3.模糊評估過程

3.1 模糊評估

在一般的綜合評估中有以下三個要素：

1. 因素集$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$：被評估物件的各因素組成的集合。其中，u_i表示問題要考慮的因素，$i=1,2,\cdots,n$，共有n個。
2. 判斷集$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$：評語組成的集合。其中，v_i表示問題要判斷的等級，$i=1,2,\cdots,m$，共有m個。
3. 因素判斷：亦即對單個因素$u_i\,(i=1,\cdots,n)$的評估，得到V上的對應，即$u_i\rightarrow(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{im})$。如此可得到一個$n\times m$之評估矩陣$R$。

由於各因素地位未必相等，因此在實際應用中需要對各因素進行加權處理。使用U上的模糊相對權重$FRW=[\ FRW_{u_1},FRW_{u_2},\cdots,FRW_{u_n}\ ]$表示各因素的權數分配，與評估矩陣$R$的合成，稱之爲綜合評估模型。

其中各個評估因素重要程度不同，因此對各個因素u_i之重要程度計算不同的模糊相對權重$FRW_{u_i}\ (i=1,\cdots,n)$。於是有

$$FRW\cdot R=B=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$$

其中：“$\cdot$”爲FRW與R爲傳統矩陣相乘運算，$FRW=[\ FRW_{u_1},FRW_{u_2},\cdots,FRW_{u_n}\ ]$，$\sum_{i=1}^{n}FRW_{u_i}=1$，$FRW_{u_i}\geq 0$，

$R=(r_{ij})_{n\times m}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix}, r_{ij}\in[0,1]$，它是由所有對單因素判斷的 Fuzzy 集組成的。$b_j=\sum_{i=1}^{n}FRW_{u_i}r_{ij}\ ,j=1,\cdots,m$是爲評估函數。

3.2 對於連續型模糊數評鑑因子之分析

令$[a_i,b_i]$爲一組模糊評估資料，我們可應用模糊迴歸(Fuzzy linear regression)爲工具來分析連續型模糊數之評鑑因子(自變數)與綜合評分(因變數)之關係。以三角形隸屬函數之樣本爲例：首先採用最小平方原則，將樣本整理成上邊界點與下邊界點二部分。再各自利用上邊界點與下邊界點求出二條最小平方直線，最後以這二條直線作爲三角形隸屬函數的邊界，如此便可建構出一模糊迴歸模式。

模糊迴歸模式架構：

我們常使用迴歸來描述自變數 X 和因變數 Y 之間的因果關係，而迴歸參數的估計是迴歸分析的主要研究課題。

若由模糊觀點套用迴歸分析來處理模糊資料問題，便稱爲模糊迴歸分析。提出模糊迴歸分析的學者首推 Tanaka, Uejima & Asai(1980)。當資料量不足、投入變數與輸出變數間的關係存在模糊性的關係、或收集的資料爲模糊資料，我們可以採模糊迴歸模式處理。

一般模糊迴歸能夠處理的樣本型式有兩種：一種是實數值樣本$(\mathbf{x}_i, y_i)$，其中$\mathbf{x}_i$爲實數向量，y_i爲觀測到的實數值；一種是模糊數樣本$(\mathbf{x}_i, Y_i)$，其中Y_i非屬實數的型式，而是觀測到的模糊數。

線性模糊迴歸常表示成

$$\tilde{Y}(\mathbf{x}_i) = A_0 + A_1 x_{1i} + A_2 x_{2i} + \ldots + A_p x_{pi}\text{；} \tag{3.1}$$

其中$\mathbf{x}_i = (1, x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{pi})^t$爲自變數向量，$\tilde{Y}(\mathbf{x}_i)$爲模糊因變數，$A_m, m = 1,2,\ldots,p$爲模糊參數。一般是假設模糊參數$A_m$具有三角形隸屬度函數（triangular membership function），因此，模糊因變數$\tilde{Y}(\mathbf{x}_i)$的隸屬度函數也屬三角型式。

對式(3.1)中的模糊參數A_m進行估計時，一般是先假設A_m的隸屬函數爲三角型式。A_m的隸屬函數表達如下：

$$\mu_{A_m}(t) = \max\left\{ 1 - \frac{|t - c_m|}{s_m} \ , \ 0 \right\}, \quad -\infty < t < \infty \text{；}$$

其中c_m爲三角形的中點；s_m是三角形的分佈半徑。而c_m、s_m和隸屬函數$\mu_{A_m}(t)$的關係如圖 3.1 所示：

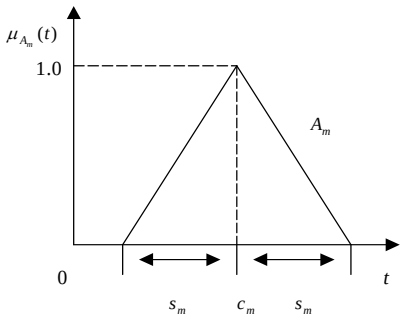

圖 3.1 c_m、s_m在$\mu_{A_m}(t)$中的位置與分佈

爲了表示方便起見，我們可令模糊參數 $A_m = \langle c_m ; s_m \rangle$，則式(3.1)的模糊迴歸可改寫成

$$\tilde{Y}(\mathrm{x}_i) = \langle c_0 ; s_0 \rangle + \langle c_1 ; s_1 \rangle x_{1i} + \langle c_2 ; s_2 \rangle x_{1i} + \ldots + \langle c_p ; s_p \rangle x_{pi} \ .$$

因此，模糊因變數 $\tilde{Y}(\mathbf{x}_i)$ 的隸屬函數也屬三角型式，可表示成

$$\mu_{\tilde{Y}(\mathbf{x}_i)}(t) = \max\left\{ 1 - \left| t - \sum_{m=0}^{p} c_m x_{mi} \right| \Big/ \sum_{m=0}^{p} s_m \left| x_{mi} \right| \ , \ 0 \right\}, \ -\infty < t < \infty \ . \qquad (3.2)$$

至於式(3.2)的證明細節可參照 Tanaka, Uejima & Asai(1982)的研究。

推論模糊迴歸模式，首先須參數估計。參數估計之方法有兩種：一種是利用線性規劃的技巧，來尋求一組能將實數樣本 $(\mathbf{x}_i , y_i)$ 或模糊數樣本 $(\mathbf{x}_i , Y_i)$ 全部包括住的區間，再將三角形隸屬函數套用在此區間上，此法最常被使用。

另一種估計方法則是採用最小平方的原則，先將樣本整理成上邊界點與下邊界點二部分，各自利用上邊界點與下邊界點求出二條最小平方直線，以這二條直線作爲三角形隸屬函數的邊界。詳見吳柏林、曾能芳(2002)。

運用最小平方法，以所有樣本的左端點 $\{(\mathrm{x}_i , y_{iL}) \mid i = 1,2,\ldots,n\}$ 配置一迴歸直線，稱之爲左端直線估計式

$$y_L(\mathbf{x}_i) = \hat{L}_0 + \sum_{m=1}^{p} \hat{L}_m x_{mi} \ , \ i = 1,2,\ldots,n \ ;$$

其中 $\hat{L}_m$ 爲模糊迴歸係數，再以所有的右端點 $\{(\mathrm{x}_i , y_{iR}) \mid i = 1,2,\ldots,n\}$ 配置右端直線估計式

$$y_R(\mathbf{x}_i) = \hat{R}_0 + \sum_{m=1}^{q} \hat{R}_m x_{mi} \ , \ i = 1,2,\ldots,n \ .$$

若左右端點配適結果，其變項並不一致時。我們取此兩集合之交集，並以此組變數 s 再重新得到左右端直線估計式

$$y_L(\mathbf{x}_i) = \hat{L}_0 + \sum_{m=1}^{s} \hat{L}_m x_{mi} \ , \ i = 1,2,\ldots,n \ ; \ y_R(\mathbf{x}_i) = \hat{R}_0 + \sum_{m=1}^{s} \hat{R}_m x_{mi} \ , \ i = 1,2,\ldots,n \ .$$

假設樣本的左右端點隸屬於$\tilde{Y}(\mathbf{x}_i)$的隸屬度會儘量地接近 H，所以，我們以這兩條函式來估計$\tilde{Y}(\mathbf{x}_i)$之 H 截集（H-cut）的左右邊界，即

$$[\tilde{Y}(\mathrm{x}_i)]^H = \left[\hat{L}_0 + \sum_{m=1}^{s}\hat{L}_m x_{mi}\ ,\ \hat{R}_0 + \sum_{m=1}^{s}\hat{R}_m x_{mi}\right].$$

如此可導出$\tilde{Y}(\mathbf{x}_i)$的隸屬函數爲

$$\mu_{\tilde{Y}(\mathbf{x}_i)}(t) = max\left\{\ 1-\left|t-\sum_{m=0}^{s}\left(\frac{\hat{R}_m+\hat{L}_m}{2}\right)x_{mi}\right| \Big/ \sum_{m=0}^{s}\left(\frac{\hat{R}_m-\hat{L}_m}{2(1-H)}\right)\left|x_{mi}\right|\ ,\ 0\ \right\}; \tag{3.3}$$

其中$x_{i0}=1$。而且模糊參數A_m的隸屬函數爲

$$\mu_{A_m}(t) = \max\left\{\ 1-\frac{\left|t-\left(\frac{\hat{R}_m+\hat{L}_m}{2}\right)\right|}{\left(\frac{\hat{R}_m-\hat{L}_m}{2(1-H)}\right)}\ ,\ 0\ \right\}.$$

即

$$A_m = \left\langle \frac{\hat{R}_m+\hat{L}_m}{2};\ \frac{\hat{R}_m-\hat{L}_m}{2(1-H)}\right\rangle; \tag{3.4}$$

其中$\frac{\hat{R}_m+\hat{L}_m}{2}$是三角形底邊中點，$\frac{\hat{R}_m-\hat{L}_m}{2(1-H)}$是分佈半徑。如此便得到一組估計的模糊迴歸模式

$$\tilde{Y}(\mathbf{x}_i) = \left\langle \frac{\hat{R}_0+\hat{L}_0}{2};\frac{\hat{R}_0-\hat{L}_0}{2(1\text{-}H)}\right\rangle + \left\langle \frac{\hat{R}_1+\hat{L}_1}{2};\frac{\hat{R}_1-\hat{L}_1}{2(1\text{-}H)}\right\rangle x_{1i} + \left\langle \frac{\hat{R}_2+\hat{L}_2}{2};\frac{\hat{R}_2-\hat{L}_2}{2(1\text{-}H)}\right\rangle x_{2i}$$
$$+\ .....+\left\langle \frac{\hat{R}_s+\hat{L}_s}{2};\frac{\hat{R}_s-\hat{L}_s}{2(1\text{-}H)}\right\rangle x_{si}\ .$$

例 3.1 蓋洛普市場調查公司認為王建民公仔的銷售量Y，是否受到投資在電視上的廣告費用X_1和投資在報紙上的廣告費用X_2所影響。表 3.1 為此樣本資料（單位：10 萬元），我們建構一組估計的模糊迴歸模式如下。

表 3.1 廣告費與銷售量資料

X_1	[1,3]	[1,3]	[1,3]	[1,3]	[2,4]	[2,4]	[2,4]	[2,4]	[3,5]
X_2	[1,3]	[2,4]	[3,5]	[4,6]	[1,3]	[2,4]	[3,5]	[4,6]	[1,3]
Y	[7.7,9.7]	[9.5,11.5]	[10,12]	[11,13]	[11.7,13.7]	[11.8,13.8]	[13.7,15.7]	[14.3,16.3]	[15.1,17.1]

運用最小平方法將所有樣本的左端點(x_i, y_{iL})配置左端直線函式，

$$y_L(x_i) = 3.61 + 3.45x_{i1} + 0.98x_{i2}$$

同理，運用最小平方法，以所有樣本的右端點(x_i, y_{iR})配置右端直線函式，

$$y_R(x_i) = -3.25 + 3.45x_{i1} + 0.98x_{i2}$$

根據式(3.4)模糊參數 $A_j = \langle c_j; s_j \rangle$ 的計算公式，可求得 $A_0 = \langle 0.18;4.90 \rangle$，$A_1 = \langle 3.45;0.00 \rangle$，$A_2 = \langle 0.98;0.00 \rangle$.

如此便得到王建民公仔的銷售量$\tilde{Y}$、投資在電視上的廣告費用 x_{i1} 和投資在報紙上的廣告費用 x_{i2} 的一組估計模糊迴歸模式

$$\tilde{Y}(x_i) = \langle 0.18;4.90 \rangle + \langle 3.45;0.00 \rangle x_{i1} + \langle 0.98;0.00 \rangle x_{i2} \ .$$

我們以此模糊函式來表示王建民公仔的銷售量$\tilde{Y}(x_i)$和投資在電視上的廣告費用 x_{i1} 和投資在報紙上的廣告費用 x_{i2} 之間的因果關係。