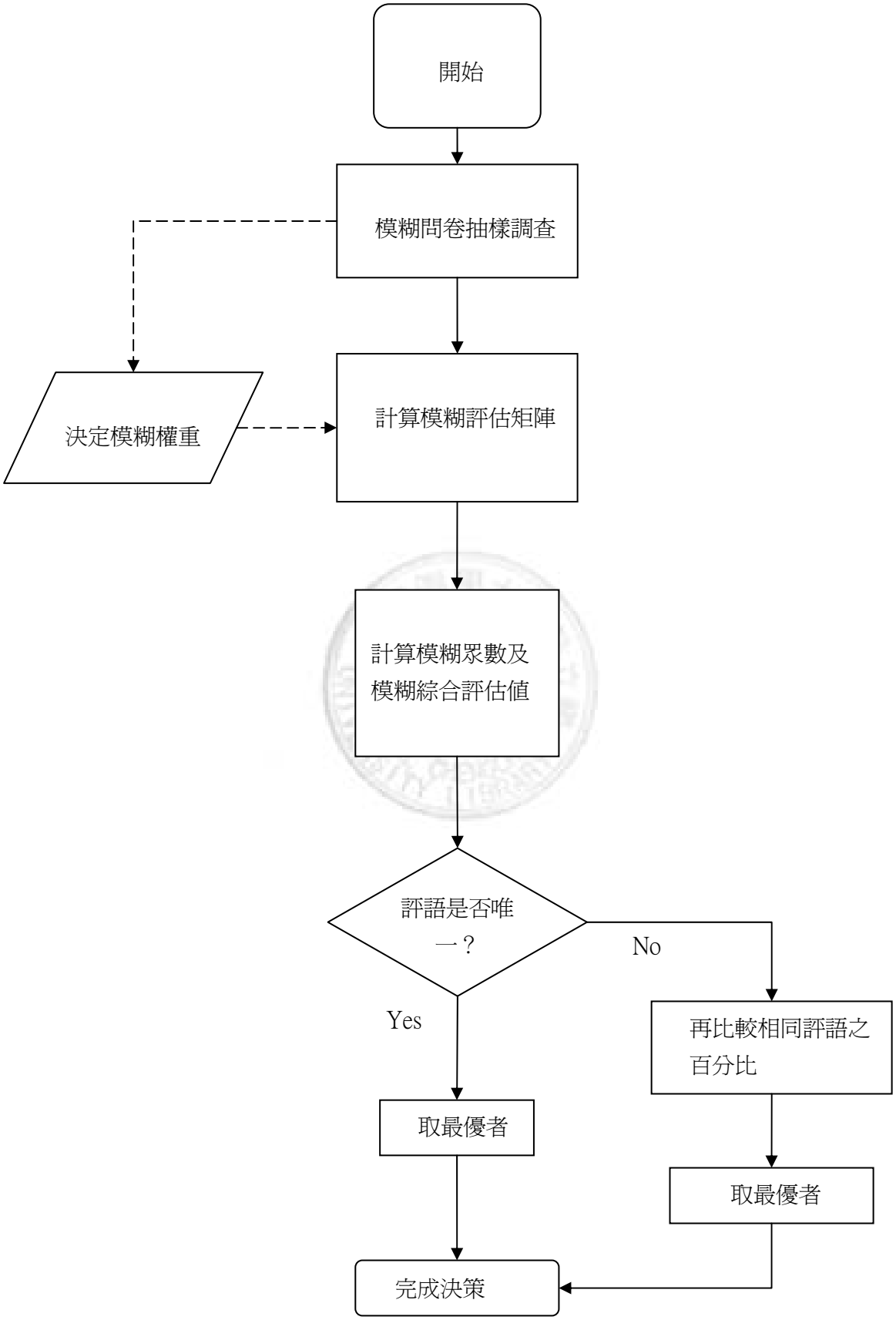

圖 2.1 模糊評估系統分析之流程圖

2.1 模糊系統

傳統的系統分析其數量方法均以實數爲係數，本研究考慮以模糊數爲基礎，系統分析目的乃針對系統所面臨的問題，蒐集相關的資料，以了解產生此問題的原因所在，並進而提出解決問題的方法與可行的邏輯方案，以滿足系統的需求進而達到預設的目標。黃敬仁(2001)

在傳統數學邏輯觀念（古典集合）對於元素和集合的關係，係以特徵函數(characteristic function)辨識，即 $\chi_A(x)=\begin{cases}1\ ,\ if\ \ x\in A\\ 0\ ,\ if\ \ x\notin A\end{cases}$。若將此集合關係應用於描述某些實務現象時，常發現不合理的情形。因爲某些現象並不一定存在非此即彼的關係(Nguyen & Wu, 2006)。

模糊數大致可分爲離散型(discrete type)及連續型(continuous type)兩種。離散型的隸屬度函數是直接給予有限模糊集合內每個元素的隸屬度，並以向量的形式表現出來；而連續型隸屬度函數則有幾種常用的函數形式($S-$函數、$Z-$函數、$\pi-$函數、三角形函數、梯形函數)來描述模糊集合。在考慮具有模糊特性的問項時，資料本身便具有不確定性與模糊性，所以我們先定義模糊數如下：

定義 2.1 模糊數(見吳柏林(2005))

設 U 為一論域，令 $\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$ 為論域的因子集。u 為一對應到 $[0,1]$ 間的實數函數，即 $u:U\to[0,1]$。假若佈於論域 U 之一述句 X 其相對於因子集的隸屬度函數以 $\{\mu_1(X),\mu_2(X),\ldots,\mu_n(X)\}$ 表示，則在離散(discrete)的情形下，述句 X 的模糊數可表示成：

$$\mu_U(X)=\frac{\mu_1(X)}{A_1}+\frac{\mu_2(X)}{A_2}+\ldots+\frac{\mu_n(X)}{A_n}$$

其中＋是或的意思，$\frac{\mu_i(X)}{A_i}$ 表示述句 X 隸屬於因子集 A_i 的程度。當 U 為連續(continuous)時，述句 X 的模糊數可表示成：$\mu(X)=\int_{x\in X}\frac{u_i(X)}{A_i}$。

2.2 決定模糊權重

定義 2.2 偏好序列(utility sequence)（見吳柏林(2005)）

假設偏好序列為 $r=\{r_1,r_2,\cdots,r_f\}$，則定義 $r_1 \prec r_2 \prec \cdots \prec r_f$ 為偏好遞增序列(utility increasing sequence)；反之，$r_1 \succ r_2 \succ \cdots \succ r_f$ 為偏好遞減序列(utility decreasing sequence)。

定義 2.3 模糊權重(fuzzy weight, FW)（見吳柏林(2005)）

假設論域集合 $S=\{S_1,S_2,\cdots,S_k\}$，偏好序列 $r=\{r_1,r_2,\cdots,r_f\}$，且 S_i 在 r_f 的隸屬度為 $\mu_{S_i f}$。則論域因子的模糊權重 $FW=(FW_{S_1},\cdots,FW_{S_k})$ 定義為

$$FW_{S_i}=\sum_{l=1}^{f}\mu_{S_i l}\Big/r_l=\mu_{S_i 1}\big/r_1+\mu_{S_i 2}\big/r_2+\cdots+\mu_{S_i f}\big/r_f \quad ;i=1,\cdots,k$$

定義 2.4 模糊相對權重(fuzzy relation weight, FRW)（見吳柏林(2005)）

設論域集合 $S=\{S_1,S_2,\cdots,S_k\}$，偏好序列 $r=\{r_1,r_2,\cdots,r_f\}$，且 S_i 在 r_j 的隸屬度為 $\mu_{S_i j}$。則模糊相對權重 $FRW=(FRW_{S_1},\cdots,FRW_{S_k})$ 為由模糊權重 FW 採 m 等地評分標準法轉換所得。若 $r_1 \prec r_2 \prec \cdots \prec r_f$，則 $FRW_{S_i}=\dfrac{\sum_{l=1}^{f} l\cdot\mu_{S_i l}}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{f} l\cdot\mu_{S_i l}}$ $,i=1,\cdots,k$

反之，若 $r_1 \succ r_2 \succ \cdots \succ r_f$ 時，則 $FRW_{S_i}=\dfrac{\sum_{l=1}^{f}(n-l+1)j\cdot\mu_{S_i l}}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{f}(n-l+1)\cdot\mu_{S_i l}}$ $,i=1,\cdots,k$

爲了求論域因子之模糊相對權重，故先行設計一個模糊評鑑表(fuzzy evaluation table)，該問卷形式如下：

表 2.1 模糊評鑑表 A 在偏好序列 U 的一般隸屬度為 μ_A

S \ r	r_1	r_2	…	r_f
S_1	$\mu_{S_1 1}$	$\mu_{S_1 2}$	…	$\mu_{S_1 f}$
S_2	$\mu_{S_2 1}$	$\mu_{S_2 2}$	…	$\mu_{S_2 f}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
S_k	$\mu_{S_k 1}$	$\mu_{S_k 2}$	…	$\mu_{S_k f}$

假設 $r_1 \prec r_2 \prec \cdots \prec r_f$，以此問卷訪問專家對論域集合在各偏好序列下的隸屬程度。這

些專家評分平均後的各因子之偏好度，即爲模糊權重集。根據定義 2.3 知，論域之各因子的模糊權重分別爲

$$FW_{S_1}=\sum_{l=1}^{f}\frac{\mu_{S_1 l}}{r_l}=\frac{\mu_{S_1 1}}{r_1}+\frac{\mu_{S_1 2}}{r_2}+\cdots+\frac{\mu_{S_1 f}}{r_f},$$

$$FW_{S_2}=\sum_{l=1}^{f}\frac{\mu_{S_2 l}}{r_l}=\frac{\mu_{S_2 1}}{r_1}+\frac{\mu_{S_2 2}}{r_2}+\cdots+\frac{\mu_{S_2 f}}{r_f},$$

$$\vdots$$

$$FW_{S_k}=\sum_{l=1}^{f}\frac{\mu_{S_k l}}{r_l}=\frac{\mu_{S_k 1}}{r_1}+\frac{\mu_{S_k 2}}{r_2}+\cdots+\frac{\mu_{S_k f}}{r_f}$$

再利用 m 等地評分標準法，分別計算論域中各因子的模糊相對權重 FRW 。所謂 m 等地評分標準法，就是將 m 個偏好序列 r 視爲 f 個等第，對此 f 個偏好序列取數量化。亦即，給定 r_1 爲一分，給定 r_2 爲二分，如此繼續到給定 r_f 爲 f 分。根據所得的隸屬度乘上其相對應的分數，分別求出它們相對的模糊權重分佈，則爲各因子的模糊相對權重。故以定義 2.4 的表示法，各因子的模糊相對權重分別爲

$$FRW_{S_1}=\frac{\sum_{l=1}^{f} l\cdot\mu_{S_1 l}}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{f} l\cdot\mu_{S_i l}}\ ,\quad FRW_{S_2}=\frac{\sum_{l=1}^{f} l\cdot\mu_{S_2 l}}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{f} l\cdot\mu_{S_i l}}\ ,\quad \cdots\cdots\cdots,\quad FRW_{S_k}=\frac{\sum_{l=1}^{f} l\cdot\mu_{S_k l}}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{f} l\cdot\mu_{S_i l}}$$

2.3 模糊統計量

模糊樣本眾數(fuzzy sample mode)

眾數爲求社會共識的一個統計量，而求模糊樣本得到的眾數，我們定義爲模糊樣本眾數(fuzzy sample mode)。

定義 2.5 離散型模糊樣本眾數(見吳柏林(2005))

設 U 為一論域，令 $L=\{L_1,L_2,\cdots\cdots,L_k\}$ 為佈於論域 U 上的 k 個語言變數，$\left\{x_i=\frac{m_{i1}}{L_1}+\frac{m_{i2}}{L_2}+\cdots\cdots+\frac{m_{ik}}{L_k}\ ,i=1,2,\cdots n\right\}$ 為一組模糊樣本 $(\sum_{j=1}^{k} m_{ij}=1)$ 。令 $T_j=\sum_{i=1}^{n} m_{ij}$ 。則我們稱擁有最大的 T_j 值之 L_j 為模糊樣本眾數(*fuzzy mode* 簡記 *Fmode*)，即

$$\text{Fmode}=\{\ \mathrm{L_j}:\text{相對之 j 項，使得 } \mathrm{T_j}=\max_{\mathrm{j=1,2,\ldots,k}}\mathrm{T_j}\}$$

假若存在兩組以上之 L_j 其最大 T_j 值相同，則我們稱此組資料具有多個模糊樣本眾數或是具有多重共識。

例 2.1 題庫試題難度預估

在編製數學科題庫試題過程中，商請數學科教師根據其專業，進行選題並預估其對學生而言之難易隸屬度 $P(0 \le P \le 1)$。今選取 10 位數學科教師以 $T_1, T_2, \cdots, T_{10}$ 表示，請他們憑藉著專業與經驗，預估某一試題難易隸屬度，利用 $\{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5\}$ 分別表示 {極難,難,中等,容易,極容易}。此 10 位數學科教師對該題難易度預測之隸屬度如表 2.2 所示。

表 2.2 試題難易度預測之隸屬度

語言變數難度 / 教師	L_1 = 極難	L_2 = 難	L_3 = 中等	L_4 = 容易	L_5 = 極容易
T1			0.4	0.6	
T2		0.7	0.3		
T3		0.4	0.6		
T4	0.4	0.6			
T5				0.1	0.9
T6			0.3	0.7	
T7			0.4	0.6	
T8		0.4	0.6		
T9			0.1	0.1	0.8
T10	0.6	0.4			
Total	1.0	2.5	2.7	2.1	1.7

若以傳統 5 等地量表調查，則發現預測如下表 2.3：

表 2.3 試題難易度之預測

語言變數難度 / 教師	L_1 = 極難	L_2 = 難	L_3 = 中等	L_4 = 容易	L_5 = 極容易
T1				○	
T2		○			
T3			○		
T4		○			
T5					○
T6				○	
T7				○	
T8			○		
T9					○

T10	○				
Total	1	2	2	3	2

利用傳統眾數方法得知，對該題難度預測的結果為「容易」的數學科教師最多（1、6、7 三票）。但在 10 位數學科教師中，僅採用其中 3 位所預測的結果，似乎不太合理。若我們利用模糊隸屬度計算，該題難度的預測結果，「中等」隸屬度總和 2.7 最大，為其模糊樣本眾數。相較之下，利用模糊樣本眾數會比利用傳統眾數要來得客觀些，也更能取得大家對該題難度預測之共識。