第伍章　結論與建議

本研究的研究目的是探討高二學生在學習完拋物線單元後，對拋物線相關知識的理解與應用程度，以及了解學生對拋物線與橢圓圖像的分辨能力，研究者並從紙筆測驗以及訪談的過程中瞭解學生的學習困難。本章將依據研究者的研究問題，將研究結果作一詳細的闡述，並分享研究者的研究心得與建議，以供日後在教師教學或課程設計上的參考。

第一節　研究發現與結論

從第肆章高二學生在拋物線試卷中的答題表現以及透過訪談的資料分析中，研究者有下列幾點主要的發現：

一、高二學生學完拋物線單元後，對其定義、方程式、開口方向以及其性質的認識與理解之情形。

（一）高二學生在利用標準式（$(y-k)^2=4c(x-h)$）、一般式（$y=ax^2+bx+c$ 與 $x=ay^2+by+c$）、以及定義式（$\overline{PF}=d(P,L)$，其中 P 為拋物線上的動點，F 為焦點，L 為準線）來判斷拋物線方程式的差異性：

1、在標準式、一般式、以及定義式的答對率比較中，答對率最高者為標準式（81.1%），次高者為一般式（78.3%），最低者為定義式（41.5%）。

2、高二學生對於拋物線方程式的判斷方法中，以標準式最為熟悉，其次為一般式，而因定義式的式子較為複雜，且還須具備有幾何概念來作連結，因此學生對以定義式來判斷拋物線方程式較為困難。

3、從相關係數中的數據我們可以發現，高二學生在標準式與一般式的能力表現上呈現中度正相關（相關係數為 0.44），定義式與其它兩種方程式之間則呈現零相關，這也表示學生在標準式與一般式的學習方式上具備了某種程度的連結，但對於定義式的學習則較為獨立。

4、從研究者與學生的訪談中，可以發現學生對屬於標準式或一般式題型的題目，其判斷的方法有以下四種：（1）化成標準式或一般式來判斷；（2）一般式中

的x和y只能有一個平方；(3) 方程式中一定要有x和y這兩個變數；(4) 方程式的係數對判斷結果無影響。

5、從訪談中發現學生在判斷時有一些其它錯誤的想法，研究者從答對率與訪談資料將學生的錯誤類型整理如下：第一類型：不熟悉定義式；第二類型：認為$y = ay^2 + bx + c$不是拋物線方程式；第三類型：認為x和y這兩項中，只要有一項有平方就是拋物線方程式；第四類型：認為拋物線方程式裡應該會有常數項。

（二）給予準線與焦點的相對位置後，高二學生利用拋物線的定義來找出拋物線上的點之能力：

1、從紙筆測驗中發現，有100％的學生能判斷出"準線上的點不會在拋物線上"，且有85.3％的學生能正確說出此結論。

2、有96.3％的學生能判斷出"與焦點不同側的點不會落在拋物線上"，且有74.3％的學生能正確說出此結論。

3、有50％~60％的學生能從拋物線定義來判斷圖形中與焦點同側的點是否位於拋物線上。

4、學生作答錯誤類型：(1) 畫出不符合條件的拋物線；(2) 以處理Q點的方式來處理R點；(3) 認為R點是拋物線的頂點；(4) 認為P點與Q點只會有一個在拋物線上；(5) 要知道拋物線的方程式才能作判斷。

（三）高二學生分別從標準式、一般式、定義式判斷拋物線開口方向的能力之差異：

1、高二學生在分別從標準式、一般式、定義式判斷拋物線開口方向的能力中，以標準式的判斷能力較強，以定義式判斷的能力較弱。

2、有約35.4％的學生認為，會以定義式表示的拋物線方程式，其拋物線開口方向應該是朝向斜的，也就是這種拋物線方程式不能以標準式或一般式表示。

（四）高二學生從準線、對稱軸、正焦弦等的走向來判斷拋物線的開口方向的表現能力：

1、從紙筆測驗中發現，高二學生已“準線”的走向來判斷拋物線開口方向的能力，優於以“對稱軸、正焦弦”的走向來判斷拋物線得開口方向的能力。

2、高二學生以準線、對稱軸、正焦弦等的走向來判斷拋物線的開口方向的表現能力，優於以標準式、一般式、定義式判斷拋物線開口方向的能力。

（五）高二學生是否瞭解拋物線中，“正焦弦長”與“開口大小” 的關係？

1、從學生紙筆測驗的理由論述中，有53.7％的同學知道“拋物線的正焦弦長愈長，則拋物線的開口就會愈大。”之結論。

2、在給予固定一條準線，分別以三個不同位置當作焦點的拋物線中，比較其開口大小的題型裡，學生作答的錯誤類型主要有下列幾種情形：

（1）認為拋物線的開口都一樣大；(2）認為拋物線的開口無限大；(3）比較焦點到準線的距離，但結論相反。(認為以離準線愈近的點為焦點，則其拋物線的開口就愈大。)。

二、高二學生在學完拋物線單元後，於解生活情景中的拋物線問題會遇到的困難

（一）高二學生在處理拋物線的應用問題上的表現能力

1、從解拋物線應用問題的五個步驟（假設未知數、建立座標係、假設拋物線方程式，將點座標代入拋物線方程式，以及求解）中，有60.0％會假設未知數，32.9％會建立座標系，19.5％會假設拋物線方程式，14.6％會將點座標代入拋物線方程式，8.5％能解出正確答案。

2、從學生在試卷上的答題方法中，發現多數學生針對拋物線應用問題所使用的解題方法為：(1）以相似三角形的做法來求解；(2）誤用梯型的中線公式；(3）不會將點代入拋物線方程式。

3、在透過訪談後，發現學生對於“一曲線與一直線可構成角度”有錯誤的觀念。

三、高二學生學完拋物線與橢圓單元後，對拋物線與橢圓的圖像關係之區別的能力。

（一）分別從六個不同角度切割橫橢圓，就學生在是非題的作答表現中可以發現：

1、有 75.61% 的同學認為以鉛直線通過橫橢圓中心對此橫橢圓切割後，其左右兩半都可被分割為拋物線。

2、有 65.85% 的同學認為以鉛直線不通過橫橢圓中心對此橫橢圓切割後，其中一部分的圖形會是拋物線。

3、有 48.78% 的同學認為以水平線通過橫橢圓中心對此橫橢圓切割後，其上下兩半都可被分割為拋物線。

4、有 65.85% 的同學認為以水平線不通過橫橢圓中心對此橫橢圓切割後，其中一部分的圖形會是拋物線。

5、有 21.95% 的同學認為以斜直線通過橫橢圓中心對此橫橢圓切割後，其分開的兩個部分都是拋物線。

6、有 46.34% 的同學認為以斜直線不通過橫橢圓中心對此橫橢圓切割後，其中一部分的圖形會是拋物線。

（二）正確答題者的判斷方法：

1、先假設一準線，但無法找到一焦點使橢圓上的點符合拋物線的定義。

2、拋物線與橢圓的定義不同，所以橢圓被切開後不會是拋物線。

3、以鉛直線通過橫橢圓中心對此橫橢圓做切割後，被切開的圖形開口的兩側會水平一直延伸，所以不是拋物線。

4、若將 $y^2=4(x+1)$ 與 $y^2=-4(x-1)$ 這兩個拋物線方程式合併，不管怎麼整理，都寫不出橢圓方程式。

5、以水平線通過橫橢圓中心對此橫橢圓做切割後，被切開的圖形開口的兩側會鉛直一直延伸，所以不是拋物線。

6、若被直線切開後的圖形開口反而會縮小，就不可能是拋物線。

（三）錯誤的判斷方法

1、直線通過橫橢圓中心對此橫橢圓做切割後，若被切開的圖形都含有一個焦點（橢圓的焦點），那麼這個圖形就會是拋物線。

2、看起來很像拋物線。

3、直線若沒有通過橢圓中心來切割，就不能保證被分割後的圖形是不是還保有焦點，因此不是拋物線。

4、若被直線切割橢圓後的圖形不對稱，就不是拋物線。

第二節　建議

一、教師教學方面

（一）高二學生學完拋物線單元後，對其定義、方程式、開口方向以及其性質的認識與瞭解之情形：

1、加強學生在定義式與幾何意義上的連結

拋物線的定義式是以拋物線的準線與焦點來表示拋物線的一種方程式的表示法，而且從定義式中就能讀出準線與焦點。此種表示法會運用到平面幾何上的兩種常見公式：(1)兩點距離公式，(2)點到直線的距離公式；因此教師在以定義式表示拋物線時，要特別加強學生在這些幾何公式與其意義上的連結。

2、檢查定義式中準線與焦點的相對位置

從 82 名學生的作答表現中，發現只有26.8%的學生會檢查定義式中焦點與準線的相對位置，因此教師在講述定義式中的幾何意義時，應該要提醒學生這一個檢查的步驟，一方面可以訓練學生判讀焦點與準線的能力，另一方面也可以強化學生對於拋物線定義式的建構能力。

3、多舉一些可將定義式、標準式、一般式互換的例子

從 82 名學生的作答表現中，發現有35.4%的學生認為“會以定義式來表式拋物線的，其拋物線的開口方向都是朝向斜的”。因此教師在課堂上不妨多舉幾個可將定義式、標準式、一般式互換的例子讓學生作練習，如請學生分別以定義式、標準式、一般式來表示“以焦點為$(1,0)$，準線為$x+3=0$的拋物線方程式”，並讓學生從中觀察此拋物線的開口方向。

（二）高二學生在學完拋物線單元後，其對生活中的拋物線問題之能力：

1、強化“建立座標系”的概念

從本研究中發現，有60.0%的學生遇到拋物線的生活問題時，會先對所求的線段或與所求相關的線段來給予一未知數，此種“假設為未知數”的方式來解決生活中問題的方式，在國中的數學課程裡就已練習過許多次。但在高中處理幾何

問題時，光只有“假設為未知數”是不夠的，要將所假設的未知數與圖形方程式作一連結，必須要有能先“建立座標系”，而從研究中更發現，只有32.9％的研究對象有此能力，因此教師在進行生活中幾何應用問題的講解時，應該要加強學生在這方面能力上的培養。

2、舉“常見錯誤解題法”之例，促進學生思考

在本紙筆測驗中發現有52％的學生使用相似三角形的方式解生活中拋物線的問題，而從研究者的深入訪談中知道，有學生是因為作完輔助線後誤用角度，造成其認為圖中有相似的三角形。因此，教師在進行生活中拋物線問題的教學時，在課堂上可多舉自己在教學經驗中所發現的常見錯誤解法，讓學生思考“為什麼這一題不能這樣解”的原因。

（三）在拋物線與橢圓之圖像的判別能力：

1、加強學生在圖形定義的與圖像之間的連結

高二學生學習的平面圓錐曲線共有四種圖形，包括高二上學期第四章的“圓”，以及高二下學期第一章所學的“拋物線”、“橢圓”、“雙曲線”。教師在進行各個幾何圖形的介紹時，都會著重在其定義的解說。但對許多的學生而言，若無法真正瞭解定義與圖像之間的關係，那麼“定義”的出現，只是代表著需要被記憶的一堆文字與符號。因此，教師在介紹幾何圖形時，除了在定義上的文字敘述要講解清楚外，在黑板上也應當要配合定義反覆多次作圖形的描繪，最好還能請學生自己動筆畫畫看，觀察在其描繪的過程中圖形的變化情形以及圖形的特性。

2、比較幾何圖形之間的關係

在遇到同質性較高的單元時，為避免學生在這些單元的學習上出現混淆的情形，教師應當於教學前對先前學過的相關知識作回顧，並於教學後對相關的單元作總整理。在高二下的課程裡，教師依翰林版教科書先上完拋物線單元再上橢圓的單元，而進行橢圓的教學時，教師可在一開始講解定義時就先回顧拋物線的定義，讓學生明顯地感受到它們在從定義畫出圖形的過程中，其相同與相異之處；

之後講解到橢圓的方程式時，也可以再請同學回憶拋物線的方程式；最後講到這兩種圖形的光學性質時，也可讓學生自己來說說它們的異同之處。

3、破除學生對於"對稱"的迷思

從研究中發現，有一些高二學生認為圖形沒有畫出對稱的樣子就不可能是拋物線，這樣的錯誤觀念顯示一些學生對於圖像的延展或分割的能力是薄弱的。因此，教師在依定義式來描繪圖形後，可擦去部分的圖形，讓學生去感受所謂的圖形的"對稱"與"不對稱"，有可能是被隱藏了部分的圖形之之後而造成的。

4、多舉一些有趣的生活實例

現實生活中有許多類似拋物線與橢圓的幾何圖形，然其只是"外型相像"，實際上卻不見得是拋物線或橢圓。如一般中小學的操場，外型與橢圓有點像，其實是由一個長方形搭配兩個半圓形形成的；又如市面上販賣機所販賣的"扭蛋"，外型的剖面也有點像橢圓，甚至從中間切開被分成兩半後，新圖形還與拋物線有點相像。諸如此類的有趣題材，都是可以幫學生解除迷思概念的教具。

二、課程設計方面

（一）提供開口方向為斜向的拋物線圖形

在參考市面上的教科書（翰林版、康熙版、南一版、三民版、龍騰版）後，研究者發現只有龍騰版的教科書有畫出開口朝斜向的拋物線。其實高二學生已學過直線方程式，因此在以定義式表示拋物線方程式時，其準線並不局限只在鉛直線或水平線，那麼對應的拋物線開口就不會只有朝上、下，或者是朝向左、右。因此在教科書中的拋物線圖形，可以以斜直線當作準線描繪出拋物線的圖形，強化學生對圖形的認識。

（二）提供"非對稱"的拋物線圖形

在此所謂"非對稱"的拋物線圖形，指的是不將拋物線圖形的"對稱性"刻意地在圖形中完全地畫出來，意即只畫出拋物線的部分圖形。以開口朝上方的拋

物線為例，可以提供左側的延伸線較短，且右側的延伸線較長的拋物線圖形。如此可加強學生建立拋物線圖像的表徵，且也讓學生明白“要檢查圖形是否為拋物線，並不能只單靠圖形的外觀，而是要找尋其它克觀的性質或定義來加以驗證”。

（三）清楚解釋拋物線的“開口大小”

在高二翰林版的教科書中，有一個請學生動動腦的問題：“試描繪二次函數 $y=ax^2$ 的圖形，當 $a>0$ 時，如果 a 值愈大，則圖形的開口愈大，還是愈小？”這樣的一個問題，在高一的課程裡即已討論過，但從研究者的教學經驗裡發現，有部分高二學生對於拋物線的“開口大小”是不知道如何作比較的，甚至造成學生認為“既然拋物線的圖形是無限延伸，那麼最後開口都會愈來愈大，所以所有的拋物線圖形開口都一樣大。”因此在讓學生從方程式來比較開口大小之前，清楚地解釋其比較的方式或原則是有必要的。

三、未來研究方面

（一）較多的研究樣本

由於時間與人力上的限制，本研究的研究樣本僅以台北市立某公立高中二年級的兩個班級為研究對象，若能將研究樣本擴大到更多不同程度的學校施測，則研究結果會更具推廣性。

（二）性別對研究的影響

此次研究對象僅有 16 名女學生受試，其餘的 66 名受試對象皆為男學生。由研究的樣本來看，男女學生的比例過於懸殊，因此無法從研究結果中探討性別對研究的影響。因此在未來若能取得較大樣本的研究對象，將進一步分析性別與研究結果的關係。

（三）將「拋物線與橢圓的圖像關係」之判別能力，推廣到雙曲線

課程的編排是將雙曲線的單元放在拋物線與橢圓的單元之後，而三者的定義、方程式、以及性質等常是學生易混淆的地方。此次研究者在試卷的第三部分

僅針對拋物線與橢圓的圖像關係進行研究，發現學生有許多的學習盲點，對同時為教師身分的研究者而言，除了期許自己在教學上要更清楚地講述之外，也好奇學生是否在學完雙曲線後，對三者的圖像關係有其「特別」或「有趣」的想法。因此將來若有機會，希望能將這些圓錐曲線的圖像部分作較深入地研究。

四、研究者的反思

從事高中數學教學的五年生涯中，研究者發現學生對於學習數學常有許多盲點與恐懼。尤其在高一下學期學生接觸到以前從未學過的「對數函數」與「三角函數」後，教師經常會聽到學生抱怨數學公式太多且複雜！而這種情形一直到高二下學期進入「圓錐曲線」單元時，學生在數學公式上的學習困擾似乎有增無減！事實上高中數學的公式確實是比國中的數學公式來得多，然而真正需要記憶的公式並不多，許多數學的公式其實都是從其定義推導出來的，因此上述所提及的單元之學習重點，主要在於學生是否有將其定義瞭解與熟悉了！

在撰寫此篇論文的過程中，研究者從學生的答題表現裡得到了許多珍貴的回饋，這些回饋讓研究者除了更了解學生的想法外，也激勵了自己在教學上應當更要有所成長。尤其在本研究為探討學生對拋物線圖像的瞭解程度所設計的對橫橢圓做切割之評鑑性試題中，研究者除了關心學生在答題的結論是否正確外，更在乎他們在決定結論前的思考過程，這些在本論文的第四章都已將學生的理由論述作一整理。Vinner（1983）曾提過數學概念都有一個形式且嚴密的定義，稱為概念定義（concept definition），而在高中的圓錐曲線單元裡，教科書已分別對圓、拋物線、橢圓、雙曲線等詳述了其定義，而且在高中課程裡，這四種圓錐曲線是依序連接著被介紹出來，對初學者而言，除非是在學完這個圓錐曲線單元後有再經過自己回想，或經由別人指導的比較與整理，否則學生可能會產生這些曲線的定義以及相關公式上的混淆情形！

分析「拋物線與橢圓的圖像關係」之試題，對於學生以「切割橢圓後之焦點位置」來判斷是否為拋物線之方法，研究者認為如此答題的學生即是對這些曲線

的概念定義產生了混淆。而對於拋物線與橢圓有「共享焦點」的錯誤認知之學生，顯然是對這兩個曲線的概念定義不熟悉。拋物線和橢圓都有焦點，而且它們的焦點分別在它們的定義中扮演了重要的角色，但是形成拋物線和橢圓的條件不僅與它們的焦點相關，同時還牽涉到準線位置、距離、線段和等因素。若分別從高中課程給予的拋物線和橢圓的定義來看，形成拋物線的條件是「拋物線上的點到焦點與到準線的距離相等」，形成橢圓的條件是「橢圓上的點到兩焦點的距離和為定值，且此定值大於兩焦點之距離」，它們共同有的物件是焦點，因此在作拋物線與橢圓的整合性試題時，若是對這兩種曲線的概念定義沒有一定程度的瞭解，確實容易造成學習上的迷思。

讓學生瞭解圓錐曲線的概念定義是很重要的，有一些圖形如果沒有被完整地繪出來，通常很難用視覺來判斷它們是屬於何種曲線，而這個時候客觀的條件往往是學生能否做正確判斷的決定性因素。所謂「教學相長」，教師在教學的過程中發現學生的學習問題，從這些問題反思自己應當以何種方式來教導學生，使學生可以聽得懂，並且在學習過程中得到樂趣與成就感。研究者很幸運地能從這篇論文的研究過程中發現到學生學習拋物線的問題與迷思之處，並且深刻體會到圓錐曲線的概念定義對學生解題的影響，而這個經驗提醒了研究者日後進行相關單元之教學時更注意到要幫助學生瞭解拋物線與橢圓形的差別，且應清楚講解這些圖形在數學上的基本定義，因為唯有對定義能掌握清楚的人，才有能力進一步做更深入地學習！