第壹章　緒論

第一節　研究動機

相信許多人在國小的自然課時都曾做過“利用放大鏡升火”的實驗吧！在日正當中的午時，只要帶著一個放大鏡以及一張紙，將紙放在操場上，然後在紙的上方移動放大鏡的位置，調整到剛好出現一個小亮點在紙上，沒多久的時間，這張紙很快就會著火囉！這是怎麼一回事呢？其實這個實驗就是利用“拋物線的光學性質”讓紙張著火的，而那個會讓紙張著火的小小亮點，就是拋物線的焦點。在我們的日常生活裡，類似的例子其實是很常見的，如：雷達就是一個以拋物線繞著它的對稱軸旋轉一圈的拋物面，它可以把遠處射來的光或電波聚焦在焦點處，或從焦點發出訊號，讓很遠很遠的人都能收到！太陽爐的建造原理也是利用拋物面的聚光性質，它能將太陽光反射到焦點上，快速地加熱焦點上的物體！

拋物線是生活中常見的幾何圖形之一，在 1980 年，Horton 兄弟發明以拋物線為機翼流線之飛機，讓飛機能如鳥類在空中飛行之姿態，既好看又可減低風阻。受到地球引力的影響，水柱呈拋物線運動，其原因是重力加速度，使物體落下的距離為時間的二次函數所致。此外，噴泉、噴水池、火山爆發、拋石頭的軌跡等，也都是在生活上常看到的拋物線實例。在地球上的物體作拋體運動時的軌跡因受重力影響而呈現拋物線，那麼在太空中運行的物體呢？偉大的物理學家克卜勒（Johanes Kepler，1571~1630 年）曾在其克卜勒定律裡提出“地球繞行太陽的軌跡為一橢圓”，並用能量守恆的觀點說明地球與太陽的連線在相同時間內掃過相同的面積，所以在近日點時地球運行的速度較快。同理，在太空中還有許多星球的運行亦是遵循此定理作橢圓軌道運行。

橢圓圖形在實際生活中並不像拋物線那麼常見，但在其應用上，橢圓也有類似拋物線“聚焦”之光學性質。假想現在我們正身處在一個封閉的古羅馬教堂裡，其在這教堂的屋頂是以橢圓形狀設計而成的，有兩個人分別站在橢圓的兩個焦點，當其中一個人小聲說話時，站在另一焦點上的人即能透過聲波的反射，清楚地聽到對方所說的話。

拋物線與橢圓的光學性質可以在生活上如此地被靈活運用，而在中學生的幾何學習上，許多研究者（梁勇能, 1999；蔡志仁, 1999；黃哲男, 2001）都指出利用電腦輔助教學可幫助學生對圖像的建構與學習，蔡志仁（1999）並研究探討中學生在橢圓概念表徵結構的學習歷程，且依據此結果設計動態連結多重表徵之視窗學習環境，觀察學生在此學習環境中，對橢圓的不同表徵及表徵之間的連結。然而，在學生學習完橢圓的單元後，是否有能力與先前才剛學過的拋物線作連結呢？換句話說，學生是否能深入比較或直接指出這兩種圖形在其結構上與性質上的差異？此部份亦是研究者當下想要探討的課題。

拋物線是生活當中常見到的幾何圖形之一，如拋物線形拱橋、丟球時球在空中劃過的軌跡、玩跳繩時繩子的形狀、…等。在國中課程教過直角座標平面後，學生學習如何在座標平面上以描點的方式畫出一次函數與二次函數的圖形，只是當時未深入探討二次函數的圖形。直到高中，〝拋物線〞的名詞才正式於課本中出現。在高中課程裡曾有兩次介紹拋物線，分別是在高一上學期第四章第四節以及高二下學期第一章第二節。在高一上學期的單元裡，主要是從〝函數〞的概念去介紹一元二次函數($y = f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$)的圖形，從圖形中更加深『當拋物線的開口朝上或開口朝下時，則 y 是 x 的函數』之概念。也就是說，高中一年級所教的拋物線只有開口朝上與開口朝下，至於開口朝左與開口朝右，甚至是斜拋的類型，都是在高二介紹完拋物線的定義才完整的呈現。而生活中的拋物線或拋物面開口並不侷限於開口朝上下，所以在高二繼續將拋物線的課程做更深一層的認識是有必要的。

在此先對高一上學期與高二下學期課本中拋物線教材做了一個比較：

表 1-1-1　高一與高二拋物線課程的比較

高一上學期	1、在多項函數單元中介紹，偏重函數的概念。 2、二次函數($y=f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$)的圖形為拋物線。 3、以二次項係數$a$的正負判斷開口方向，以$\lvert a\rvert$比較開口大小。 4、以配方法找出拋物線的頂點座標。 5、拋物線的頂點即圖形之最高或最低點，因此頂點的y座標即為整個函數的最大或最小值。 6、拋物線是一個對稱圖形，有對稱軸。
高二下學期	1、在圓錐曲線單元中介紹，偏重幾何的概念。 2、滿足$\overline{PF}=d(P,L)$的動點P所形成的圖形為拋物線。 (其中F為拋物線的焦點，L為準線) 3、由拋物線的定義式$\overline{PF}=d(P,L)$推導出 (1) 開口朝上：$(x-h)^2=4c(y-k)$，$c>0$ (2) 開口朝下：$(x-h)^2=4c(y-k)$，$c<0$ (3) 開口朝右：$(y-k)^2=4c(x-h)$，$c>0$ (4) 開口朝左：$(y-k)^2=4c(x-h)$，$c<0$ (以上動點$P(x,y)$，頂點$V(h,k)$，焦距為$\lvert c\rvert$) (5) 斜拋：以拋物線的定義式$\overline{PF}=d(P,L)$表示 4、給予拋物線標準式或定義式，能反推回找拋物線的焦點、準線、頂點、對稱軸、正焦弦長等。

比較高一與高二所學的拋物線課程，不難發現其最大的差別是高一所教授的拋物線只侷限於開口朝上與開口朝下，到了高二才又從定義式裡去引出開口朝

左、開口朝右以及斜拋的形式，並將高一學的以二次函數表示的拋物線式子($y=f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$)改以標準式($(x-h)^2=4c(y-k)$)取代。

因此，當一個高二的學生學完整個拋物線的各種型式後，此時只要講到拋物線，就不能只有開口朝上與朝下這兩種形式了，也不能只有 $y=ax^2+bx+c$ 或 $y=a(x-h)^2+k$ 這樣的二次函數的想法，而是應當對整個拋物線有更深一層的圖形認識，以及知道焦點、準線、頂點、對稱軸、正焦弦長等這些名詞與拋物線的關係。

從以上的探討中，我們知道高二學生如果想以標準式或一般式來假設出拋物線方程式，就必須要先判斷出圖形的開口方向，然後將其圖形對應到正確的標準式或一般式，才能進而完成解題。但從研究者的教學經驗裡，發現許多學生在這一部分的連結並不能很迅速，甚至還會有判斷錯誤的情形出現，究竟高二學生在拋物線單元的學習上會有哪些困難？以及學生產生錯誤原因是什麼？這些問題都是值得深入探討的。

迷思概念的形成有的研究認為是缺乏適當的認知基模，另一種研究則說明學生在追求知識的過程扮演主動建構的角色，會將其心中另有的、堅固的、持久的概念融入學習情境之中（Stavy & Tirosh, 1999）。本研究將從質性的訪談以及量化的資料分析當中，找出高二學生在拋物線上的學習盲點，並探索學生在拋物線與橢圓的圖像表徵上有何迷思之處，也希望能透過此研究的歸納整理後，提供日後教師在教學上之參考。

第二節 研究目的

本研究為藉由評量方式探討高二學生在學完拋物線與橢圓單元後，對拋物線單元可能遇到什麼學習困難或持有什麼迷思概念，且對照教師手冊中與本單元相關的教學目標，整體而言，本研究的研究目的有三，詳列如下：

一、探討高二學生學完拋物線單元後，對其定義、方程式、開口方向以及其性質的認識與理解之情形。

二、探討高二學生在學完拋物線單元後，於解生活情景中的拋物線問題時會遇到什麼困難。

三、探討高二學生學完拋物線與橢圓單元後，對拋物線與橢圓的圖像關係是否有區別的能力。

第三節 研究問題

依據上述各項研究目的，本研究延伸出的研究問題如下：

一、探討高二學生學完拋物線單元後，對其定義、方程式、開口方向以及其性質的認識與瞭解之情形。

（一）高二學生是否能利用標準式（$(x-h)^2=4c(y-k)$與$(y-k)^2=4c(x-h)$）、一般式（$y=ax^2+bx+c$與$x=ay^2+by+c$）、以及定義式（$\overline{PF}=d(P,L)$，其中P為拋物線上的動點，F為焦點，L為準線）來判斷拋物線方程式？又其在標準式、一般式、以及定義式的運用能力上是否有差異？若有，其差異為何？

（二）給予準線與焦點的相對位置後，高二學生是否能利用拋物線的定義來找出拋物線上的點？

（三）高二學生分別從標準式、一般式、定義式判斷拋物線開口方向的能力是否有差異？又其差異為何？

（四）高二學生從準線、對稱軸、正焦弦等的走向來判斷拋物線的開口方向的表現能力為何？

（五）高二學生是否瞭解拋物線的“正焦弦長”與“開口大小”之間關係？

二、探討高二學生在學完拋物線單元後，於解生活情景中的拋物線問題時會遇到什麼困難。

（一）高二學生是否能應用拋物線的知識來解決陌生的生活情境題？可能遇到的困難為何？

三、探討高二學生學完圓錐曲線單元後，對拋物線與橢圓的圖像關係是否有區別的能力。

（一）高二學生對於「分割橢圓後，是否會形成拋物線」這一個問題，是否會受圖形或其他迷思概念所影響？他們受影響的原因為何？

第四節 名詞釋義

1、圓錐曲線：由一個圓錐及一個平面的交集所產生的圖形。

2、拋物線：在座標平面上，所有“到一個定直線外之一定點的距離，等於到一定直線的距離”之點所形成的圖形，稱為拋物線。其中定直線稱為拋物線之準線，定點則為拋物線之焦點。

3、橢圓：在座標平面上，所有到兩定點的距離和為定值 $2a$ 的動點所形成的軌跡為橢圓。其中 $2a$ 的值必需大於此兩定點的距離，且此兩定點稱為橢圓的焦點。