第貳章　文獻探討

本章旨在探討與本研究相關的文獻。本章共分為四節，第一節探討圓錐曲線的發現；第二節探討幾何概念與幾何解題之研究的發展；第三節探討圓錐曲線的相關研究；第四節為分析與本研究相關的高二數學課程。

第一節　圓錐曲線的發現

圓錐曲線的起源一開始是為了要解決「倍立方問題」而推導出來的幾何曲線，而有關圓錐曲線的問題，在古代數學經常出現，例如阿基米德（Archimedes, 西元前 287~212）就曾經以窮舉法求拋物線所圍部份區域的面積，且這個論題常被指為積分概念的開端。到了十七世紀時，有很多技術上的問題也需要利用各種曲線加以描述。例如：在軍事上欲瞭解砲彈投射的運動路徑，也使得拋物線等圓錐曲線的研究勢在必行。

1、「倍立方問題」與圓錐曲線

關於圓錐曲線的問題，發源甚早。根據資料顯示，圓錐曲線的研究是古希臘人為了「倍立方問題」的幾何研究，才引出圓錐曲線的概念。所謂「倍立方問題」，是：“利用圓規與直尺的幾何作圖法，能否作出一個正立方體，使其體積為已知正立方體體積的兩倍？”從幾何作圖的觀點而言，要利用圓規和直尺作出一正立方體，且其體積是另一立方體體積的兩倍，那麼就必須能由長度為 a 的線段作出長度為 $\sqrt[3]{2}a$ 的線段。根據希臘數學家希波克拉提斯（Hippocrates of Chios, 西元前五世紀）的研究，認為如果能作出兩個長分別為 x, y 的線段，使

$$x : a = y : x = 2a : y$$

時，$\frac{x}{a}$ 的值就是 $\sqrt[3]{2}$，那麼「倍立方問題」就可以解決了。

從上面的比例式我們可以得知 x, y 兩數滿足下列的方程組：

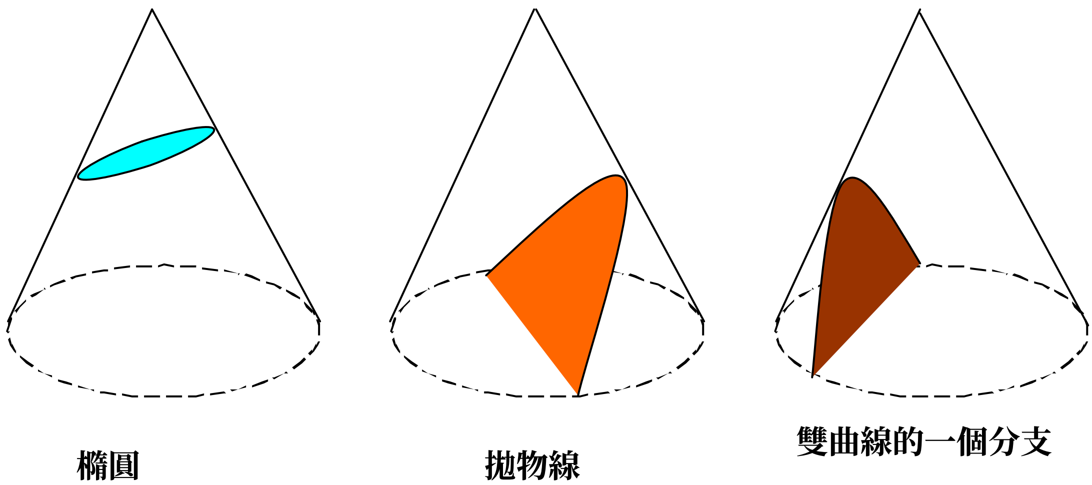
$$x^2 = ay, y^2 = 2ax, xy = 2a^2$$

若我們就解析幾何的觀點來看，這三個方程式的所代表的圖形其實就是拋物

線與雙曲線，因此，(x, y) 的解是兩拋物線，或一拋物線、一雙曲線的交點的座標。所以，我們可以說「倍立方問題」引出了圓錐曲線的概念。

約西元前四百年左右，古希臘數學家梅納克門斯（Menaechmus，西元前 350）為了解決「倍立方問題」，發現了拋物線、橢圓、雙曲線（其中一支）等幾何圖形。這些圖形是以一個平面切割圓錐，隨著平面與圓錐底夾角的變動而形成不同圖形的截痕。

圖 2-1-1　圓錐截痕



此外，古希臘的歐幾里得（Euclid，西元前三世紀）及阿基米得（Archimedes，西元前 287~212）也都曾討論過這些截痕所產生的曲線，但並不完整。

2、阿波羅尼斯與圓錐曲線

首先對錐線做系統化研究的是古希臘數學家阿波羅尼斯（Apollonius of Perga，262~190B.C.,希臘天文學家及數學家），他將前人的著作及結論加以整理，而完成了一部最早關於錐線的專書，這本書的書名為 Conic Section，共分八卷，包含了 487 個定理，其內容之深之廣，使希臘幾何學達於顛峰，也為 Apollonius 贏得「偉大幾何學家」的雅稱。這本書詳細討論錐線的各種性質，其重要的理論包括如下：

（1） 首先提出拋物線、橢圓、雙曲線的名詞。在阿波羅尼斯之前都是以這三種曲線的來源命名，例如：拋物線稱為直角圓錐的截痕、橢圓稱為銳角圓錐的截痕、雙曲線稱為鈍角圓錐的截痕。而阿波羅尼斯只用一個圓錐（不論是直圓錐或斜圓錐），依截平面的斜度不同，而分別截出拋物線、橢圓、雙曲線，他同時也發現雙曲線有兩支。

（2） 提出如何尋找錐線的直徑、對稱軸及有心錐線的對稱中心。

（3） 討論極與極軸的調和性質。

（4） 利用極限的概念來作過錐線外一點的切線。

（5） 討論從已知點至錐線的極大與極小距離。

（6） 討論錐線之全等和相似問題。

（7） 提出共軛直徑。

由以上可知，Conic Section 的內容與高中數學教材中的錐線內容相去不遠，不過阿波羅尼斯所討論的都只是利用幾何的方法，而沒有利用坐標的概念。

雖然希臘時代，還沒有解析幾何學的發展，但事實上，阿波羅尼斯所使用的方法已經具有解析幾何的意義。對錐線的研究，到這時候也告一段落。

3、解析幾何

十六世紀是西方近代科學正興盛的時候，為了實用的需要，如彈道的路線，彈道點的研究，望遠鏡及顯微鏡中透鏡的設計等，於是再度的燃起圓錐曲線的研究熱潮，伽利略（Galileo Galilei）指出拋射物體的運動軌跡是拋物線，克卜勒（JohanesKepler）的行星運動軌跡是橢圓，而光學的研究、望遠鏡與顯微鏡的製造，航海地圖的繪製，都需要深入了解圓錐曲線的幾何性質。1579 年，蒙特（Monte, 1545~1607）就定義橢圓為平面上到兩定點的距離和為定值的動點的軌跡。1604 年克卜勒（JohanesKepler，1571~1630 年）提出了連續變動原理，將圓錐曲線看成一體的連續變化。

希臘人研究圓錐曲線，用的方法是導出某些幾何量之間的關係，十七世紀的

笛卡爾（Descartes, 1596~1650 ）與費馬（Fermat, 1601~1665）等人引進座標創建解析幾何，坐標幾何的產生，則使得圓錐曲線的理論更紮實。解析幾何（亦稱為坐標幾何）最基本的功能就是把幾何圖形數量化。這種幾何和代數思想融合，提供了人們研究曲線的一個重要方法，它促進了十七世紀的科學進步一日千里。當費馬和笛卡兒引進坐標，把幾何圖形轉化為代數程式，利用代數運算去解釋幾何問題後，所謂的解析幾何（或稱坐標幾何）於是出現。笛卡兒說明了如何把幾何轉化成代數，而費馬則顯示如何把代數轉變成幾何。

費馬的想法很簡單，一開始，先在紙上畫兩條互相垂直的直線，一條線是水平的，另一條線則是垂直的。想像這些直線都是無止盡的，雖然紙張有一定的大小。超過三個世紀以來，我們把水平線稱為 x 軸（x axis），而把垂直線叫做 y 軸（y axis）。接著把兩條線畫成單位相等的數線，每個軸上的每一點都代表一個數字，於是，每一個方程式的圖像或圖形（graph），都是由滿足這個方程式的點構成的，而這就是費馬把方程式轉變成圖形的方法。

費馬非常強調從方程式出發的觀點，也就是說不一定要先有幾何作圖的問題，才考慮相應的方程式。反過來，任一 x、y 的方程式都可以看成一個幾何曲線，而值得加以研究。這種觀點，我們稱為費馬式的解析幾何觀。希臘人所研究的曲線只包括直線、圓、錐線及一些可用器械作圖的曲線，費馬式的新觀點，使幾何學的視野變得無限的寬廣了。

笛卡兒雖然偶爾也從方程式出發，但他所關心的是多為幾何作圖問題。他起初使用一組數對 (x, y) 來代表平面上的一點，然後展示出這些代數演算與幾何運算的關連，引進了座標使圖形的關係變成代數方程式，接著想著如何找兩個次數較低的方程式，將它們聯立，而得原來較高次的方程式。解了代數方程式，就知道如何解決幾何作圖問題。在笛卡兒坐標系下，所有的錐線都是二元二次方程式的幾何圖形，型如：

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$$

反過來說，所有的二元二次方程式的幾何圖形也都是錐線。然而，費馬和笛

卡兒都沒有進一步利用二次方程式來討論圓錐曲線的性質。而最先以坐標幾何方法來討論圓錐曲線的，應該算是英國數學家瓦里斯（John Wallis, 1616~1703），他在 1655 年的著作 De Sectionibus Conics 中根據 Apollonius 所作的圓錐曲線定義、條件，導出了圓錐曲線方程式，並利用這些方程式去證明圓錐曲線的性質，圓錐曲線從此可以擺脫對錐面的依賴，而被視為一般的平面曲線。

此外，笛沙格（G. Desargues, 1591　1661 年）、巴斯卡（1623　1662 年）與 P. de La Hire（1640　1718 年）以射影方法的觀點來討論圓錐曲線，史太納（J. Steiner, 1796　1863 年）並將錐線當成射影幾何中的一個主題研究，提出利用包絡線來討論圓錐曲線，而圓錐曲線的發展與研究到這個階段也日趨成熟。

第二節　幾何概念與幾何解題的研究

1、van Hiele 的幾何思考模式

荷蘭數學教育家Dina van Hiele-Geldof和Pierre M. van Hiele夫婦共同提出兒童幾何思考發展的 van Hiele 模式（van Hiele, 1986），認為一個人幾何概念思考模式可以分成五個發展層次，每個層次均有其發展特徵，且幾何思考的發展，較不受兒童年齡成熟因素的影響，而是與教學因素有關。van Hiele 的研究在建構幾何系統的邏輯順序，其理論偏向幾何知識內容。周武德（1993）利用 Fuys 等之教學兼具評量之三個面向單元施測，其結果印證了 van Hiele 理論對描述學生學習幾何之思考過程有幫助，而 Wirszup（1976）、Hoffer（1983）、Han（1986）之研究也驗證了此一事實。

van Hiele 認為學習本身是一種不連續的過程，學習曲線有「斷層」存在，此足以顯示出學習的「層次」。Shaughnessy and Burger（1985）將 van Hiele 的五個思考層次的特徵以下述描述之：

（1）層次 0：視覺\辨識（Visualization\Recognition）—能辨認圖形的整體輪廓且用語言描述其形狀，或能手繪（draw）或複製（copy）一個圖形，但不能利用圖形的特徵或組成要素來分析。

（2）層次 1：描述\分析（Descriptive\Analytic）—在這個層次能分析圖形特徵及組成要素，利用圖形的已知性質或洞察隱含的性質去解決幾何問題，但不能解釋性質之間的關係，也不能了解正式圖形定義。

（3）層次 2：抽象化\非形式演繹（Abstract\Informal deduction）—在這個層次能建立圖形之間的關係及性質之間的關係網路，能了解定義並能提出非形式化的論證，但不能了解證明或定理的重要性，且因不知道基本假設的需要而無法利用前題去建立證明結果的成立。

（4）層次 3：形式的演繹（Formal Deduction）—在這個層次可以了解到證明的重要性和了解「未定義名詞」、「等價」、「定理」、「定義」、「公理」和「公

設」的意義，了解定理與逆定理的區別和證明的必要與充分條件，也可寫出邏輯證明，並能比較一個定理的不同證明方式。

（5）層次 4：嚴密性\公理性（Rigor\Axiomatic）—在這個層次能在不同的幾何系統作比較，如歐氏幾何與非歐氏幾何之比較，且能找出解決一組問題的一般性方法。

van Hie1e 模式是許多研究者從事幾何概念發展研究作為理論基礎的依據，van Hiele 模式的五個層次是從直觀的辨別到分析再進階到抽象的證明階段，它可以合理的解釋幾何概念發展的階層，也可以評估學生的幾何能力。Usiskin（1982）研究發現 34％的中學生不能顯示視覺特性（零層次），且其中 26％的學生經過一年後仍停留在此層次，此似意味著更低層次的存在。Clements 等人（1999）的研究也顯示有比視覺層次更基本的層次存在，那就是第 0 層的前期（pre-level 0），也稱為前認知期。在此層次的兒童能感覺到幾何的形狀，但不能將同類形狀作區別，例如：不能區別正方形和長方形的不同，但可以區別正方形和三角形的不同。

除了五個思考層次外，van Hiele 並提出五個學習層面，認為教師根據這個次序發展教學，將可促使學生提升層次：

層面一：諮詢（Information\Inquiry）

經由教材的呈現，使學生從探索中獲得相關知識，而教師在引導的過程中，觀察學生之語彙，並適時將主題中的相關名詞及探究對象與方向列入討論，本層面的重點是教師與學生之雙向溝通。

層面二：導引（Guided Orientation）

教師應透過教材，使學生探究所要研究的領域，並了解研究的進一步方向，因此教材的呈現是有特殊的結構關係，學生在有次序性的教材和活動中，對於主題所包含的概念和結構逐漸變得熟悉，此階段，大部分的教材內容是一些簡短的課題，學生可以一個步驟便完成的簡短作業。

層面三：解說\表達（Exploitation）

學生依據之前的經驗，在教師的引導下，討論學習之內容，學生對其所觀察到的關係與結構，表達和交換看法，此時教師的任務是注意學生的習慣用語，並幫助學生精練正確合適的語彙。

層面四：探索（Free Orientation）

本層面所探索的領域大部分都是已知的，但是教材較為複雜且步驟較多，作業上也可能需要不同的方法，學生從探索解決方法的過程中累積經驗，並對教材的內容作明確的關連。

層面五：統整（Integration）

Crowley（1987）指出，學生回顧和總結所學，將對物件與新關係網路形成一個概觀的了解。因此教師應協助學生在這方面的綜合，學生在此層面討論自己的方法，形成整體概念，教師適時提供整體知識之評述，以促使學生將所學教材內化為統整的基模。

2、幾何解題

近代對於解題幾何研究的探索，可從 1945 年 George Polya 的名著「How To Solve It」談起，該書強調解題的重要性，而且歸納出下列四個數學解題的過程與步驟（George Polya, 1945）：

（1）瞭解問題。

（2）找出題意中的已知數與未知數之間的關係，並擬訂一個解題的計畫。

（3）實行解題計畫。

（4）將解題結果作一有意義的反思。

國內一些學者以啟發式的角度將問題解決的步驟分為：閱讀問題、探索問題、選擇策略、解決問題、以及驗證解答等五個流程。

1987 年，Mayer 針對應用題提出四種數學解題策略的過程：

（1）問題轉譯：將欲解之問題語意化。

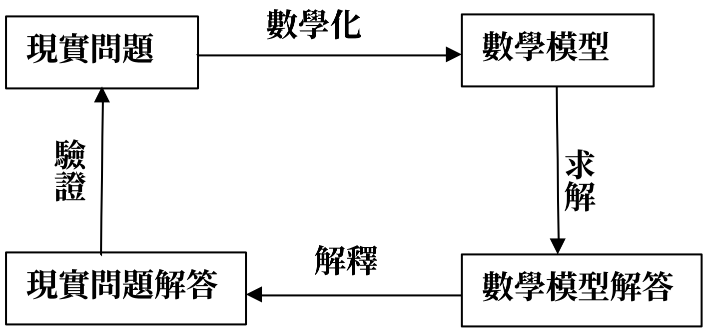
（2）問題整合：透過基模知識探討問題類型關係。

（3）解題計畫與監控：判斷、歸納問題性質及內容，並決定所使用的策略。

（4）解題執行：進行運算。

而從「實際問題」到「數學問題」的過程，其實就是運用數學的語言來重新建構問題，也就是利用數學的概念、符號等去表現事物物件及其物件之間的關係，這也是所謂的「數學化」（鄭毓信, 2004）過程。透過數學化的過程，以「數學建模」的方式將問題中與數學相關的事物物件與其關係用數學語言表示出來，將實際問題轉化為數學問題。

圖 2-2-1　數學建模的一般流程



資料來源：鍾啟泉、徐斌粑（2003），頁 30

數學解題能力有學習能力型、探究能力型、應用能力型（奚定華等，2004），其中與本研究相關的為解學習能力型問題與解應用能力型問題這兩種能力。

表 2-2-1　「學習能力型問題」與「應用能力型問題」之比較

	學習能力型問題	應用能力型問題
具備條件	1、學習新的數學知識 2、探究數學問題 3、應用數學知識解決實際問題	1、根據實際問題建立數學模型 2、知識點多，綜合性強 3、訊息量大，閱讀能力強
解題步驟	1、閱讀理解 （1）字面理解	1、審題 2、將應用問題轉化成數學問題

	（2）深層理解 2、運用數學的方法與策略	3、建立數學模型 4、進行數學運算和推理 5、檢驗答案
提高解題能力的方法	1、重視提高閱讀理解能力 2、培養獨立學習的能力	1、瞭解問題的實際背景 2、提高語言轉換能力 3、培養建立數學模型的能力

一般而言，應用能力型的問題因涉及的知識較廣，解題方法也較多元，因此常被視為是較難解的題型。然而不論是解學習能力型問題或者是應用型問題，都應瞭解問題的需求，而不能只是制式化地代入公式或定理來解決問題。

3、概念心像

幾何概念的發展是透過實際的操弄來描述日常生活中的物體（real-world objects），進而能透過想像中的抽象物體（imagined platonic objects）來學習歐氏幾何，最後得以對形式化所定義的物體（formally defined objects）做推論證明。基本上在幾何的領域中，概念的發展並不是透過熟練的運算能力而獲得的。Vinner & Dreyfus（1989）認為數學概念都有一個形式且嚴密的定義，稱為概念定義（concept definition），這些定義會在學校的課程中被介紹出來。Tall & Vinner（1981）則視概念定義為說明概念的一種文字型式。然而許多我們經常使用的概念並不一定都被正式定義，而且我們多半都是靠著經驗與使用上的習慣慢慢去瞭解這些概念。通常在這個過程中，概念會被賦予符號或名稱，使得它能用於傳達與心理上的操作。

Vinner（1983）指出個體在心智中所建立的數學概念結構主要有兩個部分，即概念定義（concept definition）與概念心像（concept image）。我們使用「概念心像」來描述所有與概念有關的認知結構，這些概念包含心理圖像及其相關性質與過程，隨著個體遭受新的刺激與經驗的累積發展，概念心像逐漸被建立起來。

依照 Vinner（1983）的解釋，令 C 為某個概念，而 P 表示一個人，則 P 對於 C 概念的心智圖像即是 P 心中所有關於 C 之圖像的總集。其所謂的圖像（picture）指的是任何可能的表徵，甚至是符號或其他表示法。學生在思考一個數學物件是否為某個概念的例子時，並不一定以形式上的定義來決定，而是以一個心中對該概念存在的影像來決定。多數的學生在一開始接觸問題時，最先進入思考工作區的是相關的概念心像，而不常使用概念定義。

然而學生的概念心像的發展與建立並非總是合於邏輯的。例如學童在第一次接觸正整數的減法時，也許會觀察到減法的結果會讓答案裡的數字變小，這種觀察確實是概念心像的一部分，但也可能將造成往後在學習負數減法上出現問題。

學生可藉由記憶的方式來對概念定義作學習，且在學習的過程中，個體可能會對定義再作個人重建，如此下來，個人化的概念定義（personal concept definition）將會不同於型式化的概念定義（formal concept definition）。Vinner&Dreyfus（1989）發現，雖然大學生經由抽象定義來介紹函數，但是他們不依賴抽象定義來決定是否以圖解或利用公式來定義函數。Schwarz 和 Hershkowitz（1999）的研究中也提到了有關學生對於函數的概念心像，根據學生在函數的概念心像表現，將概念心像的特徵分為：

（1）典型性（Prototypicality）：學生通常以易取的典型心像來解決問題，例如以線性函數的圖形來解決非線性的問題。

（2）部份－全體推理（Part-Whole Reasoning）：函數圖形如拋物線，實際上應該是無限延伸的，但通常畫出的圖形只為部份的圖形，因此部份－全體的推理能力用於決定不同的子圖形是否為同一函數的圖形。

（3）屬性瞭解（Attribute Understanding）：概念心像可用於瞭解函數的某些屬性，例如瞭解函數 $(x-1)(x-3)$ 的對稱軸為 $x=2$。

因此，學生對幾何形狀的瞭解，概念心像比概念定義扮演了更重要的角色。從學生的幾何思考發展與學習歷程，都是由具體的形體開始，在所接觸的生活的環境裡以視覺的作用，形成圖形的概念心像，而概念定義是在很後面才賦予的。

因此學生對幾何圖形的辨識，往往不是透過定義，而是透過圖形的概念心像。然而概念心像的形成經常是直觀的，以色列學者Tirosh＆Stavy等人（2000）綜合許多研究結果發現學生在數學及科學概念上對不同的問題情境，會使用相同規則的反應來解答，學生對同類型答案的題目會依題目的外在特徵回答，而非根據數學和科學概念作答，所運用的基模是建立在題目特別的、外在的特徵，而非題目中的數學或科學概念的領域知識。

對於每一個個體，一個概念定義會產生他自己的概念心像，而這種概念心像稱為概念定義心像（concept definition image）。Vinner（1981）曾將教師教導學生處理問題的歷程與大部分學生解題的歷程作一比較，在處理一個數學問題時，教師往往會說明與問題相關的概念定義，並喚起學生的概念心像來幫助解題，然而學生在卻常是直接從概念心像來處理問題。例如數學函數的概念定義為〝在A與B兩集合間若存在一種對應關係，使得A集合裡的每一個元素恰好能在B集合中找到一個元素與之對應，那麼這種對應關係就稱為函數。〞但學過函數的人並不一定會記得它的概念定義，反而是從可能包含許多其他層面的概念心像來表達函數，例如規則、公式或符號等。

從幾何認知觀點來探討概念心像，Duval（1995）曾提出人類對幾何圖形的四種認知理解，分別是之知覺的理解（perceptual apprehension）、構圖的理解（sequential apprehension）、論述的理解（discursive apprehension）、以及操作的理解（operative apprehension）。只要一個圖形出現，就會喚起知覺性的瞭解；在構圖過程中，圖形的各種元件會一一浮現，形成構圖的理解；論述性理解則是個體透過語言或文字來描述圖形的名稱、特徵、或一些假設等；藉由觀察與操作圖形，使個體轉換心像或實體圖像，進而得到解題靈感的過程，即為操作性的理解。Duval（1995）並認為學生對於幾何圖形常有直觀的想法，但這些想法卻無法正確地解決一個幾何問題。他認為上述的四種認知理解方法是因人而異，且某些圖形是具有啟發性的，經由操作圖形或轉變維度，可以解決原本不容易解決的幾何問題。

第三節　圓錐曲線的相關研究

國內有部分學者對高中生進行圓錐曲線研究，研究者將其蒐集整理分析如後：

蔡志仁（1999）以動態連結多重表徵視窗環境下，研究高二學生在橢圓單元的學習。研究主要分成兩個階段，第一階段的研究以九名高二的學生為樣本，進行診斷性教學，研究結果發現：橢圓觀念的外顯表徵主要有語意表徵、圖形表徵、軌跡表徵、方程表徵、以及結構表徵。而圖形表徵是成功解題的重要關鍵，當學生能將題意表徵與其他表徵整合到圖形表徵當中，達成多重表徵間的緊密連結，則較能成功解題。第二階段以高中二年級兩班為樣本，進行動態連結多重表徵視窗環境實驗教學，研究結果顯示在學習成就前、後測驗上，學生呈現顯著進步效果，實驗組進步分數優於控制組，但未達統計檢訂的顯著標準。從解題時的表徵運用情形來看，實驗組學生傾向以圖形表徵作為主要表徵，並整合其他表徵於圖形中。

胡凱華（2000）探討國中三年級學生在動態幾何環境下，學習圓形概念的學習成效及學習態度，並且與傳統教學的班級做一個比較。其研究採準實驗研究法中的不等組研究設計，研究對象為高雄市某國中兩個國三的班級，將兩班以班級為單位隨機分派，其中一班為實驗組，另一班為對照組，實驗組採動態幾何教學模式，對照組採講述式教學。結果發現：

1、在動態幾何教學模式中學習圓形概念，對於學習成效，男、女並無顯著差異。

2、在動態幾何教學模式中學習圓形概念，圓形概念高層次的學生在學習成效上，顯著優於中層次及低層次，而中層次與低層次沒有顯著差異。

3、在動態幾何教學模式中學習圓形概念的實驗組學生與接受傳統教學的對照組學生，在學習成效上，實驗組高層次學生顯著優於對照組高層次學生；實驗組中層次學生與對照組中層次學生並無顯著差異；實驗組低層次學生與對照

組低層次學生也無顯著差異。

4、在動態幾何教學模式中學習圓形概念的實驗組學生與接受傳統教學的對照組學生，在學習態度的改變上，實驗組與對照組並無顯著差異。

黃哲男（2001）於動態幾何環境下研究國中生動態心像建構與幾何推理，選擇台北市內湖區某公立國中二年級之兩個班級作為研究對象，並將其分實驗與控制兩組；全程參與之學生共計 63 名，並從實驗組分層隨機抽樣選取 14 名個案，以經審訂之問題進行個案訪談，依此探究個體原生型之動態心像的種類與運作機制，而後以動態的觀點整合 GSP 環境設計實驗教學活動。於活動中期及結束時各進行一次訪談，並於末了進行紙筆測驗，研究結果發現：

1、14 名個案皆會產生動態心像，且可將其引入解題活動中，然而不同的學生操作心像的頻率並不相同，與層次無關，唯高層次學生運用動態心像解題時較有系統。

2、在以動態及靜態語意所佈置之問題情境中，台法兩地學生的表現恰好相反，其中台灣的學生較偏好動態語意情境，其原因為學生可因此引進動態心像，擬定自己所認為之較佳的解題策略。

3、本研究所發現之動態心像類型有割補、變換、拓樸與動態模擬等四種主類型；除拓樸型之外，其餘三類可作為具威力之解題方法，而拓樸型雖不具此能力，然而仍對解題具有輔助的功能。

4、個體於解題活動中所運用之動態心像類型通常與問題情境有關，不過某些學生易傾向某種類型之心像操作方式。

陳吟汝（2006）探討台南地區高二學生在圓錐曲線單元的解題過程中，可能發生的錯誤類型，進而分析造成學生產生錯誤的原因。其研究樣本取自台南地區 4 所高中的高二學生，共計 8 個班級(含 308 名學生)，並從中選取有效樣本 248 人。從研究結果將錯誤類型及原因進行整理及歸納如下：

1、高二學生在圓錐曲線單元主要的錯誤類型：

（1）圓錐曲線各項名詞定義模糊不清。

（2）對圓錐曲線的基本觀念不足。

（3）圓錐曲線的圖形概念模糊，解題時直接從題目條件來猜測答案。

（4）在計算、配方或移項的過程中，因粗心而造成答案錯誤。

（5）在生活應用及文字情境的題目中，無法正確掌握題目的關鍵字來解題。

2、高二學生在圓錐曲線單元主要的錯誤原因：

（1）各類圓錐曲線的概念混淆，做出錯誤的推論。

（2）圓錐曲線有很多共同點或相類似的性質，容易將彼此的性質搞混。

（3）受此單元學習經驗影響，做出錯誤的聯結或思考。

（4）受到文字題中無關訊息的干擾而無法解決問題。

（5）先備知識的不足。

從國內圓錐曲線的相關研究中可以發現，圖形表徵是學生解題的一個重要關鍵，且學生在進行幾何推理時，其所運用之動態心像類型通常與問題情境有關，而動態幾何教學則有助於學生學習幾何概念，但當學習完各類圓錐曲線後，學生對於圓錐曲線的概念也容易產生混淆的情形。文獻中建議教學時，教師應以較為有系統的方式，配合動態幾何工具的使用，並注意到圖形表徵的學習，培養學生運用動態心像以增強學習成效。

第四節　高中數學科圓錐曲線的教材內容分析

隨著高中教科書版本的開放，世面上有許多不同版本的教科書可以提供教師教學或學生學習的選擇，慶幸的是，數學科目的內容並不像國文或英文科目，會隨著教科書的不同而內容有明顯差異，至少在課程編排的順序及學習的單元上，高中數學幾乎都是大同小異的。研究者在參考了五種版本：翰林、南一、康熙、龍騰、三民後，將高二下學期的圓錐曲線－拋物線單元作了一個課程上的整理與分析，並且針對橢圓的光學性質做一個說明。

一、課程的編排順序

高中二年級下學期的數學課程共有三章，其中第一章即為圓錐曲線。第一章共有四個小節，其中第一節為拋物線，第二節為橢圓，第三節為雙曲線，第四節為圓錐曲線與直線的關係。特別一提的是，除了康熙版本將第一節與第二節課程順序對調之外，其他四種版本在這個部份都是先上拋物線再上橢圓的。另外，拋物線、橢圓、雙曲線這三個圓錐曲線的光學性質都是放在第四節的內容安排上。

二、拋物線的課程

1、拋物線的定義

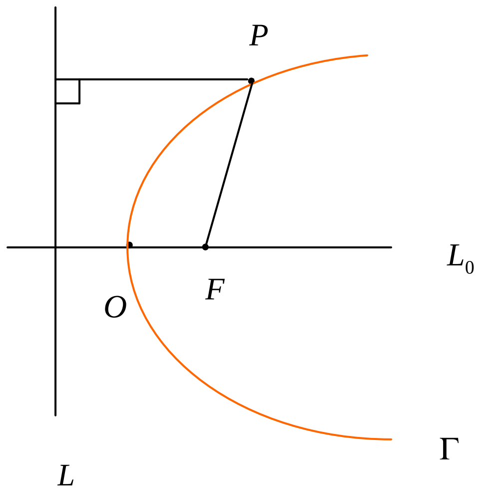
在國中第四冊與高中第一冊的教材中，都談到坐標平面上二次函數的圖形為拋物線，因此我們可以利用二次方程式來描繪出拋物線圖形，當然，描的點要愈多這樣圖形才能更準確。然而，當我們知道“二次函數的圖形為拋物線”的這個結論，心中免不了產生一個疑惑：“為什麼？”，或者，“拋物線只能用二次函數表示嗎？”有沒有可能拋物線其實還有其它式子的表示方式，只是沒被發現？

數學中許多名詞都有其定義，拋物線也不例外。在高中課本裡，我們對拋物線的定義是：

設 L 是平面上一直線，F 是同一平面上不在直線 L 上的一點，則平面上所有

到 F 與到直線 L 的距離相等的點 P 所形成的圖形 Γ 稱為一拋物線。如下圖：

圖 2-4-1　由「拋物線的定義」作圖



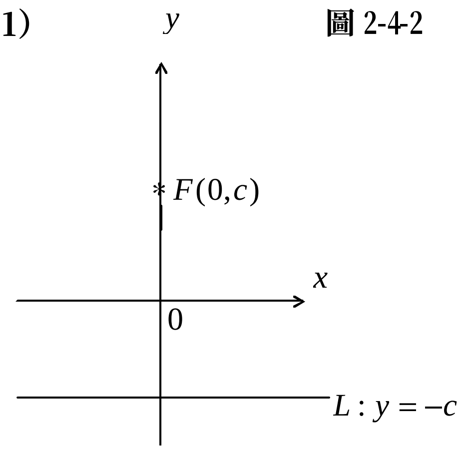
從上述拋物線的定義，我們可以將其文字敘述換成以數學語言表示，即 $\overline{PF} = d(P, L)$，其中 L 稱為拋物線 Γ 的「準線」，F 稱為其「焦點」，過焦點 F 而與準線 L 垂直的直線 L_0 稱為 Γ 之「對稱軸」，對稱軸 L_0 與 Γ 之交點 O 稱為 Γ 之「頂點」，焦點與頂點的距離稱為「焦距」。

另外，拋物線上通過焦點的弦有很多條，這些都稱為「焦弦」，而其中與對稱軸 L_0 垂直的焦弦只有一條，稱之為「正焦弦」。

2、拋物線的方程式

為了讓定義式化為方程式，於是建立了座標系，將上述之點與直線分別座標化，再利用平移的概念，推導出標準式：

(1)　圖 2-4-2　$x^2 = 4cy$ 之解說圖



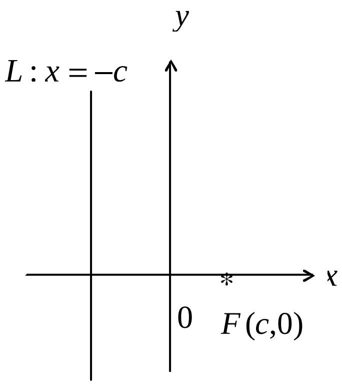
以動點 $P(x, y)$，焦點 $F(0, c)$，
準線 $L: y = -c$

代入 $d(P, L) = \overline{PF}$ 整理,

得 $x^2 = 4cy$
再將頂點由 $(0,0)$ 平移到 (h, k)
得 $(x-h)^2 = 4c(y-k)$

(2)

圖 2-4-3　$y^2=4cx$ 之解說圖



以動點 $P(x,y)$**，焦點** $F(c,0)$**，**
準線 $L:x=-c$

代入 $d(P,L)=\overline{PF}$ **整理,**

得 $y^2=4cx$
再將頂點由 $(0,0)$ **平移到** (h,k)
得 $(y-k)^2=4c(x-h)$

最後將上述整理（1）之標準式 $(x-h)^2=4c(y-k)$ **展開得一般式** $y=ax^2+bx+c$

（2）之標準式 $(y-k)^2=4c(x-h)$ **展開得一般式** $x=ay^2+by+c$

觀察後面將標準式化為一般式的結果，可讓學生發現其中（1）之標準式展開後，就是高一學過的二次函數。至於（2）的標準式展開後的樣子，原來就是將二次函數 $y=ax^2+bx+c$ **中的** x **與** y **互換而已。**

而學生在高一即學過以配方方式找拋物線的頂點座標，給二次函數拋物線的方程式 $\mathrm{y}=ax^2+bx+c$**，透過以下的演算過程：**

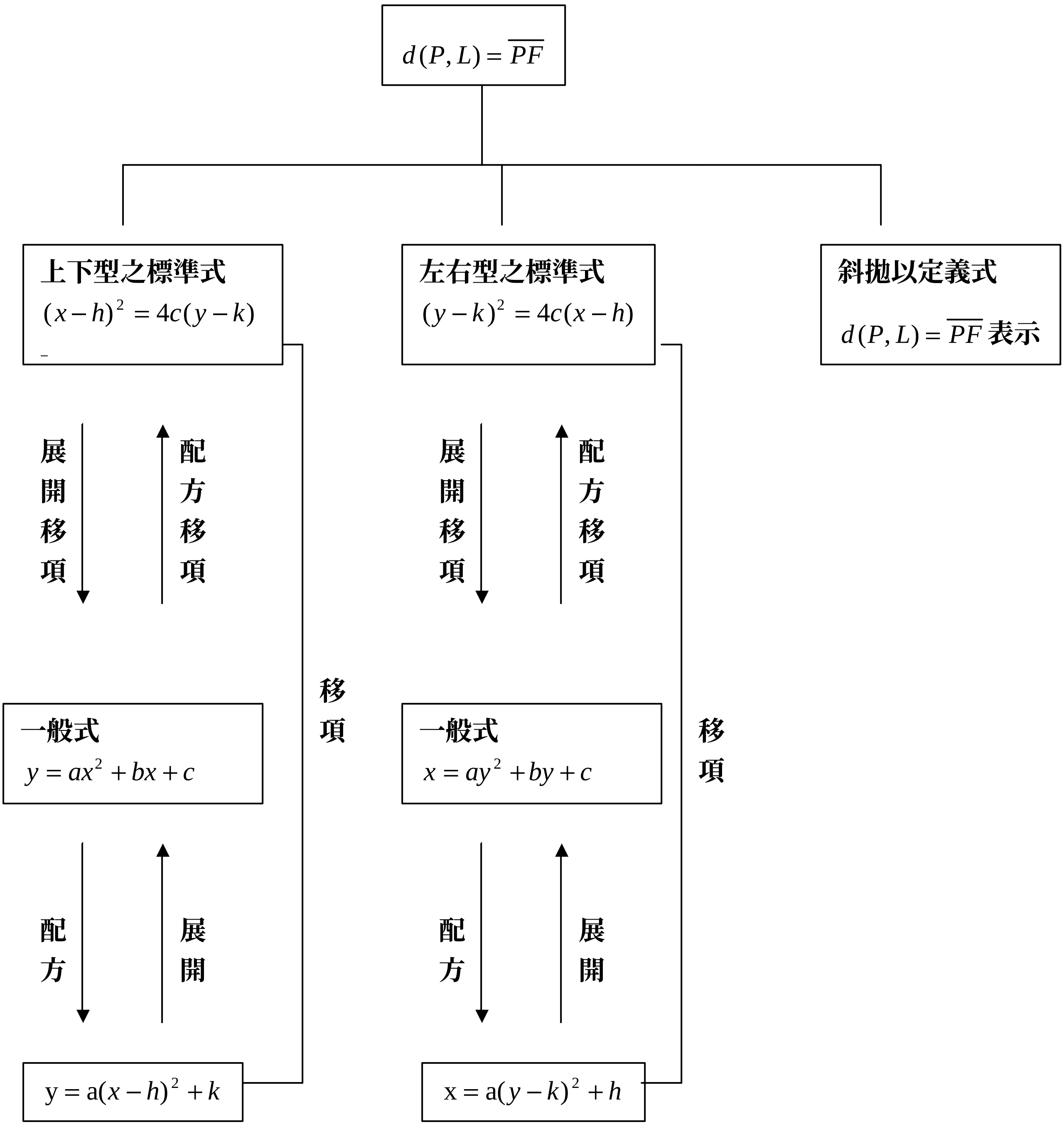
$$y=ax^2+bx+c=a(x^2+bx)+c=a\left[x^2+bx+(\frac{b}{2a})^2\right]+c-a(\frac{b}{2a})^2=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$$

，就可找出其頂點座標 $V(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$

因此，只要是屬於 $y=ax^2+bx+c$ **的拋物線方程式皆可化為** $y=a(x-h)^2+k$ **之形式，進而求出其頂點** (h,k)**。同理，若給予** $x=ay^2+by+c$**，** $a\neq0$ **的方程式，學生可透過同樣的運算方法將其化為** $x=a(y-k)^2+h$ **找出頂點。**

綜合上述，可將整個高二拋物線有關定義式、標準式、一般式的課程流程整理成如下：

圖 2-4-4　拋物線中「定義式、標準式、一般式」之課程流程



3、拋物線的開口方向

拋物線的開口方向除了由圖形觀察之外，亦可由方程式推而得知。

（1）圖形的觀察

介紹拋物線的定義時，也會藉由圖像讓學生同時認識一些與拋物線相關的名詞，如準線、焦點、對稱軸等。從圖形中來觀察拋物線的開口，必需瞭解這些與拋物線相關的名詞會出線在圖形的什麼地方，也就是說，整個圖形一些名詞的相

對位置要清楚，這才能正確判斷出拋物線圖形的開口方向。從圖形的觀察中，整理了如下的關係：

a、準線與對稱軸互相垂直。

b、正焦弦與對稱軸互相垂直。

c、頂點、焦點會在對稱軸上。

d、拋物線的開口方向是面向著焦點的。

（2）方程式

從標準式$(x-h)^2=4c(y-k)$的推導過程可對應出其拋物線開口是朝上或朝下的，這樣的類型我們稱為上下型的標準式。另外，從建立坐標系、假設坐標點的關係來看，也能發現到標準式$(x-h)^2=4c(y-k)$中，c值的正負會影響圖形開口的方向，當c值為正時，拋物線的開口朝上；c值為負時，拋物線開口是朝下的。同理可推得另一左右型標準式$(y-k)^2=4c(x-h)$中的開口方向與方程式中c值的關係。若對應到展開後的一般式$y=ax^2+bx+c$與$x=ay^2+by+c$，我們可將拋物線方程式與圖形開口方向的關係整理如下表：

表 2-4-1　拋物線方程式與圖形開口方向的關係

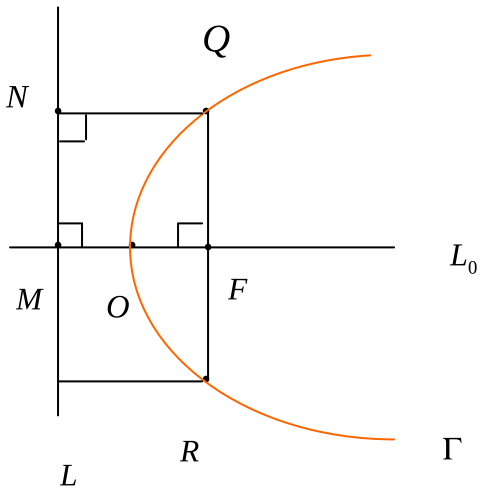
方程式		開口方向
標準式	$(x-h)^2=4c(y-k)$	$c>0\Rightarrow$開口朝上 $c<0\Rightarrow$開口朝下
	$(y-k)^2=4c(x-h)$	$c>0\Rightarrow$開口朝右 $c<0\Rightarrow$開口朝左
一般式	$y=ax^2+bx+c$	$a>0\Rightarrow$開口朝上 $a<0\Rightarrow$開口朝下
	$x=ay^2+by+c$	$a>0\Rightarrow$開口朝右 $a<0\Rightarrow$開口朝左

4、拋物線的性質

（1）正焦弦長的性質

抛物線上任兩點的連線稱為「弦」；通過焦點的弦稱為「焦弦」；和軸垂直的焦弦稱為「正焦弦」，由拋物線的定義中，我們可發現拋物線的正焦弦長$\overline{QR}$

圖 2-4-5　**抛物線「正焦弦長」與「焦距」關係圖**



$=2\overline{QF}$　**（拋物線的對稱性）**

$=2\overline{QN}$　**（拋物線的定義）**

$=2\overline{FM}$　**（四邊形** $QFMN$ **為正方形）**

$=2(2\overline{OF})$　**（拋物線的定義）**

$=4\overline{OF}$

即拋物線的正焦弦長為其焦距的四倍。

（2）拋物線的光學性質

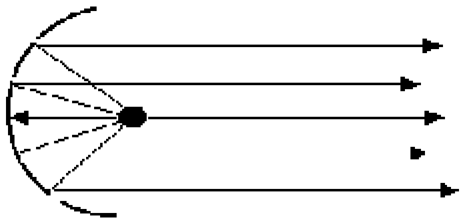
黑夜中，我們都需要照明工具來幫助，夜間在高速公路上，會發現有些車輛的大燈特別亮，光線能照到很遠的地方，為什麼會如此呢？

在物理學上，有一個反射定律，即光線射在一個光滑平面上，會產生一個反射光線，此時入射光線、反射光線與平面的法線會在同一個平面上，且入射角等於反射角。依據這個理論，物理學就可將車燈問題解釋如下：將拋物線繞著對稱軸旋轉一圈得一曲面，此曲面稱為拋物面。

若將光源放在拋物面的焦點位置上，則光線照射到拋物面時，其反射的光線會平行對稱軸。所以只要將車輛的大燈開關開到遠距燈位置時，此時光源在大燈所構成拋物面的焦點上，所以車燈會特別亮，而且照射的距離也最遠。在數學上，這是幾何圖形拋物線的光學性質：從拋物線焦點處射出來的光源，經過拋物線反射後會變成一平行光，如下圖所示；反過來說，與對稱軸平行的光線投射到拋物

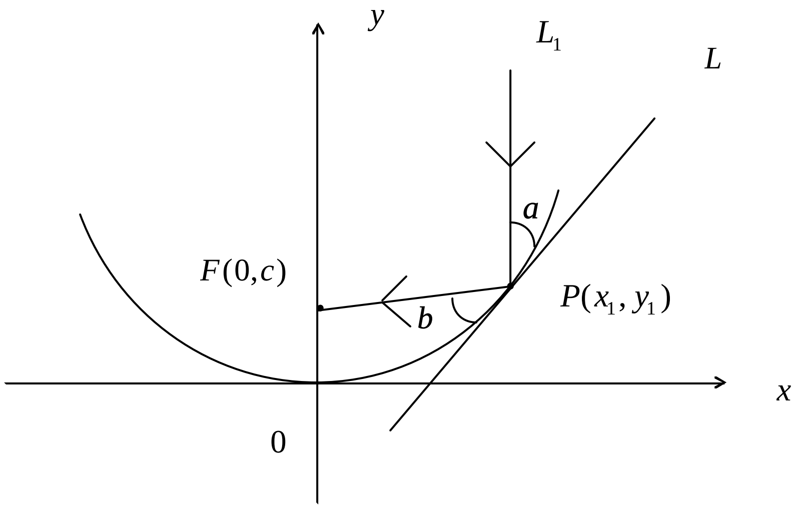
線上，經反射後會通過焦點。

圖 2-4-6　抛物線光學性質



欲說明何以抛物線有如此的光學性質，其實只要以解析幾何來驗證就可以了。設抛物線的方程式是 $x^2 = 4cy$**，則其焦點在** $F(c,0)$**，又射直線** $L_1 : x = x_1$ **是入射線，點** $P(x_1, y_1)$ **是入射點，** L **是抛物線** $x^2 = 4cy$ **在** $P(x_1, y_1)$ **的切線，則驗證抛物線的光學性質相當於證明** L **與** L_1 **所夾的銳角** a **等於** L **與直線** PF **所夾的銳角** b 。

圖 2-4-7　抛物線光學性質之解說圖



現在列出這三條直線的方程式：

切線 L **：** $x_1 x - 2cy - 2cy_1 = 0$

入射線 L_1 **：** $x - x_1 = 0$

反射線 PF **：** $(y_1 - c)x - x_1 y + cx_1 = 0$

因 a **是銳角，** $(x_1, -2c)$ **與** $(1,0)$ **分別為** L **與** L_1 **之法向量，故**

$$\cos a = \frac{|x_1|}{\sqrt{x_1^{\,2} + 4c^2}}\ ;$$

又 b 是銳角，$(x_1, -2c)$ 與 $(y_1 - c, -x_1)$ 分別為 L 與直線 PF 之法向量，故

$$\cos b = \frac{|x_1(y_1 - c) + 2cx_1|}{\sqrt{x_1^{\,2} + 4c^2}\sqrt{(y_1 - c)^2 + x_1^{\,2}}}$$

$$= \frac{|x_1(y_1 + c)|}{\sqrt{x_1^{\,2} + 4c^2}\sqrt{(y_1 - c)^2 + 4cy_1^{\,2}}}$$

$$= \frac{|x_1(y_1 + c)|}{\sqrt{x_1^{\,2} + 4c^2}\sqrt{(y_1 + c)^2}}$$

$$= \frac{|x_1|}{\sqrt{x_1^{\,2} + 4c^2}}$$

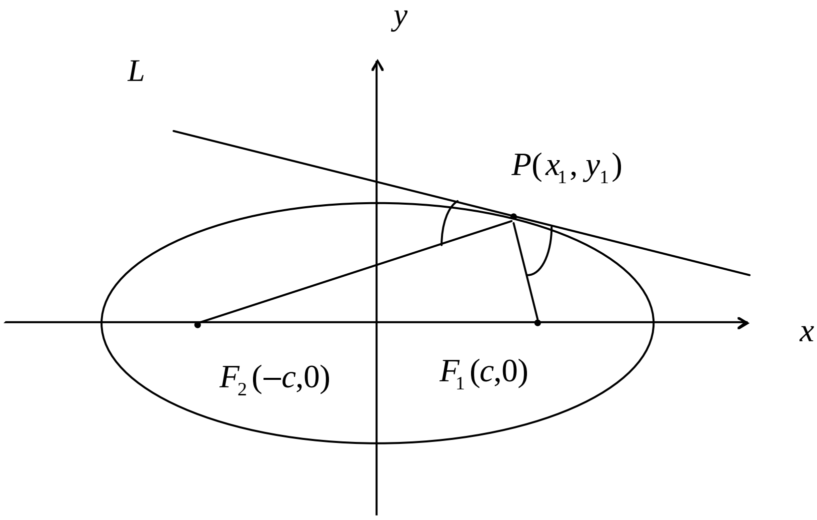
由 a，b 是銳角，且 $\cos a = \cos b$，故得 $a = b$。

三、橢圓的光學性質

從橢圓的其中一焦點所發出的聲或光，經橢圓反射後會聚集到另一焦點上，從這反射性質也可描述如下：過橢圓上一點 P 作切線，則切線與切點 P 到兩焦點 F_1，F_2 的連線夾等角，亦即切線與直線 PF_1 夾角等於切線與直線 PF_2 夾角。

我們利用橢圓與其切線的方程式來驗證這個性質。設橢圓方程式為 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$，且其中 $a > b > 0$，則兩焦點為 $F_1(c,0)$，$F_2(-c,0)$，其中 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$，又 L 為橢圓上一點 $P(x_1, y_1)$ 之切線，如圖 2-4-8 所示：

圖 2-4-8　　橢圓光學性質之解說圖



則切線 L **：** $b^2x_1x + a^2y_1y - a^2b^2 = 0$

　直線 PF_1 **：** $y_1x - (x_1 - c)y - cy_1 = 0$

　直線 PF_2 **：** $y_1x - (x_1 + c)y + cy_1 = 0$

設 a **是** L **與直線** PF_1 **所夾銳角，則因** (b^2x_1, a^2y_1) **與** $(y_1, -(x_1 - c))$ **分別為** L **與直線** PF_1 **之法向量，故** $\cos a = \dfrac{\left|b^2x_1y_1 - a^2y_1(x_1 - c)\right|}{\sqrt{b^4x_1^{\,2} + a^4y_1^{\,2}}\sqrt{y_1^{\,2} + (x_1 - c)^2}}$ **，**

其中 $y_1^{\,2} + (x_1 - c)^2 = b^2(1 - \dfrac{x_1^{\,2}}{a^2}) + (x_1 - c)^2 = b^2 - \dfrac{b^2x_1^{\,2}}{a^2} + x_1^{\,2} - 2cx_1 + c^2$

$$= (\frac{a^2 - b^2}{a})x_1^{\,2} - 2cx_1 + a^2 = \frac{c^2}{a^2}x_1^{\,2} - 2cx_1 + a^2 = (\frac{cx_1}{a} - a)^2$$

又 $b^2x_1y_1 - a^2y_1(x_1 - c) = a^2cy_1 - (a^2 - b^2)x_1y_1 = a^2cy_1 - c^2x_1y_1 = acy_1(a - \dfrac{cx_1}{a})$

因而 $\cos a = \dfrac{|acy_1|}{\sqrt{b^4x_1^{\,2} + a^4y_1^{\,2}}}$ **；**

同理可得 L **與直線** PF_2 **所夾銳角** b **亦滿足** $\cos b = \dfrac{|acy_1|}{\sqrt{b^4x_1^{\,2} + a^4y_1^{\,2}}}$ **，**

因 a **，** b **是銳角，且** $\cos a = \cos b$ **，故** $a = b$ 。