

附 錄



附錄一、Kolb學習風格量表

Kolb學習風格量表

各位同學：

您們好，謝謝您參與我們的研究！本量表的主要目的是希望能夠了解各位同學的學習風格，各問題沒有所謂的教學標準答案，而是您寶貴的意見，且將作為本研究的參考資料。本資料內容絕對保密，請依實際的情形填答。

下面共有12個問題，每個問題有四種回答，根據各個狀況對您的適合程度依1、2、3、4分別加以排列（請勿重複或漏填）。其中最像的句子以1表示，而最不像是以4表示，而2、3分別代表第二像、第三像。

例如： 當我學習時，

- | | | |
|----------|----------------|--------|
| <u>3</u> | A.我是很強調分析的。 | 1=最像你 |
| <u>1</u> | B.我依自己心情而定。 | 2=第二像你 |
| <u>4</u> | C.我喜歡自己先問自己問題。 | 3=第三像你 |
| <u>2</u> | D.我重視學習效用。 | 4=最不像你 |

國立政治大學數學教學碩士在職專班
指導教授姜志銘博士 研究生林振清

【您的基本資料】

校名：_____ 班級：____ 座號：____ 姓名：_____

性別：男 女

1.當我學習的時候，

- ___A.我喜歡加入自己的感受。
- ___B.我喜歡觀察與聆聽。
- ___C.我喜歡針對觀念進行思考。
- ___D.我喜歡實作。

3.當我學習時，

- ___A.我有強烈的感覺及反應。
- ___B.我是安靜、謹慎的。
- ___C.我是試著將事情想通。
- ___D.我負責所有實作。

2.我學得最好的時候，是當

- ___A.我相信我的直覺與感受時。
- ___B.我仔細聆聽與觀察時。
- ___C.我依賴邏輯思考時。
- ___D.我努力完成實作時。

4.我學習是利用

- ___A.感覺。
- ___B.觀察。
- ___C.思考。
- ___D.實作。

5.當我學習時，

- ___A.我能接受新的經驗。
- ___B.我會從各個層面來思考問題。
- ___C.我喜歡分析事情，並將其分解成更小的問題。
- ___D.我喜歡試著實際動手做。

6.當我學習時，

- ___A.我是個直覺型的人。
- ___B.我是個觀察型的人。
- ___C.我是個邏輯型的人。
- ___D.我是個行動型的人。

7.我學得最好的時候，是從

- ___A.同學間的討論。
- ___B.觀察。
- ___C.理論。
- ___D.試作及練習。

8.當我學習時，

- ___A.我覺得整個人都投入學習中。
- ___B.我會在行動前都盡量準備妥當。
- ___C.我喜歡觀念及理論。
- ___D.我喜歡看到自己實作的成果。

9.我學習最好的時候，是

- ___A.我依賴自己的感覺時。
- ___B.我依賴自己的觀察力時。
- ___C.我依賴自己的觀念時。
- ___D.自己試作一些事情時。

10.當我學習時，

- ___A.我是容易相信的人。
- ___B.我是一個審慎的人。
- ___C.我是個理智的人。
- ___D.我是個能負責的人。

11.當我學習時，

- ___A.我是非常投入的。
- ___B.我喜歡觀察。
- ___C.我評估事物。
- ___D.我喜歡積極參與。

12.我學得最好的時候，是當我是

- ___A.接受他人看法、開放心胸時。
- ___B.非常小心時。
- ___C.分析想法時。
- ___D.實際動手做時。

謝謝您的填答！

附錄二、數學學習態度量表

數學學習態度量表

各位同學：

您們好，謝謝您參與我們的研究！本量表的主要目的是希望能夠了解各位同學的數學學習態度，各問題沒有所謂的教學標準答案，而是您寶貴的意見和看法，且將作為本研究的參考資料。本資料內容絕對保密，請依照實際的情形勾選。

國立政治大學數學教學碩士在職專班
指導教授姜志銘博士 研究生林振清

【您的基本資料】

校名：_____ 班級：____ 座號：____ 姓名：_____

性別：男 女

非不沒同非

常 常

不同意

同 同

意意見意意

- 1、我會用適當的參考資料幫助我學習數學。
- 2、我會把學校教的數學，當天就溫習一遍。
- 3、我會在數學課時想其他與數學無關的事情。
- 4、我不需要家人催促，就會主動地演算數學。
- 5、對於考試中不會做的題目我會在考完之後問清楚。
- 6、我覺得我不是學數學的料，無論怎樣用功也沒有用。
- 7、對於看不懂得題目我會反覆多看幾次。
- 8、我覺得數學是一門很有用的學科。
- 9、要考試之前，我會認真準備。
- 10、就算我數學考的很差我也不在乎。

非不沒同非
常 常
不同意
同 同
意見意見

- 11、在上數學課的時候我會想要睡覺。
- 12、我平常很少演算數學，一直等到考試前才著手練習。
- 13、對於數學老師發的資料及數學考卷，弄丟了我也不在乎。
- 14、我常常在數學課與同學聊天。
- 15、我覺得科學家才需要學數學，其他人並不需要。
- 16、我覺得學數學似乎沒有什麼用。
- 17、對於老師規定的作業我會按時做完。
- 18、對於數學的難題，我寧可別人直接告訴我答案也不要自己想。
- 19、我平常就有讀數學而不只是考試到了才讀。
- 20、我會預習老師還沒有教的數學進度。
- 21、我覺得學好數學對邏輯有幫助。
- 22、與其他學科相比，我喜歡上數學課。
- 23、當老師在講解的時候我會專心聽。
- 24、當我演算數學時，如果無法馬上算出答案，我會放棄。
- 25、當老師在檢討問題時，我會專心聽講。
- 26、當同學在數學課提出問題時，我會注意聽他的問題
- 27、我時常與同學或老師討論數學。
- 28、學數學是件浪費時間的事。
- 29、對於看不懂得題目我會反覆多看幾次。
- 30、真搞不懂為什麼有些人能花這麼多時間在數學上，並且好像很愉快的樣子。

謝謝您的填答！

附錄三、實驗教學前測預試卷

高中數學第三冊第三章第一節圓的方程式（實驗教學前測預試卷）

班級_____姓名_____座號_____總分_____

填充題：

1. 在平面坐標上， P 點位於圓 $x^2 + y^2 = 16$ 上， Q 點位於圓 $x^2 + y^2 = 4$ 上，則 $\triangle OPQ$ 的最大面積為_____。
2. 圓 $C: (x+5)^2 + (y-6)^2 = 9$ ， $A(4, 0)$ ， P 為圓 C 上的動點， Q 在 \overline{AP} 線段上， $\overline{AQ}:\overline{QP}=1:2$ ，則 Q 點所成圖形的方程式為_____。
3. 求 $(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 2y - 8) \leq 0$ 之圖形的面積為_____。
4. 已知三點 $A(-3, 2)$ ， $B(-5, 6)$ ， $C(-7, 0)$ ， $\triangle ABC$ 的外接圓方程為_____。
5. 設一圓與直線 $3x - 4y + 5 = 0$ 及 $3x - 4y - 3 = 0$ 都相切，且圓心在直線 $2x + y - 14 = 0$ 上，則此圓的方程式為_____。
6. 設圓心在 $(-1, 2)$ ，且與直線 $4x - 3y = 5$ 相切的圓方程式為_____。
7. 設圓： $x^2 + y^2 - 4x + 6y + a = 0$ ，半徑為 2，圓心在直線 $y = bx + 1$ 上，則數對 $(a, b) =$ _____。

8. 方程式 $x^2 + y^2 + 2(a-2)x - 2(a+4)y + 3a^2 - 1 = 0$ 表一圓，則 a 範圍為_____。
9. 若 P 為單位圓 $x^2 + y^2 = 1$ 上任一點，令 O 為原點 $(0, 0)$ ， Q 為點 $(3, -2)$ ，試求 ΔPOQ 面積的最大值為_____。
10. 在坐標平面上，已知兩個定點 $A(3, 5)$ ， $B(-10, 4)$ ，設 $P(x, y)$ 動點且知 $\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 3$ ，則動點 $P(x, y)$ 的軌跡方程式為_____。
11. 一圓 C 過 $A(1, 4)$ ， $B(3, -2)$ 兩點，且圓心在直線 $L: x - 2y - 1 = 0$ 上，則圓 C 的方程式為_____。
12. 繪製參數方程式 $\begin{cases} x = 2 + 3\cos\theta \\ y = 4 - 3\sin\theta \end{cases}$ ， $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ 的圖形_____。
13. 設 $A(2, 3)$ 為圓 $x^2 + y^2 = 27$ 內部一點，試求過 A 之弦中點軌跡方程式為_____。
14. 以 $A(10, 16)$ 為圓心作圓與已知圓 $(x-3)(x-7) + (y-2)(y-10) = 0$ 內切，試求此圓方程式_____。
15. 設 $x, y \in \mathbf{R}$ ，且滿足 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ ，試求 $x^2 + y^2$ 的最大值_____。

高中數學第三冊第三章第二節圓與直線的關係（實驗教學前測預試卷）

班級_____姓名_____座號_____總分_____

填充題：

1. 設直線 $L: x - y + 4 = 0$ ，圓 $C: x^2 + y^2 = 40$ 相交，請求出其交點坐標_____。
2. 已知直線 $L: y = mx + 2$ 和圓 $C: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$ ；若 L 與 C 有相異兩交點，則 m 的範圍為_____。
3. 設 $A(4, 1)$ ， $B(0, 5)$ 為坐標平面上兩點，若 \overline{AB} 為圓的一弦且距圓心 $\sqrt{8}$ ，則圓方程式為_____。
4. 由原點作圓 $C: (x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 9$ 的兩切線，若兩切線的夾角為 2θ ，求 $\tan 2\theta$ 為_____。
5. 已知直線 $L: 2x + y = k$ 與圓 $C: x^2 + y^2 - 4x - 6y - 37 = 0$ 相交於 A 、 B 兩點，且 $\overline{AB} = 6\sqrt{5}$ ，試求 k 之值_____。
6. 設直線 $L: 4x + 3y = 30$ ， P 為圓 $C: x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ 上一點，試求(1) P 點到直線 L 之最短距離_____；(2) P 點到直線 L 之最長距離_____。
7. 求過點 $(3, -1)$ 且與圓 $C: x^2 + y^2 + 2x - y - 17 = 0$ 相切的直線方程式為_____。

8. 設圓 $C: x^2 + y^2 + ax + by + 14 = 0$ 與直線 $L: x - 2y = k$ 相切於點 $(5, 1)$ ，試求序組 (a, b, k) 為_____。
9. 若 P 為單位圓 $x^2 + y^2 = 1$ 上任一點，令 O 為原點 $(0, 0)$ ， Q 為點 $(3, -2)$ ，試求 $\triangle POQ$ 面積的最大值為_____。
10. 與直線 $L: 3x - 4y = 7$ 垂直，且與圓 $C: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ 相切的切線方程式為_____。
11. 求過點 $P(4, 2)$ 且與圓 $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$ 相切的切線方程式為_____。
12. 在坐標 $(0, 3)$ 處有一光源，將圓 $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ 投射到 x 軸的影長是_____。
13. 過點 $P(2, 1)$ 作圓 $x^2 + y^2 = 2$ 的二切線，切點分別為 A 、 B ，試求 $\triangle PAB$ 的外接圓方程式_____。
14. 設 $P(2, -1)$ ，圓 $C: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ ，(1)自 P 點作圓 C 的切線，求切線段長_____；(2)過 P 點作圓 C 的割線，交圓 C 於 A 、 B 兩點，求 $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ 長_____。

高中數學第三冊第三章第三節球面方程式（實驗教學前測預試卷）

班級_____姓名_____座號_____總分_____

填充題：

1. 一球面之球心為 $(-1, 5, 0)$ ，且通過點 $(0, 2, -1)$ ，求此球面方程式為_____。
2. 試求過點 $(0, 2, 2)$ 與 $(4, 0, 0)$ ，且球心在 y 軸上的球面方程式為_____。
3. 過 $A(6, -1, 0)$ 、 $B(2, 3, 4)$ 兩點的球面有無限多個，求半徑最小的球面方程式為_____。
4. 已知一四面體的四個頂點分別為 $(0, 0, 0)$ 、 $(1, 0, 0)$ 、 $(0, 2, 0)$ 、 $(0, 0, 3)$ ，求此四面體的外接球面方程式為_____。
5. 若球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 10 = 0$ 的球心 (a, b, c) 與半徑 r ，求序組 $(a, b, c, r) =$ _____。
6. 設 $S: x^2 + y^2 + z^2 + kx + ky - kz + k = 0$ 的圖形為半徑是 1 的球面，求實數 k 之值為_____。
7. 設 $S: x^2 + y^2 + z^2 + 2my + 2mz + 3m^2 - 9 = 0$ 表一球面，其中 m 為實數，試求：
(1) m 的範圍為_____； (2) 球面 S 的最大半徑為_____。

8. 設 $A(1, 2, 3)$ ， P 為球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 2z + 7 = 0$ 上的點，試求：
 (1) \overline{AP} 的最小值為_____；(2) 此時之 P 點坐標為_____。
9. 設 $P(1, 2, -1)$ ，球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 3 = 0$ ，(1) 自 P 點作球面 S 的切線，切點為 T ，求 \overline{PT} 為_____；(2) 自 P 點作球面 S 的割線，交球面 S 於 A 、 B 兩點，求 $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ 為_____。
10. 設 $S: (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 25$ ，在球面 S 上有兩點，其坐標皆可表成 $(t, 2, -2)$ 之形式，(1) 求 t 的值為_____；(2) 若球心對此兩點的張角為 θ ，求 $\cos \theta$ 為_____。
11. 設 $A(1, -3, 1)$ ， $B(1, 3, 4)$ ，求滿足 $\overline{PA} : \overline{PB} = 1 : 2$ 之點 $P(x, y, z)$ 所成圖形的方程式為_____。

高中數學第三冊第三章第四節球面與平面的關係（實驗教學前測預試卷）

班級_____姓名_____座號_____總分_____

填充題：

1. 已知平面 $E: 2x + y + 2z = 5$ ，截球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 6z - 36 = 0$ 於一圓 C ，求：圓 C 的圓心為_____。
2. 設球面 S 過點 $P(7, 5, 5)$ ，若 xy 平面截球面 S 於圓 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 40$ （在 xy 平面上），求球面 S 的方程式為_____。
3. 求過點 $P(1, 4, 3)$ 而與球面 $S: (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$ 相切之切平面方程式為_____。
4. 設平面 $E: 2x + 2y - z + 7 = 0$ 與球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 10y - 31 = 0$ 相切，求切點坐標為_____。
5. 設平面 $E: x + 2y - 2z + k = 0$ ，球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 2z + 5 = 0$ ，(1)若平面 E 與球面 S 相交成一圓，求 k 值的範圍為_____；(2)若平面 E 與球面 S 相交成大圓，求 k 值為_____。
6. 設 a 為實數，若方程組 $\begin{cases} x + 2y + 2z = a \\ x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4 \end{cases}$ 沒有實數解，求 a 的範圍為_____。

7. 設平面 $E: 2x + 2y + z + 15 = 0$ 與球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z - 3 = 0$ ，求(1) 球面 S 上距離平面 E 最近的點之坐標為_____；(2)又此最近距離是_____。
8. 設 x 、 y 、 z 為實數，且 $P(x, y, z)$ 為平面 $E: 2x - y - 2z = 8$ 上的動點，求 $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$ 的最小值為_____。
9. 設球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + k = 0$ 與直線 $L: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-2}$ 相切，試求(1) k 值為_____；(2)切點坐標為_____。
10. 已知球面 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z - 8 = 0$ 與 x 軸交於 A 、 B 兩點，求 \overline{AB} 之長度為_____。
11. 設某一地球儀，其赤道長120公分，則北緯 60° 的緯線長為_____公分。
12. 設地球是一個圓球體，半徑為6400公里，已知 A 點在東經 121° ，北緯 25° 處， B 點在東經 121° ，北緯 55° 處，求 A 、 B 兩處的球面距離為_____公里。

附錄四、實驗教學前測卷

高中數學第三冊第三章第一節 圓的方程式（實驗教學前測卷）

班級_____姓名_____座號_____總分_____

計算題：

1. 設圓 $C : x^2 + y^2 - 4x + 6y + a = 0$, 半徑為 2, 圓心在直線 $y = bx + 1$ 上, 則數對 $(a, b) =$ _____。
2. 設圓心在 $(-1, 2)$, 且與直線 $4x - 3y = 5$ 相切的圓方程式為_____。
3. 若 P 為單位圓 $x^2 + y^2 = 1$ 上任一點, 令 O 為原點 $(0, 0)$, Q 為點 $(3, -2)$, 試求 $\triangle POQ$ 面積的最大值為_____。
4. 以 $A(10, 16)$ 為圓心作圓與已知圓 $(x - 3)(x - 7) + (y - 2)(y - 10) = 0$ 內切, 試求此圓方程式_____。
5. 方程式 $x^2 + y^2 + 2(a - 2)x - 2(a + 4)y + 3a^2 - 1 = 0$ 表一圓, 則 a 的範圍為_____。

6. 已知三點 $A(-3, 2)$, $B(-5, 6)$, $C(-7, 0)$, ΔABC 的外接圓方程式爲_____。
7. 一圓 C 過 $A(1, 4)$, $B(3, -2)$ 兩點, 且圓心在直線 $L: x - 2y - 1 = 0$ 上, 則圓 C 的方程式爲_____。
8. 設一圓與直線 $3x - 4y + 5 = 0$ 及 $3x - 4y - 3 = 0$ 都相切, 且圓心在直線 $2x + y - 14 = 0$ 上, 則此圓的方程式爲_____。
9. 在坐標平面上, 已知兩個定點 $A(3, 5)$, $B(-10, 4)$, 設 $P(x, y)$ 動點且知 $\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 3$, 則動點 $P(x, y)$ 的軌跡方程式爲_____。
10. 設 $A(2, 3)$ 爲圓 $x^2 + y^2 = 27$ 內部一點, 試求過 A 之弦中點的軌跡方程式_____。
11. 求 $(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 2y - 8) \leq 0$ 之圖形的面積爲_____。

高中數學第三冊第三章第二節 圓與直線的關係（實驗教學前測卷）

班級_____姓名_____座號_____總分_____

計算題：

1. 設直線 $L: x - y + 4 = 0$ ，圓 $C: x^2 + y^2 = 40$ 相交，請求出其交點坐標_____。
2. 設直線 $L: 4x + 3y = 30$ ， P 為圓 $C: x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ 上一點，試求 P 點到直線 L 之最短距離_____。
3. 已知直線 $L: 2x + y = k$ 與圓 $C: x^2 + y^2 - 4x - 6y - 37 = 0$ 相交於 A 、 B 兩點，且 $\overline{AB} = 6\sqrt{5}$ ，試求 k 之值_____。
4. 與直線 $L: 3x - 4y = 7$ 垂直，且與圓 $C: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ 相切的切線方程式為_____。
5. 求過點 $P(4, 2)$ 且與圓 $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$ 相切的切線方程式為_____。

6. 已知直線 $L: y = mx + 2$ 和圓 $C: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$; 若 L 與 C 有相異兩交點, 則 m 的範圍為_____。
7. 求過點 $(3, -1)$ 且與圓 $C: x^2 + y^2 + 2x - y - 17 = 0$ 相切的直線方程式為_____。
8. 設 $P(2, -1)$, 圓 $C: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$, 自 P 點作圓 C 的切線, 求切線段長_____。
9. 設 $A(4, 1)$, $B(0, 5)$ 為坐標平面上兩點, 若 \overline{AB} 為圓的一弦且距圓心 $\sqrt{8}$, 則圓方程式為_____。
10. 在坐標 $(0, 3)$ 處有一光源, 將圓 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 投射到 x 軸的影長是_____。
11. 過點 $P(2, 1)$ 作圓 $x^2 + y^2 = 2$ 的二切線, 切點分別為 A 、 B , 試求 $\triangle PAB$ 的外接圓方程式_____。

高中數學第三冊第三章第三節 球面方程式（實驗教學前測卷）

班級_____姓名_____座號_____總分_____

計算題：

1. 設 $P(1, 2, -1)$ ，球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 3 = 0$ ，自 P 點作球面 S 的切線，切點為 T ，求 \overline{PT} 為_____。
2. 已知一四面體的四個頂點分別為 $(0, 0, 0)$ 、 $(1, 0, 0)$ 、 $(0, 2, 0)$ 、 $(0, 0, 3)$ ，求此四面體的外接球面方程式為_____。
3. 設 $A(1, 2, 3)$ ， P 為球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 2z + 7 = 0$ 上的點，試求：
(1) \overline{AP} 的最小值為_____；(2) 此時之 P 點坐標為_____。
4. 試求過點 $(0, 2, 2)$ 與 $(4, 0, 0)$ ，且球心在 y 軸上的球面方程式為_____。
5. 過 $A(6, -1, 0)$ 、 $B(2, 3, 4)$ 兩點的球面有無限多個，求半徑最小的球面方程式為_____。

6. 設 $S: x^2 + y^2 + z^2 + 2my + 2mz + 3m^2 - 9 = 0$ 表一球面，其中 m 為實數，試求：
(1) m 的範圍為_____；(2)球面 S 的最大半徑為_____。
7. 設 $S: (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 25$ ，在球面 S 上有兩點，其坐標皆可表成 $(t, 2, -2)$ 之形式，(1)求 t 的值為_____；(2)若球心對此兩點的張角為 θ ，求 $\cos \theta$ 為_____。
8. 設 $S: x^2 + y^2 + z^2 + kx + ky - kz + k = 0$ 的圖形為半徑是1的球面，求實數 k 之值為_____。

高中數學第三冊第三章第四節 球面與平面的關係（實驗教學前測卷）

班級_____姓名_____座號_____總分_____

計算題：

1. 求過點 $P(1, 4, 3)$ 而與球面 $S: (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$ 相切之切平面方程式為_____。
2. 設平面 $E: 2x + 2y - z + 7 = 0$ 與球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 10y - 31 = 0$ 相切，求切點坐標為_____。
3. 設平面 $E: x + 2y - 2z + k = 0$ ，球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 2z + 5 = 0$ ，若平面 E 與球面 S 相交成一圓，求 k 值的範圍為_____。
4. 已知球面 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z - 8 = 0$ 與 x 軸交於 A 、 B 兩點，求 \overline{AB} 之長度為_____。
5. 設地球是一個圓球體，半徑為6400公里，已知 A 點在東經 121° ，北緯 25° 處， B 點在東經 121° ，北緯 55° 處，求 A 、 B 兩處的球面距離為_____公里。
6. 設球面 S 過點 $P(7, 5, 5)$ ，若 xy 平面截球面 S 於一圓 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 40$ （在 xy 平面上），求球面 S 的方程式為_____。

7. 設 a 為實數，若方程組 $\begin{cases} x+2y+2z=a \\ x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4 \end{cases}$ 沒有實數解，求 a 的範圍為_____。
8. 設 x 、 y 、 z 為實數，且 $P(x, y, z)$ 為平面 $E: 2x-y-2z=8$ 上的動點，求 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$ 的最小值為_____。
9. 設平面 $E: 2x+2y+z+15=0$ 與球面 $S: x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z-3=0$ ，求(1)球面 S 上距離平面 E 最近的點之坐標為_____；(2)又此最近距離是_____。
10. 設球面 $S: x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+k=0$ 與直線 $L: \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-2}$ 相切，試求切點坐標為_____。
11. 已知平面 $E: 2x+y+2z=5$ ，截球面 $S: x^2+y^2+z^2-4y+6z-36=0$ 於一圓 C ，求：圓 C 的圓心為_____。

附錄五、實驗教學回家作業卷

高中數學第三冊第三章第一節 圓的方程式 (實驗教學回家作業卷)

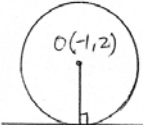
班級 _____ 姓名 _____ 座號 _____

除蟲大作戰 (Find the bug in each item and correct it!)

1. 設圓 $C: x^2 + y^2 - 4x + 6y + a = 0$, 半徑為 2, 圓心在直線 $y = bx + 1$ 上, 則數對 $(a, b) =$ _____。

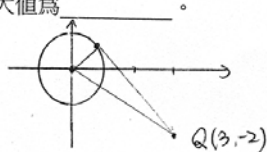
$$\begin{aligned} (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) &= -a + 4 + 9 && \therefore (a, b) = (-15, -2) \\ \Rightarrow -a + 4 + 9 &= 2 \Rightarrow a = -15 \\ \because \text{圓心}(2, -3) \text{ 在 } y = bx + 1 \text{ 上} \\ \therefore -3 &= 2b + 1 \Rightarrow b = -2 \end{aligned}$$

2. 設圓心在 $(-1, 2)$, 且與直線 $4x - 3y = 5$ 相切的圓方程式為 _____。



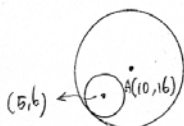
$$\begin{aligned} d(O, L) = r &= \frac{|4 \times (-1) + 6 - 5|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{3}{5} \\ \therefore \text{圓: } (x+1)^2 + (y-2)^2 &= \frac{9}{25} \end{aligned}$$

3. 若 P 為單位圓 $x^2 + y^2 = 1$ 上任一點, 令 O 為原點 $(0, 0)$, Q 為點 $(3, -2)$, 試求 $\triangle POQ$ 面積的最大值為 _____。



$$\begin{aligned} \text{設 } P(\cos \theta, \sin \theta) & \quad \therefore \max = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \text{則 } \triangle POQ &= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} |2 \cos \theta + 3 \sin \theta| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{5} \sin(\theta + \phi) \end{aligned}$$

4. 以 $A(10, 16)$ 為圓心作圓與已知圓 $(x-3)(x-7) + (y-2)(y-10) = 0$ 內切, 試求此圓方程式 _____。

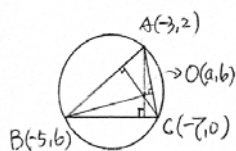


$$\begin{aligned} (x-3)(x-7) + (y-2)(y-10) &= 0 \\ \Rightarrow x^2 - 10x + 21 + y^2 - 12y + 20 &= 0 \\ \Rightarrow (x-5)^2 + (y-6)^2 &= -4 + 25 + 36 = 20 \\ \Rightarrow \text{圓 } (5, 6), \text{ 半徑 } &= \sqrt{20} \\ \text{連心線長} = \sqrt{5^2 + 10^2} &= \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \\ \therefore \text{圓: } (x-10)^2 + (y-16)^2 &= 145 \end{aligned}$$

5. 方程式 $x^2 + y^2 + 2(a-2)x - 2(a+4)y + 3a^2 - 1 = 0$ 表一圓, 則 a 的範圍為 _____。

$$\begin{aligned} 2(a-2) + [-2(a+4)] - 4(3a^2 - 1) &> 0 \quad \therefore a > \frac{2\sqrt{3}}{11}, a < -\frac{2\sqrt{3}}{11} \\ \Rightarrow 2a - 4 - 2a - 8 - 12a^2 + 4 &> 0 \\ \Rightarrow 12a^2 - 12 &> 0 \\ \Rightarrow a^2 &> \frac{12}{12} \end{aligned}$$

6. 已知三點 $A(-3, 2)$, $B(-5, 6)$, $C(-7, 0)$, $\triangle ABC$ 的外接圓方程式為 _____。



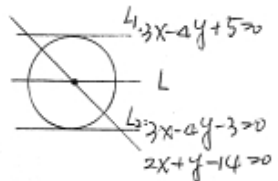
$$\begin{aligned} \text{設 } O(a, b) & \\ \because \vec{OB} \cdot \vec{AC} &= 0 \quad \vec{OC} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \Rightarrow (-5-a, 6-b) \cdot (-4, -2) &= 0 \Rightarrow (-7-a, -b) \cdot (-2, 4) = 0 \\ \Rightarrow 20 + 4a - 12 + 2b &= 0 \Rightarrow 14 + 2a - 4b = 0 \\ \Rightarrow 4a + 2b &= -8 \quad \text{--- ①} \quad \Rightarrow a - 2b = -7 \quad \text{--- ②} \\ \text{①} + \text{②} \Rightarrow 5a &= -15 \Rightarrow a = -3 \\ \text{代 ②} \Rightarrow b &= 2 \\ \Rightarrow O(-3, 2), r &= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \\ \therefore \text{圓: } (x+3)^2 + (y-2)^2 &= 20 \end{aligned}$$

背面尚有試題

7. 一圓C過A(1, 4), B(3, -2)兩點, 且圓心在直線L: $x - 2y - 1 = 0$ 上, 則圓C的方程式為_____。

$$\begin{aligned} (x-1)(x-3) + (y-4)(y+2) &= 0 \\ \Rightarrow x^2 - 4x + 3 + y^2 - 2y - 8 &= 0 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

8. 設一圓與直線 $3x - 4y + 5 = 0$ 及 $3x - 4y - 3 = 0$ 都相切, 且圓心在直線 $2x + y - 14 = 0$ 上, 則此圓的方程式為_____。



$L_1: 3x - 4y + 5 = 0$
 $L_2: 3x - 4y - 3 = 0$
 $L: 2x + y - 14 = 0$

$$L \parallel L_1, L \parallel L_2 \Rightarrow L: 3x - 4y + t = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x + y = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x = 55 \\ x = 5, y = 4 \end{cases} \Rightarrow O(5, 4)$$


$$r = \frac{5 - (-3)}{2} = 4$$

$$\therefore \text{圓: } (x-5)^2 + (y-4)^2 = 16$$

9. 在坐標平面上, 已知兩個定點A(3, 5), B(-10, 4), 設P(x, y)動點且知 $\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 3$, 則動點P(x, y)的軌跡方程式為_____。

$$\begin{aligned} 2[(x-3)^2 + (y-5)^2] &= 3[(x+10)^2 + (y-4)^2] \\ \Rightarrow 2(x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25) &= 3(x^2 + 20x + 100 + y^2 - 8y + 16) \\ \Rightarrow x^2 + 32x + y^2 - 4y + 280 &= 0 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 + 32x - 4y + 280 &= 0 \end{aligned}$$

10. 設A(2, 3)為圓 $x^2 + y^2 = 27$ 內部一點, 試求過A之弦中點的軌跡方程式_____。

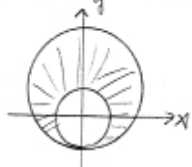


$$\overline{OA} = \sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13} \quad \text{圓心} = \frac{O+A}{2} = (1, \frac{3}{2})$$

$$\therefore \text{圓: } (x-1)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = (\frac{\sqrt{13}}{2})^2$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = \frac{13}{4}$$

11. $(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 2y - 8) \leq 0$ 之圖形的面積為_____。

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ x^2 + y^2 - 2y - 8 &= 0 \\ \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 &= 9 \end{aligned}$$


$$\therefore \text{面積} = 9\pi - 4\pi = 5\pi$$

班級 _____ 姓名 _____ 座號 _____

除蟲大作戰 (Find the bug in each item and correct it!)

1. 設直線 $L: x-y+4=0$, 圓 $C: x^2+y^2=40$ 相交, 請求出其交點坐標 _____。

$$\begin{cases} x^2+y^2=40 \\ x-y=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-10 \\ x-y=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-7 \\ y=3 \end{cases}$$

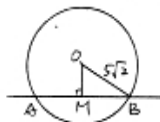
交點 $(-7, 3), (3, 7)$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+y)(x-y)=40 \\ x-y=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-7 \\ y=3 \end{cases}$$

2. 設直線 $L: 4x+3y=30$, P 為圓 $C: x^2+y^2-6x+8y=0$ 上一點, 試求 P 點到直線 L 之最短距離 _____。

$C: (x-3)^2+(y+4)^2=25 \Rightarrow t^2=1 \Rightarrow t=\pm 1$
 $\Rightarrow O(3, -4), r=5$
 $\Rightarrow P(3+4t, -4+3t)$
 $\Rightarrow |4(3+4t)+3(-4+3t)-30|/5 = |12+16t-12+9t-30|/5 = |25t-18|/5$
 $\Rightarrow (4t)^2+(3t)^2=25 \Rightarrow t^2=1 \Rightarrow t=\pm 1$
 $\Rightarrow P(-1, -7)$
 $d(P, L) = \frac{|4 \cdot (-1) + 3 \cdot (-7) - 30|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|-4-21-30|}{5} = \frac{55}{5} = 11$

3. 已知直線 $L: 2x+y=k$ 與圓 $C: x^2+y^2-4x-6y-37=0$ 相交於 A, B 兩點, 且 $\overline{AB}=6\sqrt{5}$, 試求 k 之值 _____。



$$C: (x-2)^2+(y-3)^2=37+4+9=50 \Rightarrow O(2, 3), r=5\sqrt{2}$$

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 3\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \overline{OM} = \sqrt{r^2 - \overline{BM}^2} = \sqrt{50 - 45} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \frac{|2 \cdot 2 + 3 - k|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \sqrt{5} \Rightarrow 7-k=5 \Rightarrow k=2$$

4. 與直線 $L: 3x-4y=7$ 垂直, 且與圓 $C: (x-1)^2+(y-2)^2=1$ 相切的切線方程式為 _____。

所求切線斜率 $= \frac{4}{3}$, 圓心 $(1, 2), r=1$ $\Rightarrow 4x-3y+7=0, 4x-3y-3=0$

\therefore 切線: $y-2 = \frac{4}{3}(x-1) \pm 1 \cdot \sqrt{1+(\frac{4}{3})^2}$

$\Rightarrow 3y-6 = 4x-4 \pm 5$

5. 求過點 $P(4, 2)$ 且與圓 $x^2+y^2-4x+4y-2=0$ 相切的切線方程式為 _____。

$P(x, y): 4^2+2^2-4 \cdot 4+4 \cdot 2-2 > 0 \Rightarrow mx-y-(4m-2)=0 \Rightarrow 3m^2+8m-3=0$

$\Rightarrow P$ 在圓外

利用 $\frac{|2m+2-(4m-2)|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{10} \Rightarrow (2m+1)(m-3)=0$

圓: $(x-2)^2+(y+2)^2=10$ $\Rightarrow |2m-4| = \sqrt{10}\sqrt{m^2+1} \Rightarrow m = -\frac{1}{3}, 3$

\Rightarrow 圓心 $O(2, -2), r=\sqrt{10}$ $\therefore L: y-2 = -\frac{1}{3}(x-4)$

設切線 $L: y-2 = m(x-4)$ $\Rightarrow 4(m^2-4m+4) = 10m^2+10$ or $y-2 = 3(x-4)$

6. 已知直線 $L: y = mx+2$ 和圓 $C: (x-2)^2+(y+3)^2=4$; 若 L 與 C 有相異兩交點, 則 m 的範圍為 _____。

$L: mx-y+2=0 \Rightarrow |2m+5| < 2\sqrt{m^2+1} \Rightarrow m = \frac{10 \pm \sqrt{100-48}}{2 \cdot 1} = 5 \pm \sqrt{13}$

$C: \text{圓心 } O(2, -3), r=2 \Rightarrow 4m^2+20m+25 < 2m^2+1 \Rightarrow 5-\sqrt{13} < m < 5+\sqrt{13}$

$\therefore d(O, L) < r \Rightarrow 2m^2-10m+24 < 0 \Rightarrow m^2-10m+12 < 0$

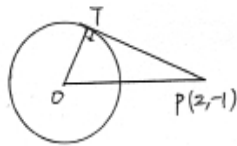
$\Rightarrow \frac{|2m+5|}{\sqrt{m^2+1}} < 2$

背面尚有試題

7. 求過點 $(3, -1)$ 且與圓 $C: x^2 + y^2 + 2x - y - 17 = 0$ 相切的直線方程式為 _____。

$$\begin{aligned} & \Rightarrow 3x - y + 2 \cdot \frac{x+3}{2} - \frac{-1-y}{2} - 17 = 0 \\ & \Rightarrow 3x - y + 3 + x + \frac{1}{2} + \frac{y}{2} - 17 = 0 \\ & \Rightarrow 6x - 2y + 6 + 2x + 1 + y - 34 = 0 \\ & \Rightarrow 8x - y - 27 = 0 \end{aligned}$$

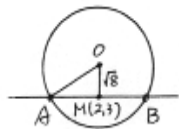
8. 設 $P(2, -1)$ ，圓 $C: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ ，自 P 點作圓 C 的切線，求切線段長 _____。



$$\begin{aligned} C: (x+2)^2 + (y-1)^2 &= 3+4+1=8 \\ \Rightarrow O(-2, 1), r &= 2\sqrt{2} \\ \text{又 } OP &= \sqrt{(2-(-2))^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \\ \Rightarrow PT &= \sqrt{OP^2 - r^2} = \sqrt{20 - 8} = \sqrt{12} \end{aligned}$$

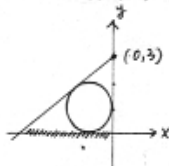
9. 設 $A(4, 1)$, $B(0, 5)$ 為坐標平面上兩點，若 \overline{AB} 為圓的一弦且距圓心 $\sqrt{8}$ ，則圓方程式

為 _____。



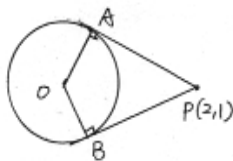
$$\begin{aligned} \overline{AB} &= (-4, 4) = 4(-1, 1) \Rightarrow 2t^2 = 8 \Rightarrow t = \pm 2 \\ \Rightarrow \vec{n} &= (1, 1) \quad \overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \sqrt{8} \Rightarrow y - \overline{OA} = 4 \\ \text{設 } O &= (2+t, 3+t) \quad \text{① } t=2 \Rightarrow O(4, 5) \Rightarrow (x-4)^2 + (y-5)^2 = 4 \\ \text{則 } \sqrt{(2+t-t)^2 + (3+t-3)^2} &= \sqrt{8} \quad \text{② } t=-2 \Rightarrow O(0, 1) \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 4 \\ \Rightarrow t^2 + t^2 &= 8 \end{aligned}$$

10. 在坐標 $(0, 3)$ 處有一光源，將圓 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 投射到 x 軸的影長是 _____。



$$\begin{aligned} \text{設切線: } y-3 &= mx \Rightarrow m^2 - 4m + 4 = m^2 + 1 \quad \text{另一切線 } |x|=0 \Rightarrow x=1 \\ \Rightarrow mx - y + 3 &= 0 \Rightarrow 4m = 3 \Rightarrow m = \frac{3}{4} \Rightarrow x=1 \\ \frac{|-m-1+3|}{\sqrt{m^2+1}} &= 1 \Rightarrow \text{切線: } y-3 = \frac{3}{4}x \quad \text{影長} = |-(-4)| = 5 \\ \Rightarrow |2-m| &= \sqrt{m^2+1} \quad \text{令 } y=0 \Rightarrow x=-4 \end{aligned}$$

11. 過點 $P(2, 1)$ 作圓 $x^2 + y^2 = 2$ 的二切線，切點分別為 A 、 B ，試求 $\triangle PAB$ 的外接圓方程式 _____。



$\triangle PAB$ 的外接圓就是
以 OP 為直徑的圓。

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x+0)(x+2) + (y+0)(y+1) &= 0 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x + y &= 0 \end{aligned}$$

班級 _____ 姓名 _____ 座號 _____

除蟲大作戰 (Find the bug in each item and correct it!)

1. 設 $P(1, 2, -1)$, 球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 3 = 0$, 自 P 點作球面 S 的切線, 切點為 T , 求 \overline{PT} 為 _____。

$$\begin{aligned} \overline{PT} &= \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 1 - 3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

2. 已知一四面體的四個頂點分別為 $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 3)$, 求此四面體的外接球面方程式為 _____。

設球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 + dx + ey + fz + g = 0$ 解得 $g=0, d=-1, e=-1, f=-1$

$(0, 0, 0)$ 代 $S \Rightarrow g=0$

$(1, 0, 0)$ 代 $S \Rightarrow 1 + d + g = 0$

$(0, 2, 0)$ 代 $S \Rightarrow 2 + 2e + g = 0$

$(0, 0, 3)$ 代 $S \Rightarrow 3 + 3f + g = 0$

$\therefore S: x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0$

3. 設 $A(1, 2, 3)$, P 為球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 2z + 7 = 0$ 上的點, 試求: (1) \overline{AP} 的最小值為 _____; (2) 此時之 P 點坐標為 _____。

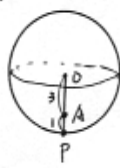
(1) $S: (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 4$

$\Rightarrow O(-1, 3, 1), R=2$

$\because \overline{AO} = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-2)^2 + (1-3)^2} = 3 < 4$

$\therefore A$ 在球面內。

得 \overline{AP} 最小值 $= 4 - 3 = 1$

(2)  利用向量坐標公式

得 $A = \frac{3P + 1O}{3 + 1}$

$\Rightarrow P = \frac{4A - O}{3}$

$= \frac{4(1, 2, 3) - (-1, 3, 1)}{3}$

$= (\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{11}{3})$

4. 試求過點 $(0, 2, 2)$ 與 $(4, 0, 0)$, 且球心在 y 軸上的球面方程式為 _____。

設球面 $S: x^2 + (y-b)^2 + z^2 = r^2$

$(0, 2, 2)$ 代 $S \Rightarrow 0^2 + (2-b)^2 + 2^2 = r^2 \Rightarrow b^2 - 4b + 8 = r^2 \text{---} \textcircled{1}$

$(4, 0, 0)$ 代 $S \Rightarrow 4^2 + (0-b)^2 + 0^2 = r^2 \Rightarrow b^2 + 16 = r^2 \text{---} \textcircled{2}$

$\textcircled{2} - \textcircled{1} \Rightarrow 4b = 8 \Rightarrow b = 2$

代 $\textcircled{2} \Rightarrow r^2 = 2^2 + 16 = 20$

$\therefore S: x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 20$

背面尚有試題

5. 過 $A(6, -1, 0)$ 、 $B(2, 3, 4)$ 兩點的球面有無限多個，求半徑最小的球面方程式為_____。

即 $A(6, -1, 0)$ 、 $B(2, 3, 4)$ 為直徑的球面。

$$(x-6)(x-2) + (y-1)(y-3) + (z-0)(z-4) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y - 4z + 15 = 0$$

6. 設 $S: x^2 + y^2 + z^2 + 2my + 2mz + 3m^2 - 9 = 0$ 表一球面，其中 m 為實數，試求：(1) m 的範圍為_____；(2) 球面 S 的最大半徑為_____。

$$(1) S: x^2 + (y+m)^2 + (z+m)^2 = -3m^2 - 9 + m^2 + m^2 = 9 - m^2$$

$$9 - m^2 > 0 \Rightarrow m^2 < 9 \Rightarrow m < \pm 3$$

(2) 當 $m = 3$ 有最大半徑。

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 6z + 16 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = -16 + 9 + 9 = 2 \quad \therefore \text{最大半徑} = \sqrt{2}$$

7. 設 $S: (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 25$ ，在球面 S 上有兩點，其坐標皆可表成 $(t, 2, -2)$ 之形式。(1) 求 t 的值为_____；(2) 若球心對此兩點的張角為 θ ，求 $\cos \theta$ 為_____。

$$(1) (t-1)^2 + (2+1)^2 + (-2+2)^2 = 25 \quad (2) \text{ 令球心 } O(1, -1, -2)$$

$$\Rightarrow t^2 - 2t + 1 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow t^2 - 2t - 15 = 0$$

$$\Rightarrow (t+5)(t-3) = 0$$

$$\Rightarrow t = -5, 3$$

$$A(-5, 2, -2), B(3, 2, -2)$$

$$\cos \theta = \frac{-5 \times 3 + 2 \times 2 + (-2) \times (-2)}{\sqrt{(-5)^2 + 2^2 + (-2)^2} \sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{-7}{\sqrt{33} \cdot \sqrt{17}}$$

$$= \frac{-7}{\sqrt{561}}$$

8. 設 $S: x^2 + y^2 + z^2 + kx + ky - kz + k = 0$ 的圖形為半徑是 1 的球面，求實數 k 之值為_____。

$$S: (x + \frac{k}{2})^2 + (y + \frac{k}{2})^2 + (z - \frac{k}{2})^2 = -k + \frac{k}{4} + \frac{k}{4} + \frac{k}{4} = -\frac{k}{4}$$

$$\therefore -\frac{k}{4} = 1^2$$

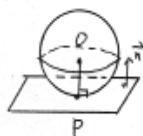
$$\therefore k = -4$$

班級 _____ 姓名 _____ 座號 _____

除蟲大作戰 (Find the bug in each item and correct it!)

1. 求過點 $P(1, 4, 3)$ 而與球面 $S: (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$ 相切之切平面方程式為 _____。
- $(1+1)(x+1) + (4-2)(y-2) + (3-2)(z-2) = 0$
 $\Rightarrow 2x+2+2y-4+z-2=0$
 $\Rightarrow 2x+2y+z-4=0$

2. 設平面 $E: 2x+2y-z+7=0$ 與球面 $S: x^2+y^2+z^2-10x-10y-31=0$ 相切, 求切點坐標為 _____。
- $S: (x-5)^2 + (y-5)^2 + z^2 = 31 + 25 + 25 = 81 \Rightarrow 9t^2 - 81 = 0$
 $\Rightarrow 0(5, 5, 0), R=9 \Rightarrow t^2=9$
 $\Rightarrow t=\pm 3$

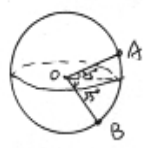


設 $P(5+2t, 5+2t, -t)$
 則 $(5+2t)^2 + (5+2t)^2 + (-t)^2 - 10(5+2t) - 10(5+2t) - 31 = 0$
 $\Rightarrow 50 + 40t + 9t^2 - 50 - 20t - 50 - 20t - 31 = 0$
 $\Rightarrow 9t^2 - 20t - 31 = 0$

3. 設平面 $E: x+2y-2z+k=0$, 球面 $S: x^2+y^2+z^2+2x+4y-2z+5=0$, 若平面 E 與球面 S 相交成一圓, 求 k 值的範圍為 _____。
- $S: (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = -5 + 1 + 4 + 1$
 \Rightarrow 球心 $O(-1, -2, 1), R=1$
 $d = d(O, E) = \frac{|-1-2-2+k|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}$
 $\because E \cap S \text{ 成一圓} \Rightarrow d < R$
 $\Rightarrow |k-5| < 1 \times 3$
 $\Rightarrow -3 < k-5 < 3 \Rightarrow 2 < k < 8$

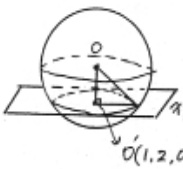
4. 已知球面 $x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z-8=0$ 與 x 軸交於 A, B 兩點, 求 \overline{AB} 之長度為 _____。
- 令 $y=0, z=0$
 則 $x^2+2x-8=0 \Rightarrow (x-4)(x+2)=0$
 $\Rightarrow x=4, -2$
 令 $A(4, 0, 0), B(-2, 0, 0)$
 則 $|\overline{AB}| = |4 - (-2)| = 6$

5. 設地球是一個圓球體, 半徑為 6400 公里, 已知 A 點在東經 121° , 北緯 25° 處, B 點在東經 121° , 北緯 55° 處, 求 A, B 兩處的球面距離為 _____ 公里。



$\angle AOB = 25^\circ + 55^\circ = 80^\circ = (80 \times \frac{\pi}{180}) = \frac{4}{9}\pi$ (弧度)
 A, B 兩處距離即為扇形之弧長。
 故為 $6400 \times \frac{4}{9}\pi = \frac{25600}{9}\pi$ (公里) ($\because l = r\theta$)

6. 設球面 S 過點 $P(7, 5, 5)$, 若 xy 平面截球面 S 於一圓 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 40$ (在 xy 平面上), 求球面 S 的方程式為 _____。



設球心 $O(1, 2, c)$
 則 $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-c)^2 = 40 + c^2$
 $P(7, 5, 5)$ 代入得 $36 + 9 + (5-c)^2 = 40 + c^2$
 $\Rightarrow 30 = 2c$
 $\Rightarrow c = 15$
 $\therefore S: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-15)^2 = 40 + 15^2 = 265$

背面尚有試題

7. 設 a 為實數，若方程組 $\begin{cases} x+2y+2z=a \\ x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4 \end{cases}$ 沒有實數解，求 a 的範圍為_____。

方程組沒有實數解，即兩圓不相交 $\Rightarrow d > R$

$$\therefore \frac{|0+2 \times 1+2 \times (-2)-a|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} < 2 \Rightarrow |a+2| < 2 \times 3 \Rightarrow -6 < a+2 < 6$$

$$\Rightarrow -8 < a < 4$$

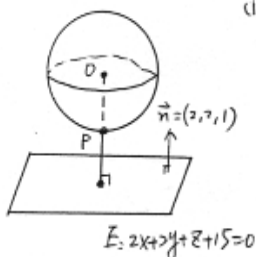
8. 設 x, y, z 為實數，且 $P(x, y, z)$ 為平面 $E: 2x-y-2z=8$ 上的動點，求 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$ 的最小值為_____。

$$\because (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = [\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}]^2 = (\text{平面 } E \text{ 上之動點 } P \text{ 到 } (1,1,1) \text{ 的距離})^2$$

\therefore 最小值即為 $(1,1,1)$ 到 E 的垂直距離

$$\Rightarrow \frac{|2 \times 1 - 1 - 2 \times 1 - 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{|-9|}{3} = 3$$

9. 設平面 $E: 2x+2y+z+15=0$ 與球面 $S: x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z-3=0$ ，求(1)球面 S 上距離平面 E 最近的點之坐標為_____；(2)又此最近距離是_____。



$$(1). S: (x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2 = 3+1+4+1 = 9 \quad (2) \text{ 最近距離}$$

$$\Rightarrow \text{球心 } O(-1, 2, 1), R=3$$

設最近點 $P(1+2t, 2+2t, 1+t)$

$$\text{則 } (1+2t)^2+(2+2t)^2+(1+t)^2+2(1+2t)-4(2+2t)-2(1+t)-3=0$$

$$\Rightarrow 9t^2-9=0 \Rightarrow t=1$$

$$\therefore P(1, 4, 2)$$

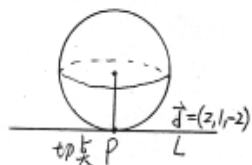
$$= d(P, E)$$

$$= \frac{|2 \times 1 + 2 \times 4 + 2 + 15|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{27}{3}$$

$$= 9$$

10. 設球面 $S: x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+k=0$ 與直線 $L: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-2}$ 相切，試求切點坐標為_____。



$$S: (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = -k+1+4+9 = 14-k$$

$$\Rightarrow \text{球心 } O(1, 2, 3)$$

$$\text{設 } P(2+2t, 1+t, -1-2t)$$

$$\text{則 } \vec{OP} = (1+2t, t-1, -4-2t)$$

$$\because \vec{OP} \perp \vec{d}$$

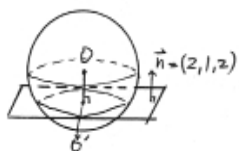
$$\Rightarrow (1+2t, t-1, -4-2t) \cdot (2, 1, -2) = 0$$

$$\Rightarrow 2+4t+t-1-8-4t=0$$

$$\Rightarrow 9t-9 \Rightarrow t=-1$$

$$\text{即 } P(-1, -2, -2)$$

11. 已知平面 $E: 2x+y+2z=5$ ，截球面 $S: x^2+y^2+z^2-4y+6z-36=0$ 於一圓 C ，求：圓 C 的圓心為_____。



$$S: x^2+(y-2)^2+(z+3)^2 = 36+4+9 = 49$$

$$\Rightarrow \text{球心 } O(0, 2, -3)$$

$$\text{設圓心 } O'(0+2t, 2+t, -3+2t)$$

$$\text{則 } O'A \perp E \Rightarrow 2(0+2t)+(2+t)+2(-3+2t)=5$$

$$\Rightarrow 10t=9 \Rightarrow t=\frac{9}{10} \therefore O'(\frac{9}{5}, \frac{29}{10}, -\frac{6}{5})$$

附錄六、數學學習日誌

Everyday Mathematics

數學學習日誌



學校名稱：桃園縣立南崁高中

授課教師：林振清老師

班 級：二年____班

學生座號：_____

學生姓名：_____

Everyday Mathematics 數學學習日誌 座號 姓名

日期	西元	年	月	日	星期	第	節	天氣	
----	----	---	---	---	----	---	---	----	--

今天的這堂課是

<input type="checkbox"/> 考試	範圍	高中數學第三冊第三章第	節	分數	分
-----------------------------	----	-------------	---	----	---

<input type="checkbox"/> 上課	課程內容	高中數學第三冊第三章第	節
-----------------------------	------	-------------	---

一、這堂數學課中，我學到的主要概念是：（例如：定義、公式、定理...）

二、這堂數學課中，我能舉出主要概念的例子是：

三、這堂數學課中，我的新發現或收穫是：

四、這堂數學課中，我感到困難的幾個地方是：

五、這堂數學課中，因為和同學(名字) 討論而弄懂的地方是：

六、心情扎記...

教師核閱

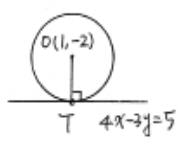
附錄七、實驗教學後測卷

除蟲大作戰 (Find the bug in each item and correct it!)

1. 設圓 $C: x^2 + y^2 + 4x + 6y + a = 0$, 半徑為 3, 圓心在直線 $y = bx + 1$ 上, 則數對 $(a, b) =$ _____。


$$\begin{aligned} (x+2)^2 + (y+3)^2 &= -a + 4 + 9 & \therefore 3 &= 2b + 1 \Rightarrow b = 1 \\ -a + 4 + 9 &= 3^2 \Rightarrow a = 4 & \text{即 } (a, b) &= (4, 1) \\ \text{又圓心 } (2, 3) &\text{ 在直線 } y &= bx + 1 &\text{ 上} \end{aligned}$$

2. 設圓心在 $(1, -2)$, 且與直線 $4x - 3y = 5$ 相切的圓方程式為 _____。




$$\begin{aligned} \text{設 } T(1+4t, -2-3t) & \quad \therefore T\left(\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}\right) \\ \text{則 } 4(1+4t) - 3(-2-3t) &= 5 & \Rightarrow r = OT = \sqrt{\left(1+\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-2-\frac{7}{5}\right)^2} = \sqrt{13} \\ \Rightarrow 25t - 5 - 4 - 6 &= -5 & \text{即圓為 } (x-1)^2 + (y+2)^2 &= 13 \\ \Rightarrow 25t - 5 - 4 - 6 &= -5 & & \\ \Rightarrow t &= -\frac{1}{5} & & \end{aligned}$$

3. 若 P 為圓 $x^2 + y^2 = 4$ 上任一點, 令 O 為原點 $(0, 0)$, Q 為點 $(4, -3)$, 試求 $\triangle POQ$ 面積的最大值為 _____。

$$\begin{aligned} \text{設 } P(2\cos\theta, 2\sin\theta) & \quad = \frac{1}{2} |-6\cos\theta + 8\sin\theta| \\ \text{則 } \triangle POQ &= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 2\sin\theta \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \right| & \leq \frac{1}{2} \sqrt{(-6)^2 + 8^2} \\ (\because \vec{OP} &= (2\cos\theta, 2\sin\theta), \vec{OQ} = (4, -3)) & = 5 \end{aligned}$$


4. 以 $A(10, 9)$ 為圓心作圓與已知圓 $(x-5)(x-7) + (y-6)(y-4) = 0$ 內切, 試求此圓方程式 _____。



$$\begin{aligned} (x-5)(x-7) + (y-6)(y-4) &= 0 & \therefore r &= 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \\ x^2 - 12x + 35 + y^2 - 10y + 24 &= 0 & \text{即圓: } (x-10)^2 + (y-9)^2 &= 18 \\ (x-6)^2 + (y-5)^2 &= -59 + 36 + 25 = 2 \\ \Rightarrow O(6, 5) & & & \\ \Rightarrow OA &= \sqrt{(10-6)^2 + (9-5)^2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

5. 方程式 $x^2 + y^2 + 2(a-2)x - 2(a+4)y + 3a^2 + 8 = 0$ 表一圓, 則 a 的範圍為 _____。

$$\begin{aligned} [x+(a-2)]^2 + [y-(a+4)]^2 &= -3a^2 - 8 + (a-2)^2 + (a+4)^2 \\ &= -3a^2 - 8 + a^2 - 4a + 4 + a^2 + 8a + 16 \\ &= -a^2 + 4a + 12 \\ \therefore \text{爲一圓} &\therefore -a^2 + 4a + 12 > 0 \Rightarrow a^2 - 4a - 12 < 0 \Rightarrow (a-6)(a+2) < 0 \\ &\Rightarrow a > 6 \text{ 或 } a < -2 \end{aligned}$$

6. 已知三點 $A(1, -1)$, $B(0, 2)$, $C(2, -2)$, $\triangle ABC$ 的外接圓方程式為 _____。

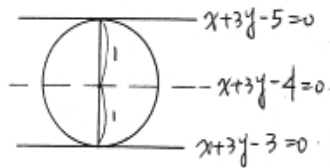
$$\begin{aligned} \text{設 } \triangle ABC \text{ 外接圓為 } x^2 + y^2 + dx + ey + f &= 0 \\ (1, -1) \text{ 代 } \lambda &\Rightarrow 1^2 + (-1)^2 + d - e + f = 0 \Rightarrow d - e + f = -2 \text{ ①} \\ (0, 2) \text{ 代 } \lambda &\Rightarrow 0^2 + 2^2 + 0 + 2e + f = 0 \Rightarrow 2e + f = -4 \text{ ②} \\ (2, -2) \text{ 代 } \lambda &\Rightarrow 2^2 + (-2)^2 + 2d - 2e + f = 0 \Rightarrow 2d - 2e + f = -8 \text{ ③} \\ \text{①} - \text{②} &\Rightarrow d - 3e = -2 \text{ ④} \\ \text{③} - \text{②} &\Rightarrow 2d - 4e = 4 \text{ ⑤} \\ \text{⑤} - \text{④} \times 2 &\Rightarrow 2e = 8 \Rightarrow e = 4 \\ \text{代 } \text{④} &\Rightarrow d = 10 \\ \text{e 代 } \text{②} &\Rightarrow 4 \times 2 + f = -4 \Rightarrow f = -12 \\ \therefore \text{因為 } &x^2 + y^2 + 10x + 4y - 12 = 0 \end{aligned}$$

背面尚有試題

7. 一圓C過A(0,8),B(4,0)兩點,且圓心在直線y=2x上,則圓C的方程式為_____。

設圓心O(t,2t) $\Rightarrow t=4$
 $\because \overline{OA} = \overline{OB}$ \therefore 圓心(4,8)
 $\Rightarrow t^2 + (2t-8)^2 = (t-4)^2 + (2t)^2$ 半徑 = $\overline{OA} = 4$
 $\Rightarrow -16t + 64 = -4t + 16$ 即圓C: $(x-4)^2 + (y-8)^2 = 16$
 $\Rightarrow 12t = 48$

8. 設一圓與直線x+3y-5=0及x+3y-3=0都相切,且圓心在直線2x+y-1=0上,則此圓的方程式為_____。



解 $\begin{cases} x+3y-5=0 & \text{--- ①} \\ x+3y-3=0 & \text{--- ②} \end{cases}$
 $\text{①} \times 2 - \text{②} \Rightarrow 5y - 7 = 0 \Rightarrow y = \frac{7}{5}$
 $\text{代②} \Rightarrow 2x = 1 - \frac{7}{5} = -\frac{2}{5} \Rightarrow x = -\frac{1}{5}$
 又由圖, $r = 1$
 \therefore 圓: $(x - \frac{1}{5})^2 + (y - \frac{7}{5})^2 = 1$

9. 在坐標平面上,已知兩個定點A(-1,0),B(1,0),設P(x,y)動點且知 $\overline{PA}:\overline{PB} = \sqrt{3}:2$,則動點P(x,y)的軌跡方程式為_____。

$\overline{PA}:\overline{PB} = \sqrt{3}:2 \Rightarrow 3\overline{PA}^2 = 4\overline{PB}^2$
 $\Rightarrow \sqrt{3}\overline{PA} = 2\overline{PB} \Rightarrow \sqrt{3}\sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2}$
 $\Rightarrow 3(x+1)^2 + 3y^2 = 4(x-1)^2 + 4y^2$
 $\Rightarrow 3x^2 - 6x + 3 + 3y^2 = 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2$
 $\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$

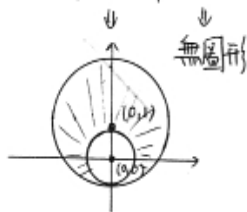
10. 設A(1,0)為圓 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ 內部一點,試求過A之弦中點的軌跡方式_____。

設弦中點M(x,y) $\Rightarrow 0 + (-2)(y-2) = 0$
 利用 $\overline{OA} \cdot \overline{OM} = 0$ $\Rightarrow y-2=0$
 $\Rightarrow (1-1, 0-2) \cdot (x-1, y-2) = 0$
 $\Rightarrow (0, -2) \cdot (x-1, y-2) = 0$

11. $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2y - 3) \leq 0$ 之圖形的面積為_____。

$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$
 $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 4$ \Rightarrow 面積 = $\pi \cdot 4^2 - \pi \cdot 1^2$
 $= 15\pi$

$x^2 + y^2 - 1$	≥ 0	≤ 0
$x^2 + y^2 - 2y - 3$	≤ 0	≥ 0



高中數學第三冊第三章第一節 圓的方程式 (實驗教學後測答案卷)

除蟲大作戰 班級 姓名 座號 總分

題號	是否正確	寫出過程中錯誤之處	寫出正確解答	得分
1	X	圓 $(a, 2)$ 在直線 $y = bx + 1$ 上	圓 $(a, -3)$ 在 $y = bx + 1$ 上 $\Rightarrow -3 = 2b + 1 \Rightarrow b = -2$ $\therefore (a, b) = (4, -2)$	
2	X	$r = \sqrt{(1-\frac{1}{5})^2 + (-2+\frac{2}{5})^2} = \sqrt{13}$	$r = \sqrt{(1-\frac{1}{5})^2 + (-2+\frac{2}{5})^2} = 1$ $\therefore C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$	
3	X	$\frac{1}{2} -6\cos\theta + 8\sin\theta $	$= \frac{1}{2} -6\cos\theta - 8\sin\theta \leq \frac{1}{2} \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = 5$ $\therefore \max = 5$	
4	X	$r = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$	$r = 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ $\therefore C: (x-10)^2 + (y-9)^2 = 50$	
5	X	$a^2 - 4a - 12 > 0$	$\Rightarrow a^2 - 4a - 12 < 0 \Rightarrow (a-6)(a+2) < 0$ $\Rightarrow -2 < a < 6$	
6	X	$d - 3e = -2$	$\textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow d - 3e = 2 - \textcircled{4} \Rightarrow d = -10$ $\textcircled{2} - \textcircled{3} \Rightarrow 2d - 4e = -4 - \textcircled{5} \Rightarrow e = 4$ $\textcircled{5} - \textcircled{4} \times 2 \Rightarrow 2e = -8 \Rightarrow e = -4 \therefore C: x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0$	
7	X	$-16t + 64 = -4t + 16$	$-32t + 64 = -8t + 16 \Rightarrow 24t = 48 \Rightarrow t = 2$ \therefore 圓 $(2, 4)$, $r = \overline{OA} = \sqrt{20}$ $\therefore C: (x-2)^2 + (y-4)^2 = 20$	
8	X	$2x = 1 - \frac{7}{5} = \frac{2}{5}$	$2x = 1 - \frac{7}{5} = -\frac{2}{5} \Rightarrow x = -\frac{1}{5}$, $y = \frac{ \frac{7}{5} - \frac{2}{5} }{\sqrt{1+9}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ $\therefore C: (x + \frac{1}{5})^2 + (y - \frac{7}{5})^2 = \frac{1}{10}$	
9	X	$3(x-1)^2 + y^2 = 4(x+2)^2 + y^2$	$3(x-1)^2 + y^2 = 4(x+2)^2 + y^2$ $\Rightarrow x^2 + y^2 + 14x + 1 = 0$	
10	X	利用 $\vec{OA} \cdot \vec{OM} = 0$.	利用 $\vec{OM} \cdot \vec{AM} = 0 \Rightarrow (x-1, y-0) \cdot (x-1, y-2) = 0$ $\Rightarrow (x-1)(x-1) + (y-0)(y-2) = 0$ $\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$	
11	X	面積 $= \pi \cdot 4^2 - \pi \cdot 1^2$	面積 $= \pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2 = 3\pi$	

班級 _____ 姓名 _____ 座號 _____

除蟲大作戰 (Find the bug in each item and correct it!)

1. 設直線 $L: x-y+2=0$, 圓 $C: x^2+y^2=10$ 相交, 請求出其交點坐標 _____。

$$\begin{cases} x-y+2=0 & \text{--- ①} \\ x^2+y^2=10 & \text{--- ②} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2+4x+4=10 \\ x^2+2x-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2+4x-6=0 \\ (x-1)(x+3)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

∴ 交點 $(3, 5), (-1, 1)$

$$\begin{aligned} \text{①} &\Rightarrow y = x + 2 && \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \\ \text{代②} &\Rightarrow x^2 + (x+2)^2 = 10 && \Rightarrow x = 3, -1 \end{aligned}$$

2. 設直線 $L: 3x-4y+30=0$, P 為圓 $C: x^2+y^2-6x+8y=0$ 上一點, 試求 P 點到直線 L 之最短距離 _____。

$$C: (x-3)^2 + (y+4)^2 = 5^2 \Rightarrow O(3, 4), r=5$$

$$d(O, L) = \frac{|3 \times 3 - 4 \times 4 + 30|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{13}{5}$$

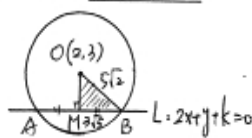
$$\therefore \min = \left| \frac{13}{5} - 5 \right| = \frac{12}{5}$$

3. 已知直線 $L: 2x+y+k=0$ 與圓 $C: x^2+y^2-4x-6y-37=0$ 相交於 A, B 兩點, 且 $\overline{AB} = 6\sqrt{5}$, 試求 k 之值 _____。

$$C: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2 \Rightarrow O(2, 3), r=5$$

$$\overline{OM} = \frac{1}{2} \overline{AB} = 3\sqrt{5}$$

$$\overline{OM} = \frac{|2 \times 2 + 3 - k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|5-k|}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow |7-k| = \sqrt{5} \Rightarrow 7-k = \pm\sqrt{5} \Rightarrow k = 7 \pm \sqrt{5}$$


4. 與直線 $L: 3x-4y=7$ 垂直, 且與圓 $C: (x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$ 相切的切線方程式為 _____。

$$\text{設切線 } L': 4x-3y+k=0 \Rightarrow \frac{|4 \times (-1) - 3 \times (-1) + k|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 2 \Rightarrow \text{切線有 2 條}$$

$$\text{圓 } C: O(-1, -1), r=2 \Rightarrow |k-1| = 20 \Rightarrow \begin{cases} 4x-3y+21=0 \\ 4x-3y-19=0 \end{cases}$$

$$\therefore \text{相切} \Rightarrow d(O, L') = r \Rightarrow k = 21, -19$$

5. 求過點 $P(4, 3)$ 且與圓 $x^2+y^2-4x=0$ 相切的切線方程式為 _____。

$$P \text{ 代入圓: } 4^2 + 3^2 - 4 \times 4 = 9 > 0 \Rightarrow P \text{ 在圓外}$$

$$\text{設切線 } y-3 = m(x-4) \Rightarrow mx - y - 4m + 3 = 0$$

$$\text{圓 } C: (x-2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow O(2, 0), r=2$$

$$\therefore \frac{|m \cdot 2 - 0 - 4m + 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2 \Rightarrow m = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow |3-2m| = 2\sqrt{m^2+1} \Rightarrow 4m^2 - 12m + 9 = 4m^2 + 4 \Rightarrow 12m = 5$$

$$\therefore \text{切線 } y-3 = \frac{5}{2}(x-4) \Rightarrow 5x - 12y + 16 = 0$$

6. 已知直線 $L: y = mx + 1$ 和圓 $C: (x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$; 若 L 與 C 有相異兩交點, 則 m 的範圍為 _____。

$$L \text{ 与 } C \text{ 有相異兩交點} \Rightarrow d < r$$

$$\Rightarrow \frac{|m \cdot 3 - (-3) + 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} < 3$$

$$\Rightarrow |3m - 2| < 3\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 9m^2 - 12m + 4 < 9m^2 + 9$$

$$\Rightarrow 12m > -5$$

$$\Rightarrow m > -\frac{5}{12}$$

背面尚有試題

7. 求過點 $(1, 2)$ 且與圓 $C: x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 相切的直線方程式為 _____。

$$(1, 2) \text{ 代入 } C: 1^2 + 2^2 + 2 \times 1 - 4 \times 2 + 1 = 0$$

$\Rightarrow (1, 2)$ 在圓上

$$\therefore \text{切線: } 1 \cdot x + 2 \cdot y + 2 \times 1 - 4 \times 2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x + 2y - 5 = 0$$

8. 設 $P(2, 5)$ ，圓 $C: 2x^2 + 2y^2 + 2x + 3y - 1 = 0$ ，自 P 點作圓 C 的切線，求切線段長 _____。

$$\text{切線段長} = \sqrt{PM^2 - r^2}$$

$$= \sqrt{2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 - 1}$$

$$= \sqrt{76}$$

9. 設 $A(1, 4)$ ， $B(3, -2)$ 為坐標平面上兩點，若 \overline{AB} 為圓的一弦且距圓心 $2\sqrt{10}$ ，則圓方程式

為 _____。

$$\overline{AB} = (2, -6) = 2(1, -3) \quad \therefore t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1$$

$$M = \frac{A+B}{2} = (2, 1) \quad \text{又 } r = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 + (10)^2} = \sqrt{50}$$

$$\text{設 } O(2+t, 1-3t)$$

$$r \parallel \overrightarrow{OM} = (-t, 3t)$$

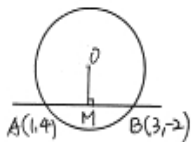
$$\therefore |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{t^2 + 9t^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{又 } \textcircled{1} t=1 \Rightarrow \text{圓 } \odot O(3, -2)$$

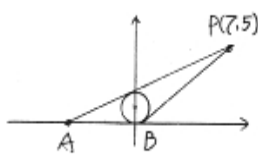
$$\Rightarrow \text{圓: } (x-3)^2 + (y+2)^2 = 50$$

$$\textcircled{2} t=-1 \Rightarrow \text{圓 } \odot O(1, 4)$$

$$\Rightarrow \text{圓: } (x-1)^2 + (y-4)^2 = 50$$



10. 在坐標 $P(7, 5)$ 處有一光源，將圓 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 投射到 x 軸的影長是 _____。



$$\text{設切線: } y-5 = m(x-7)$$

$$\Rightarrow mx - y - 7m + 5 = 0$$

$$\text{則 } \frac{|m \cdot 0 - 1 - 7m + 5|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$$

$$\Rightarrow |-7m + 4| = \sqrt{m^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 49m^2 - 56m + 16 = m^2 + 1 \quad \therefore \frac{1}{2}y = 0$$

$$\Rightarrow 48m^2 - 56m + 15 = 0$$

$$\Rightarrow (4m+3)(12m+5) = 0$$

$$\Rightarrow m = -\frac{3}{4}, -\frac{5}{12}$$

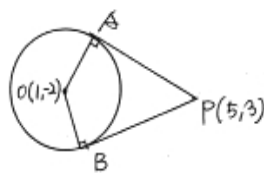
$$\Rightarrow -5 = \frac{3}{4}(x-7)$$

$$\Rightarrow x = \frac{41}{3}$$

$$\text{又 } -5 = -\frac{5}{12}(x-7)$$

$$\Rightarrow x = 19, \therefore \frac{16}{3}$$

11. 過點 $P(5, 3)$ 作圓 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ 的二切線，切點分別為 A 、 B ，試求 $\triangle PAB$ 的外接圓方程式 _____。



$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 11 + 1 + 4 = 16$$

$$\Rightarrow \text{圓 } \odot O(1, -2)$$

$$\triangle PAB \text{ 外接圓: } \text{圓心} = \frac{O+P}{2} = (3, \frac{1}{2})$$

$$\text{半徑} = \frac{1}{2}OP = \sqrt{(5-1)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$$

$$\therefore \text{圓: } (x-3)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = 41$$

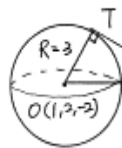
高中數學第三冊第三章第二節 圓與直線的關係 (實驗教學後測答案卷)

除蟲大作戰 班級 _____ 姓名 _____ 座號 _____ 總分 _____

題號	是否正確	寫出過程中錯誤之處	寫出正確解答	得分
1	否	$(x-3)(x+1)=0$	$(x+3)(x-1)=0 \Rightarrow x=-3, 1$ \therefore 交點 $(-3, -1), (1, 3)$	
2	否	$O(3, 4)$	$O(3, -4), r=5$ $d(O, L) = \frac{ 3 \cdot 3 - 4 \cdot (4) + 30 }{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 11 \therefore \min = 11 - 5 = 6$	
3	否	$\overline{OM} = \frac{ 2 \cdot 2 + 3 - k }{\sqrt{2^2 + 1^2}}$	$\overline{OM} = \frac{ 2 \cdot 2 + 3 + k }{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{(5k)^2 - (2k)^2} \Rightarrow k+7 =5$ $\Rightarrow k+7 = \pm 5 \Rightarrow k = -2, -12$	
4	否	設切線 $L: 4x-3y+k=0$	設 $L: 4x+3y+k=0 \Rightarrow \frac{ 4 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + k }{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2 \therefore$ 切線有: 圓心 $O(-1, -1), r=2 \Rightarrow k-7 =10 \quad 4x+3y+17=0$ \therefore 相切 $\therefore d(O, L)=r \Rightarrow k=17, -3 \quad 4x+3y-3=0$	
5	否	切線: $y-3 = \frac{5}{12}(x-4)$	切線有: $y-3 = \frac{5}{12}(x-4)$ 或 $x-4=0$	
6	否	$ 3m-2 < 3\sqrt{m^2+1}$	$ 3m+4 < 3\sqrt{m^2+1} \Rightarrow 9m^2+24m+16 < 9m^2+9$ $\Rightarrow 24m < -7 \Rightarrow m < -\frac{7}{24}$	
7	否	$ x+2y+2x-4+27 =0$	$ x+2y+2x-4+27 =0$ $\Rightarrow 2x-2=0 \Rightarrow x-1=0$	
8	否	$\sqrt{2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 - 1}$	$\sqrt{2^2 + 5^2 + 2 + \frac{3}{2} \cdot 5 - \frac{1}{2}} = \sqrt{4 + 25 + 2 + 7}$ $= \sqrt{38}$	
9	否	$\because \vec{OP} = \sqrt{t^2 + 9t^2} = \sqrt{10}$	$\because \vec{OP} = \sqrt{t^2 + 9t^2} = 2\sqrt{10} \Rightarrow t = \pm 2, r = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2} = \sqrt{50}$ \therefore ① $t=2: O(4, -5) \Rightarrow C: (x-4)^2 + (y+5)^2 = 50$ ② $t=-2: O(0, 7) \Rightarrow C: x^2 + (y-7)^2 = 50$	
10	否	$(4m+3)(12m+5)=0$	$(4m-3)(12m+5)=0 \Rightarrow m = \frac{3}{4}, -\frac{5}{12} \therefore$ 斜率 \therefore 切線: $y-5 = \frac{3}{4}(x-7),$ 令 $y=0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} = -5 - \frac{1}{3} $ $y-5 = -\frac{5}{12}(x-7),$ 令 $y=0 \Rightarrow x = -5 = \frac{16}{3}$	
11	否	$\frac{1}{2} \overline{OP} = \sqrt{(5-0)^2 + (3-0)^2}$	$\frac{1}{2} \overline{OP} = \frac{1}{2} \sqrt{(5-0)^2 + (3-0)^2} = \frac{\sqrt{34}}{2}$ \therefore 圓: $(x-3)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{17}{4}$	

除蟲大作戰 (Find the bug in each item and correct it!)


1. 設 $P(4, -4, 4)$, 球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z = 0$, 自 P 點作球面 S 的切線, 切點為 T , 求 \overline{PT} 為 _____。

$S: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 3^2$
 $\overline{OP} = \sqrt{(4-1)^2 + (-4-2)^2 + (4-2)^2} = 8$

 $\overline{PT} = \sqrt{\overline{OP}^2 - R^2} = \sqrt{8^2 - 3^2}$
 $= \sqrt{65}$

2. 已知一四面體的四個頂點分別為 $(2, -2, 1)$, $(-2, 2, -1)$, $(2, 2, 1)$, $(-2, 2, 1)$, 求此四面體的外接球面方程式為 _____。

設球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 + dx + ey + fz + g = 0$
 $(2, -2, 1) \Rightarrow 9 + 2d - 2e + f + g = 0 \text{---} ①$
 $(-2, 2, -1) \Rightarrow 9 - 2d + 2e - f + g = 0 \text{---} ②$
 $(2, 2, 1) \Rightarrow 9 + 2d + 2e + f + g = 0 \text{---} ③$
 $(-2, 2, 1) \Rightarrow 9 - 2d + 2e + f + g = 0 \text{---} ④$
 $① - ② \Rightarrow 4d - 4e + 2f = 0$
 $② - ③ \Rightarrow -4d - 2f = 0$
 $② - ④ \Rightarrow 4d = 0$
 $\therefore d = 0, f = 0, e = 0, g = 9$
 $\Rightarrow S: x^2 + y^2 + z^2 = 9$

3. 設 $A(4, -4, 4)$, P 為球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z = 0$ 上的點, 試求: (1) \overline{AP} 的最小值為 _____; (2) 此時之 P 點坐標為 _____。

$① S: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 9$
 $\Rightarrow O(1, 2, -2), R = 3$
 $\times d = \overline{AO} = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-6)^2} = 9$

 $\therefore d = R$
 $\therefore A$ 在球面上。
 $\Rightarrow \overline{AP} \geq \min = 0$
 $②$ 此時 $P = A = (4, -4, 4)$

4. 試求過點 $(2, 0, 2)$ 與 $(0, 4, 0)$, 且球心在 z 軸上的球面方程式為 _____。

設球心 $O(0, 0, t)$ $\rightarrow O(0, 0, 4)$
 令 $A(2, 0, 2), B(0, 4, 0)$ $r^2 = 16 + 4^2 = 32$
 $\therefore \overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 (=r^2)$ \therefore 球面: $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 32$
 $\Rightarrow (2-0)^2 + (2-t)^2 = (4-0)^2 + (0-t)^2$
 $\Rightarrow 4 + 4 - 2t + t^2 = 16 + t^2$
 $\Rightarrow 2t = 8 \Rightarrow t = 4$

背面尚有試題

5. 過 $A(10, 2, 5)$ 、 $B(-6, 10, 11)$ 兩點的球面有無限多個，求半徑最小的球面方程式為_____。半徑最小的球面即為以 AB 為直徑的球面

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (x-10)(x-6) + (y-2)(y-10) + (z-5)(z-11) = 0 \\ &\Rightarrow x^2 - 16x + 60 + y^2 - 12y + 20 + z^2 - 16z + 55 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 16x - 12y - 16z + 135 = 0 \end{aligned}$$

6. 設 $S: x^2 + y^2 + z^2 + 2(m-1)x - 2my + 3m^2 - 2 = 0$ 表一球面，其中 m 為實數，試求：(1) m 的範圍為_____；(2) 球面 S 的最大半徑為_____。

(1) $S: (x+(m-1))^2 + (y-m)^2 + z^2 = -3m^2 + 2 + (m-1)^2 + m^2$ (2) 半徑不應為負
 $= -m^2 - 2m + 3$
 $\therefore r = \sqrt{m^2 + 2m - 3}$
 $= \sqrt{(m+1)^2 - 4}$
 故最大半徑為 ∞

$\because S$ 為球面
 $\therefore -m^2 - 2m + 3 > 0$
 $\Rightarrow m^2 + 2m - 3 > 0$
 $\Rightarrow (m+3)(m-1) > 0$
 $\Rightarrow m > 1, m < -3$

7. 設 $S: (x+1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$ ，在球面 S 上有兩點，其坐標皆可表成 $(t, 3, -3)$ 之形式，(1) 求 t 的值為_____；(2) 若球心對此兩點的張角為 θ ，求 $\cos \theta$ 為_____。

(1) $(t, 3, -3)$ 代入 S (2) $\angle O$ $(-1, 0, -3)$
 $\Rightarrow (t+1)^2 + 3^2 + (-3+3)^2 = 25$ $A(-3, 3, -3)$
 $\Rightarrow (t+1)^2 = 16$ $B(5, 3, -3)$
 $\Rightarrow t^2 + 2t - 15 = 0$ 則 $\vec{OA} = (-2, 3, 0)$, $\vec{OB} = (6, 3, 0)$
 $\Rightarrow (t+3)(t-5) = 0$ $\therefore \cos \theta = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}|} = \frac{-12 + 6 + 0}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{45}}$
 $\Rightarrow t = -3, 5$ $= \frac{-6}{\sqrt{585}}$

8. 設 $k \in \mathbb{Z}$ ，若 $S: x^2 + y^2 + z^2 + 2kx + 2ky - 2kz + 2k = 0$ 的圖形為半徑是 1 的球面，求實數 k 之值為_____。

$$\begin{aligned} (x+k)^2 + (y+k)^2 + (z-k)^2 &= -2k + k^2 + k^2 + k^2 \\ &= 3k^2 - 2k \end{aligned}$$

$\because 3k^2 - 2k = 1^2$
 $\Rightarrow 3k^2 - 2k - 1 = 0$
 $\Rightarrow (k-1)(3k+1) = 0$
 $\rightarrow k = 1, -\frac{1}{3}$

高中數學第三冊第三章第三節 球面方程式 (實驗教學後測答案卷)

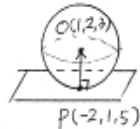
除蟲大作戰 班級 _____ 姓名 _____ 座號 _____ 總分 _____

題號	是否正確	寫出過程中錯誤之處	寫出正確解答	得分
1	否	$\overline{OP} = (4-1)^2 + (4-2)^2 + (4-(-2))^2 = 81$	$\overline{OP}^2 = (4-1)^2 + (4-2)^2 + (4-(-2))^2 = 81$ $\therefore \overline{PT} = \sqrt{\overline{OP}^2 - R^2} = \sqrt{81-9} = \sqrt{72}$	
2	否	$g=9$	$g=-9$ $\therefore S: x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$	
3(1)	否	$O(1, 2, -2), R=9$	$O(1, 2, -2), R=3, \text{又 } d = \overline{AO} = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-6)^2} = 9$ $\therefore \min = \overline{OA} - R = 9 - 3 = 6$	
3(2)	否	此時 $P=A$	此時 $\begin{matrix} \xrightarrow{3} & \xrightarrow{6} \\ O(1, 2, -2) & P & A(4, -4, 4) \end{matrix}$ $\therefore p = \frac{6O + 3A}{3+6} = \frac{2O + 1A}{3} = (2, 0, 0)$	
4	否	$2t=8$	$4t = -8 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow O(0, 0, -2)$ $\text{又 } R^2 = 16 + (-2)^2 = 20 \Rightarrow S: x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 20$	
5	否	$(x-10)(x-6) + (y-2)(y-10) + (z-5)(z-11) = 0$	$(x-10)(x-6) + (y-2)(y-10) + (z-5)(z-11) = 0$ $\Rightarrow x^2 - 4x - 60 + y^2 - 12y + 20 + z^2 - 16z + 55 = 0$ $\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y - 16z + 15 = 0$	
6(1)	否	$m^2 + 2m - 3 > 0$	$m^2 + 2m - 3 < 0 \Rightarrow (m+3)(m-1) < 0 \Rightarrow -3 < m < 1$	
6(2)	否	$Y = \sqrt{m^2 + 2m - 3}$	$Y = \sqrt{-m^2 - 2m + 3} = \sqrt{-(m+1)^2 + 4}$, 故當 $m = -1$ 時, $Y_{\max} = 2$	
7(1)	否	$(t+3)(t-5) = 0$	$(t-3)(t+5) = 0 \Rightarrow t = 3, -5$	
7(2)	否	$A(-3, 3, -3)$ $B(5, 3, -3)$	$A(3, 3, -3), B(5, 3, -3)$ $\overline{OA} = (4, 3, 0)$ $\overline{OB} = (-4, 3, 0) \Rightarrow \cos\theta = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{ \overline{OA} \overline{OB} } = \frac{-16+9+0}{5 \cdot 5} = -\frac{7}{25}$	
8	否	$k = 1, -\frac{1}{3}$	$k = 1, -\frac{1}{3}$ (不合) ($\because k \in \mathbb{Z}$)	

班級 _____ 姓名 _____ 座號 _____

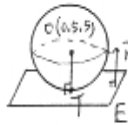
除蟲大作戰 (Find the bug in each item and correct it!)

1. 求過點 $P(-2, 1, 5)$ 而與球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$ 相切之切平面方程式為 _____。



$S: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$
 \Rightarrow 球心 $O(1, 2, 3)$
 $\vec{PO} = (3, 1, -2)$
 \therefore 切平面: $3x + y - 2z = \frac{3(-2) + 1(1) - 2(5)}{14} \cdot 14$
 $\Rightarrow 3x + y - 2z - 15 = 0$

2. 設平面 $E: x - 2y - 2z = 7$ 與球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - 10y - 10z - 31 = 0$ 相切, 求切點坐標為 _____。



$S: x^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2 = 8$
 $\Rightarrow t = -\frac{13}{9}$
 設 $T(0+t, -5-2t, -5-2t)$
 \therefore 切點 $T(-\frac{13}{9}, -\frac{19}{9}, -\frac{19}{9})$
 $\vec{OT} = (t, -5-2t, -5-2t)$
 $\vec{n} = (1, -2, -2)$
 $\vec{OT} \cdot \vec{n} = |OT| |\vec{n}| \cos 0 = |OT| \sqrt{5}$
 $(0+t) - 2(-5-2t) - 2(-5-2t) = 7$
 $\Rightarrow 9t = -13$

3. 設平面 $E: x + 2y - 2z + k = 0$, 球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 2z - 3 = 0$, 若平面 E 與球面 S 相交成一圓, 求 k 值的範圍為 _____。

$S: (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$
 \Rightarrow 球心 $O(-1, -2, 1), r=3$
 $\therefore E$ 与 S 相交成一圓
 $\therefore d(O, E) < r$
 $d(O, E) = \frac{|-1-4-2+k|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} < 3 = r$
 $\Rightarrow |k-7| < 9$
 $\Rightarrow \begin{cases} k-7 > -9 \\ k-7 < 9 \end{cases} \Rightarrow 7 < k < 16$

4. 已知球面 $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 6z + 8 = 0$ 與 z 軸交於 P, Q 兩點, 求 \overline{PQ} 之長度為 _____。

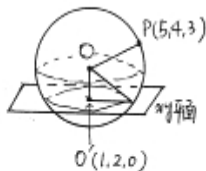
$\therefore z$ 軸之方程式: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$
 \therefore 代入球面: $z^2 - 6z + 8 = 0$ 故 $\overline{PQ} = |-4 - (-2)| = 2$
 $\Rightarrow (z+2)(z-4) = 0$
 $\Rightarrow z = -2, -4$

5. 設地球是一個圓球體, 半徑為 6400 公里, 已知 A 點在東經 124° , 北緯 35° 處, B 點在東經 124° , 南緯 55° 處, 求 A, B 兩處的球面距離為 _____ 公里。



$55^\circ - 35^\circ = 20^\circ = \frac{\pi}{9}$
 \therefore 球面距離 $= r\theta = 6400 \times \frac{\pi}{9} = \frac{6400\pi}{9}$ (km)

6. 設球面 S 過點 $P(5, 4, 3)$, 若 xy 平面截球面 S 於一圓 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 11$ (在 xy 平面上), 求球面 S 的方程式為 _____。



設球心 $O(1, 2, t)$
 $\therefore S: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-t)^2 = 11 + t^2$
 $\therefore S: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 20$
 $P(5, 4, 3)$ 代入 $\Rightarrow 4^2 + 2^2 + 9 - 6t + t^2 = 11 + t^2$
 $\Rightarrow t = -3 \Rightarrow R^2 = 11 + (-3)^2 = 20$

背面尚有試題

7. 設 k 為實數, 若方程組 $\begin{cases} x-2y+2z=k \\ x^2+(y+1)^2+(z+2)^2=1 \end{cases}$ 沒有實數解, 求 k 的範圍為_____。

方程組沒有實數解 \Rightarrow 表示球面與平面沒有交點

$$\begin{aligned} \text{即 } d(O, E) > r &\Rightarrow \frac{|0-2 \times 1+2 \times 2-k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} > 1 &\Rightarrow |k-2| < 3 \\ & &\Rightarrow -3 < k-2 < 3 \\ &\Rightarrow |-k+2| > 3 &\Rightarrow -1 < k < 5 \end{aligned}$$

8. 設 x, y, z 為實數, 且 $P(x, y, z)$ 為平面 $E: 2x+3y+6z+3=0$ 上的動點, 求 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$ 的最小值為_____。

設球面 $S: (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=r^2 \Rightarrow$ 球心 $O(1, 1, 1)$

$\because S$ 與 E 要有交點

$$\therefore d(O, E) \leq r \Rightarrow \frac{|2+3+6+3|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}} \leq r \Rightarrow 2 \leq r \therefore \text{最大值} = 2$$

9. 設平面 $E: x-2y+2z+8=0$ 與球面 $S: (x-3)^2+y^2+(z+1)^2=25$, 求(1)球面 S 上距離平面 E 最近的點之坐標為_____ ; (2) 又此最近距離是_____。

S 球心 $O(3, 0, -1), r=5$

$$(2) d(O, E) = \frac{|3-2 \times 0+2 \times (-1)+8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = 3$$



$$\begin{aligned} \therefore \min r &= 25 - 3^2 \\ &= 22 \end{aligned}$$

(1) 設 $H(3+t, -2t, -1+2t)$

則 H 代 E

$$\Rightarrow (3+t) - 2(-2t) + 2(-1+2t) + 8 = 0$$

$$\Rightarrow t = -1$$

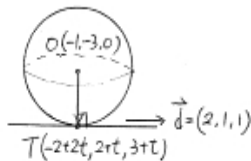
$$\Rightarrow H(2, 2, -3)$$

$$\text{利用內分公式: } H = \frac{3P+22O}{25} \Rightarrow P = \frac{25H-22O}{3}$$

$$\therefore P = \frac{1}{3}[(50, 50, -75) - (66, 0, -22)] = \left(\frac{-16}{3}, \frac{50}{3}, \frac{-53}{3}\right)$$

10. 設 $a \in \mathbb{R}$, 若球面 $S: x^2+y^2+z^2+2x+6z+a=0$ 與直線 $L: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$ 相切, 試

求切點坐標為_____。



$$S: (x+1)^2+(y+3)^2+z^2 = -a+10 \Rightarrow -2+4t+5+t+3+t=0$$

$$\Rightarrow \text{球心 } O(-1, -3, 0)$$

$$\Rightarrow \vec{OT} = (-1+2t, -3+t, 3+t)$$

$$\because \vec{OT} \perp \vec{d}$$

$$\therefore (-1+2t, -3+t, 3+t) \cdot (2, 1, 1) = 0$$

$$\Rightarrow 6t+6=0$$

$$\Rightarrow t = -1$$

$$\therefore T(-2, 2, 3)$$

$$= (-4, 1, 2)$$

11. 已知平面 $E: x+y+z=3$, 截球面 $S: x^2+y^2+z^2-6x-2y-4z+10=0$ 於一圓 C , 求: 圓 C 的圓心為_____。

$$S: (x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 = 2^2$$

設 $O'(3+t, 1+t, 2+t)$

$$\text{則 } O' \text{ 代 } E \Rightarrow (3+t) + (1+t) + (2+t) = 3$$

$$\Rightarrow 3t = 3 \Rightarrow t = 1$$

$$\therefore O'(4, 2, 3)$$



高中數學第三冊第三章第四節 球面與平面的關係 (實驗教學後測答案卷)

除盡大作戰 班級 _____ 姓名 _____ 座號 _____ 總分 _____

題號	是否正確	寫出過程中錯誤之處	寫出正確解答	得分
1	否	$3x+y-2z \frac{f(-2,1,5)}{15}$	$3x+y-2z \frac{f(-2,1,5)}{-15}, 3x+y-2z+15=0$	
2	否	設 $T(0+t, 5-2t, 5-2t)$	設 $T(t, 5-2t, 5-2t)$ 則 $t-2(5-2t)-2(5-2t)=7$ $\Rightarrow 9t=27 \Rightarrow t=3 \Rightarrow T(3, -1, -1)$	
3	否	$\begin{cases} k-7 > 0 \\ k-7 < 9 \end{cases}$	$-9 < k-7 < 9 \Rightarrow -2 < k < 16$	
4	否	$z^2+6z+8=0$	$z^2-6z+8=0 \Rightarrow (z-2)(z-4)=0 \Rightarrow z=2, 4$ $\therefore \overline{PQ} = 4-2 = 2$	
5	否	$55^\circ - 35^\circ = 20^\circ = \frac{\pi}{9}$	$35^\circ + 55^\circ = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ \therefore 球面距離 $= 6400 \times \frac{\pi}{2} = 3200\pi$ (km)	
6	否	$t = -3$	$t=3 \Rightarrow \begin{cases} 0(1, 2, 3) \\ R^2 = 11 + 3^2 = 20 \end{cases} \therefore S: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 20$	
7	否	$\frac{ 0-2(-1)+2(-2)-k }{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} > 1$	$\frac{ 0-2(-1)+2(-2)-k }{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} > 1 \Rightarrow -k-2 > 3 \Rightarrow k+2 > 3$ $\Rightarrow k+2 < -3, k+2 > 3 \Rightarrow k < -5, k > 1$	
8	否	\therefore 最大值 $= 2$	\therefore 最小值 $= 2$	
9(1)	否	$H = \frac{3P+2Q}{25}$	$\begin{matrix} 3 & 2 \\ 0 & H & P \end{matrix} \because H = \frac{3P+2Q}{212} \Rightarrow P = \frac{5H-2Q}{3}$ $\Rightarrow P = \frac{1}{3}((10, 10, -5) - (6, 0, -3)) = (\frac{4}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{13}{3})$	
9(2)	否	$r = 25$	$r=5, d(O, E) = \frac{ 3-2 \times 0 + 2 \times (-1) + 8 }{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = 3 \therefore \min = 5-3 = 2$	
10	否	$S: (x+1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = -a+10$	$S: (x+1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = -a+10 \quad \because \vec{OT} \perp \vec{d} \therefore -2+t+2t+6t=0$ $\Rightarrow T(-1, 0, -3) \quad \Rightarrow 6t+6=0 \Rightarrow t=-1$ $\Rightarrow \vec{OT} = (-1+2t, 2t, 6+t) \quad \therefore T(-4, 1, 2)$	
11	否	$3t = 3$	$3t = -3 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow O'(2, 0, 1)$	

附錄八、實驗教學回饋單

實驗教學回饋單

日期_____ 班級_____ 座號_____ 姓名_____

說明：實驗教學採用「教學→評量→重組卷→補救教學→再評量」的教學評量模式，稱之為「複式評量」。針對實驗教學，請同學們詳實地回答下列問題。

1. 實驗教學前，以數學學習的評量方式而言，除了傳統紙筆測驗外，你是否接觸過其他評量方式？（如：口頭評量、檔案評量、數學寫作、複式評量……等）

是否接觸過	請寫出名稱
<input type="checkbox"/> 是	
<input type="checkbox"/> 否	(本欄不必填寫)

2. 實驗教學中，數學課程回家練習卷「除蟲大作戰」的檢討，是請同學上台寫出訂正的答案，經老師講解正確與否後，在下一節實施「除蟲大作戰」測驗，這樣的學習方式，對你是否有幫助？並請說明。

是否有幫助	請說明原因
<input type="checkbox"/> 是	
<input type="checkbox"/> 否	

3. 實驗教學中，數學課程中使用「複式評量」作為測驗的方式，你喜歡嗎？並請說明。

是否喜歡	請說明原因
<input type="checkbox"/> 非常喜歡	
<input type="checkbox"/> 喜歡	
<input type="checkbox"/> 無意見	
<input type="checkbox"/> 不喜歡	
<input type="checkbox"/> 非常不喜歡	

4. 實驗教學後，若經常性的在數學課程中採用「複式評量」，你贊成嗎？並請說明。

是否贊成	請說明原因
<input type="checkbox"/> 非常贊成	
<input type="checkbox"/> 贊成	
<input type="checkbox"/> 無意見	
<input type="checkbox"/> 不贊成	
<input type="checkbox"/> 非常不贊成	

附錄九、數學學習成就測驗後測

桃園縣立南崁高級中學九十六學年度第一學期第三次段考試題
年級：二年級 組別：201~208 科目：數學 科目代碼：03 範圍：3-1~3-4

一、單選題（每題5分，共15分）

1. 以下各平面中哪一個與球面： $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 19 = 0$ 相交所形成的圓面積最小？(A) $x + y + z = 0$ (B) $z = -1$ (C) $y = 1$ (D) $x = 2$ (E) $x = 2y$
2. 設直線 $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ 與球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = k$ 相切，則常數 k 之值為(A) 6 (B) 7 (C) 35 (D) $\frac{35}{6}$ (E) $\frac{35}{36}$
3. 有一圓通過 $A(1, 1)$ ，且與圓 $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ 有相同的圓心 (a, b) ，則(A)圓心為 $(1, 2)$ (B)半徑為 $\sqrt{5}$ (C)圓方程式為 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ (D) $a + b = 3$ (E)圓面積為 5π

二、複選題（每題5分，錯1個得2.5分，錯2個以上0分，共10分）

4. 設方程式 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 表示 xy 平面上的一個圓，則下列敘述何者正確？
(A) $a = 1$ (B) $b = 0$ (C) c 之值可為 -2 (D) $a = c$ (E) $d^2 + e^2 - 4af > 0$
5. 設 $x^2 + y^2 - 4x + ky + 5 = 0$ 之圖形為一圓 C ，且點 $(k, k-3)$ 在圓 C 之外部，則實數 k 可為(A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3 (E) 5

三、填充題（每格5分，共85分）

1. 直線 $x - y = 3$ 被圓 $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$ 所截得的弦長 = _____。
2. 求與 $x + 2y = 5$ 垂直且與 $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 5 = 0$ 相切的直線方程式_____。
3. 圓 $C: (x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$ 上到直線 $L: 3x + 4y = 14$ 的最遠距離為_____，點的坐標為_____。
4. 圓心在直線 $y = 2x + 3$ 上且過兩點 $(1, 2)$ ， $(-2, 3)$ 的圓之方程式為_____。
5. 已知直線 $L: 4x + 3y + 4 = 0$ 與圓 $C: x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7 = 0$ 相切，則切點坐

標為_____。

6. 圓外一點 $P(-3, 6)$ 對圓 $2x^2 + 2y^2 + 6x - 2y - 5 = 0$ 所作切線段長為_____。
7. 設 $P(a, b)$ 是圓 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ 上之動點，求 $2a - b + 4$ 的最大值為_____。
8. 過點 $P(-2, 8)$ 作圓 $x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7 = 0$ 的切線，切點為 A, B ，則直線 AB 的方程式為_____。
9. 求通過 $P(4, 2)$ 與圓 $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$ 相切的直線_____（2條）。
10. 設一球面的方程式為 $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2x + 3y - 5z - 3 = 0$ ，若此球面與 z 軸相交於 A 及 B 兩點，求 A, B 兩點的距離 = _____。
11. 已知球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ ，求過點 $P(2, -1, -2)$ 且與球面 S 相切的平面方程式為_____。
12. 求直線 $L: \frac{x-3}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$ 與球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - 12z + 27 = 0$ 的交點坐標_____（2解）。
13. 球 $x^2 + y^2 + z^2 - 14x - 16y - 18z + 94 = 0$ 與平面 $x + y + z = 15$ 交出一圓，則圓心坐標為_____。
14. 設 $k \in \mathbb{R}$ ，若方程式 $x^2 + y^2 + z^2 + 4kx - 6y + 8z + 8k + 25 = 0$ 之圖形為一點，則此點坐標為_____。
15. 已知一球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 3 = 0$ ，若平面 $x + y + z + k = 0$ 與 S 相切，則實數 k 之值 = _____。
16. 球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 上有兩點 $A(1, 0, -3), B(-2, \sqrt{5}, 1)$ ，一隻螞蟻沿著球面由 A 爬行至 B ，其最小的路程為_____。

【試題結束，新年快樂】

答案卷（最高以100分計）

班級_____ 姓名_____ 座號_____

一、單選題（每題5分，共15分）

1	2	3
C	D	D

二、複選題（每題5分，錯1個得2.5分，錯2個以上0分，共10分）

4	5
BCDE	ADE

三、填充題（每格5分，共85分）

1	2	3(1)	(2)
$\sqrt{2}$	$2x - y - 13 \pm 6\sqrt{5} = 0$	8	$(-\frac{14}{5}, -\frac{22}{5})$
4	5	6	7
$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$	$(-1, 0)$	$\frac{\sqrt{110}}{2}$	$11 + 5\sqrt{5}$
8	9	10	11
$x - y + 5 = 0$	$y - 2 = \frac{1}{3}(x - 4),$ $y - 2 = -3(x - 4)$	$\frac{7}{2}$	$x - 2y - 2z - 8 = 0$
12	13	14	15
$(2, 1, 4)$ 及 $(1, 2, 8)$	$(4, 5, 6)$	$(0, 3, -4)$ $(-4, 3, -4)$	$\pm 3\sqrt{3}$
16			
$\frac{2\sqrt{10}}{3}\pi$			

附錄十、數學學習成就延宕測驗

桃園縣立南崁高級中學九十六學年度第二學期期初複習考數學科試題
範圍：第三冊3-1~3-4

一、單選題（每題5分，共15分）

1. 以下各平面中哪一個與球面： $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 19 = 0$ 相交所形成的圓面積最小？(A) $x = 2$ (B) $y = 1$ (C) $z = -1$ (D) $x = 2y$ (E) $x + y + z = 0$
2. 設直線 $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ 與球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = k$ 相切，則常數 k 之值為 (A) $\frac{35}{36}$ (B) $\frac{35}{6}$ (C) 6 (D) 7 (E) 35
3. 有一圓通過 $A(1, 1)$ ，且與圓 $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ 有相同圓心 (a, b) ，則 (A) 圓面積為 5π (B) 圓心為 $(1, 2)$ (C) 半徑為 $\sqrt{5}$ (D) 圓方程式為 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ (E) $a + b = 3$

二、複選題（每題5分，錯1個得2.5分，錯2個以上0分，共10分）

4. 設方程式 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 表示 xy 平面上的一個圓，則下列敘述何者正確？ (A) $d^2 + e^2 - 4af > 0$ (B) $a = 1$ (C) $b = 0$ (D) c 之值可為 -2 (E) $a = c$
5. 設 $x^2 + y^2 - 4x + ky + 5 = 0$ 之圖形為一圓 C ，且點 $(k, k-3)$ 在圓 C 之外部，則實數 k 可為(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) -1 (E) -3

三、填充題（每格5分，共85分）

1. 求與 $x + 2y = 5$ 垂直且與 $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 5 = 0$ 相切的直線方程式_____。
2. 直線 $x - y = 3$ 被圓 $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$ 所截得的弦長 = _____。
3. 圓 $C: (x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$ 上到直線 $L: 3x + 4y = 14$ 的最遠距離為_____，點的坐標為_____。
4. 圓外一點 $P(-3, 6)$ 對圓 $2x^2 + 2y^2 + 6x - 2y - 5 = 0$ 所作的切線段長為_____。
5. 圓心在直線 $y = 2x + 3$ 上且過兩點 $(1, 2)$ ， $(-2, 3)$ 的圓之方程式為_____。

6. 已知直線 $L: 4x + 3y + 4 = 0$ 與圓 $C: x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7 = 0$ 相切，則切點坐標為_____。
7. 過點 $P(-2, 8)$ 作圓 $x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7 = 0$ 的切線，切點為 A, B ，則直線 AB 的方程式為_____。
8. 設 $P(a, b)$ 是圓 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ 上之動點，求 $2a - b + 4$ 的最大值_____。
9. 已知球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ ，求過點 $P(2, -1, -2)$ 且與球面 S 相切的平面方程式為_____。
10. 求直線 $L: \frac{x-3}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$ 與球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - 12z + 27 = 0$ 的交點坐標_____（2解）。
11. 求通過 $P(4, 2)$ 與圓 $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$ 相切的直線_____（2條）。
12. 設一球面的方程式為 $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2x + 3y - 5z - 3 = 0$ ，若此球面與 z 軸相交於 A 及 B 兩點，求 A, B 兩點的距離 = _____。
13. 設 $k \in \mathbf{R}$ ，若方程式 $x^2 + y^2 + z^2 + 4kx - 6y + 8z + 8k + 25 = 0$ 之圖形為一點，則此點坐標為_____。
14. 已知一球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 3 = 0$ ，若平面 $x + y + z + k = 0$ 與 S 相切，則實數 k 之值 = _____。
15. 球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 上有兩點 $A(1, 0, -3), B(-2, \sqrt{5}, 1)$ ，一隻螞蟻沿著球面由 A 爬行至 B ，其最小的路程為_____。
16. 球 $x^2 + y^2 + z^2 - 14x - 16y - 18z + 94 = 0$ 與平面 $x + y + z = 15$ 交出一圓，則圓心坐標為_____。

【試題結束】

答案卷（最高以100分計）

班級_____姓名_____座號_____

一、單選題（每題5分，共15分）

1	2	3
B	B	E

二、複選題（每題5分，錯1個得2.5分，錯2個以上0分，共10分）

4	5
ACDE	BCE

三、填充題（每格5分，共85分）

1	2	3(1)	(2)
$2x - y - 13 \pm 6\sqrt{5} = 0$	$\sqrt{2}$	8	$(-\frac{14}{5}, -\frac{22}{5})$
4	5	6	7
$\frac{\sqrt{110}}{2}$	$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$	$(-1, 0)$	$x - y + 5 = 0$
8	9	10	11
$11 + 5\sqrt{5}$	$x - 2y - 2z - 8 = 0$	$(2, 1, 4)$ 及 $(1, 2, 8)$	$y - 2 = \frac{1}{3}(x - 4),$ $y - 2 = -3(x - 4)$
12	13	14	15
$\frac{7}{2}$	$(0, 3, -4)$ $(-4, 3, -4)$	$\pm 3\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{10}}{3}\pi$
16			
$(4, 5, 6)$			

附錄十一、實驗教學回饋單結果彙整

說明：S1代表實驗組座號1號之學生。

問題一：實驗教學前，以數學學習的評量方式而言，除了傳統紙筆測驗外，你是否接觸過其他評量方式？（如：口頭評量、檔案評量、數學寫作、複式評量……等）

S17：是；數學寫作。

S38：是；口頭評量。

其餘39人均答否。

問題二：實驗教學中，數學課程回家練習卷「除蟲大作戰」的檢討，是請同學上台寫出訂正的答案，經老師講解正確與否後，在下一節實施「除蟲大作戰」測驗，這樣的學習方式，對你是否有幫助？並請說明。

S2：是；讓自己反覆練習，收穫更紮實。可是我不太敢上台發表答案，讓我困擾不已。

S3：是；可以知道哪裡有錯，也可以用不同方式來算題目。

S4：是；找出錯誤可幫助記憶。

S5：是；能提供更多種的算法。

S6：是；認識多種算法。

S7：否；看不懂作法，而且太繁雜，會不想看，而且也不知怎麼改，速度較慢的人比較累。

S8：是；更加小心。

S9：是；考卷上大部分都以容易錯的（例如：觀念、公式），經由老師把這些抽出來加以訂正，蠻有效的。

S10：是；很多題目都能讓我更了解一些容易出錯的小地方，如果是題目只有純

粹計算錯誤就很無聊。

- S11：是；不過老師與我們的算式和用法不同，比較容易混淆。
- S12：否；有些公式都導出來了，只要看計算有沒有問題，效果好像不大。
- S13：是；可以發現一些評常常犯的小錯誤。
- S15：是；又再練習了一次，並且知道自己哪裡不熟練。
- S16：是；可加深對題目計算的印象。
- S17：是；可以知道不同的解法。
- S18：是；能知道哪些地方是特別容易錯的地方。
- S19：是；可以了解自己在本單元不懂不足的地方。
- S20：是；對考試有幫助，利用從錯誤找答案，讓我能避免犯相同的錯誤，並且利用前面的式子，推出正確的答案。
- S21：是；比較了解，再做測驗，就可以在一次知道自己哪裡不會。
- S22：是；可以找出平常我們計算時會犯的錯誤，也可以在加深解題的過程。
- S23：是；有時候會寫不完，但那是我自己的問題，不過除蟲常有在計算數字上的錯誤。我到覺得考卷可著重在公式運用，作業考驗計算能力。
- S24：是；計算過程能更加深印象。
- S25：是；更了解運算方式。
- S26：是；知道那題的作法，而且可以訓練細心度，自己或大家常錯的地方會變得很清楚。
- S27：是；這樣在做題目時，會對小地方注意，會更仔細。
- S28：是；幫助我更細心一點。
- S29：是；有多些練習。
- S30：是；能檢測自己不會的題目題型。
- S31：是；因為可以加深印象，而且錯過的題目不會再錯第二次，還有知道哪些

地方容易錯。

S32：是；自己會注意自己較常粗心的地方。

S33：是；有反覆練習，加深印象。

S34：是；雖然我討厭除蟲，但它真的能讓我更加細心，更加仔細。

S35：是；把常錯的小地方圈起來，以免犯下相同的錯誤。

S36：否。

S37：是；了解題目解題中易犯的錯誤。

S38：是；多少有一點。但是每個人計算的方式也不相同，所以，並不算完全有幫助。

S39：是；因為有上台加分，所以，會回家寫，考試用除蟲也不錯，因為大略看過也會寫一些。

S40：是；會讓我更小心的注意一些小細節。

S41：是；能知道其他解題方式，還有更了解自己錯的地方。

S42：是；感覺上很像在看詳解，可以知道如何去思考題目的走向，並且知道常錯的方向。但是有時會偷懶，只看錯誤的地方進行更改，而遇上了真正的考卷不知如何做題。

S43：是；了解除了自己的作法，還有可以參考老師的作法。

問題三：實驗教學中，數學課程中使用「複式評量」作為測驗的方式，你喜歡嗎？並請說明。

S2：無意見；我覺得可以讓自己了解自己不懂的地方，真是受益良多。

S3：喜歡；還蠻特別的，不錯哦。

S4：喜歡；這樣對於在做題時，會更小心、更仔細。

S5：無意見；因同一種算法看太多次，會削弱原本了解新算法的樂趣。

- S6：無意見；基本分數有保障，而後個人作業自己擔。
- S7：喜歡；能做熟基礎題，段考時就不會太緊張。
- S8：喜歡；有一直複習到的感覺。
- S9：非常喜歡；一般講義上的題目除了上課以外就很少會再拿出來讀，但這種方法會讓我們不斷的拿出來練習使印象更深。
- S10：無意見；多加練習很不錯，考試多卻也很累，特別對除蟲沒什麼好感。
- S11：喜歡；多練習一定會進步。
- S12：無意見。
- S13：喜歡；反覆練習可以加深印象，覺得很好。
- S15：喜歡；一直做練習，覺得蠻有幫助的。
- S16：喜歡；可加深對題型作法的印象，但都是一樣的，但像除蟲，只針對一種方法，不太喜歡。
- S17：無意見；覺得還蠻有用的，可以不喜歡考試。所以，無意見。
- S18：喜歡；可以多練習題目，然後就會比較清楚哪些題目該用哪些方法。
- S19：喜歡；因為可以利用本測驗方式了解不同的題型和不同解題的辦法，而且也可以發現自己在題目常出錯誤的地方。
- S20：非常喜歡；可以反覆練習很多的例子，知道自己哪裡還需要加強。
- S21：無意見；非常多次的練習，可是有時候會寫的很煩。
- S22：喜歡；為有考試才會有想看書的動力，也因為不同的題型不斷的重複出現，在寫的過程中會對題目的解題方式加深。
- S23：喜歡；非常特別，但有時候，我自己遇到狀況時會比較洩氣。
- S24：無意見；一樣的題目能使速度加快，但一遇到沒看過的題型就很容易卡住。
- S25：喜歡；能了解運算的方式。

- S26：喜歡；會一直重複，哪一個步驟沒跟到，下一階段跟上去，就來得及，不會一直不會就放在那裡。
- S27：非常喜歡；因為如果有不了解的地方，可以再聽一次，在一次測驗可以知道自己是不是真的瞭解全部。
- S28：喜歡；不會很喜歡，但是做那麼多覺得讓自己更充實了。
- S29：無意見；會有幫助，但有時候一次發太多，有時會來不及寫及消化。
- S30：非常喜歡；可以加深印象，並且讓自己不熟練的題目再做一遍。
- S31：喜歡；數學會進步。
- S32：非常喜歡；第一次考試不會或不懂的地方，經重組考卷和補救教學後，有沒吸收可以利用第二次考試來檢測。
- S33：喜歡；有時覺得很累很乏味，但是能加深印象。
- S34：喜歡；我喜歡複式評量（除了除蟲外），複式評量讓我有動力去演算題目，也讓我對數學每章節的型能了解很多。
- S35：喜歡；不斷的複習，比起只考一張大張又難的黃卷，感覺更有幫助。
- S36：喜歡；題目看過，寫起來比較簡單。
- S37：喜歡；對基本題目能了解，知道做題目常錯誤的地方。
- S38：喜歡；好處是可以多練習基本的題型，反之則是一直做一樣題型的，而且考試並不會出那麼簡單給我們寫，所以有好有壞。
- S39：非常喜歡；因為分數可以拉高，先回家寫過，考試出現類似，一再出現，爲了得分，會把不會的搞會。
- S40：非常喜歡；因為我對題目的熟悉度會越來越好。
- S41：喜歡；因為我們是弱勢的社會組，這種方式比較容易幫助我們把握基本題，建立信心，有了重組卷和蟲蟲卷的測驗就足夠了，以前高一考的大張黃色測驗卷是多餘的，考起來也是一種負擔。

S42：非常喜歡；我沒有參加補習或者買參考書，而學校的教材和老師的補充成了最好的參考和練習這種複式評量一直重覆相同或類似的題目，所以印象非常深刻。

S43：喜歡；感覺學數學還有別的方式，不一定只有要你寫答案而已，還蠻有趣的。

問題四：實驗教學後，若經常性的在數學課程中採用「複式評量」，你贊成嗎？並請說明。

S2：無意見；效果應該不錯。

S3：非常贊成；因為數學會漸漸進步。

S4：贊成；這樣可比較容易了解。

S5：贊成；對於期末總平均是否跨過門檻有很大的幫助。

S6：不贊成；有那麼一點……的煩人。好事情偶而為之即可。

S7：贊成；只要有用就贊成。

S8：無意見；其實用什麼都可以，主要是自己有沒有下功夫去練習。

S9：非常贊成；雖然我數學成績一直都是在很不OK的狀況，但真的一次有比一次進步（我3-3得除蟲卷及格呢），或許是我起步太慢，所以，希望老師下學期也可以用這種教法。

S10：贊成；數學就不斷地反覆練習，來吧。

S11：贊成；大家成績一定會上升的。

S12：無意見。

S13：贊成；感覺數學慢慢在進步。

S15：贊成；知道基礎的題型，並且熟練。

S16：贊成；多練習，知道自己哪裡不熟。

- S17：贊成；可是可以用上課的方式，不一定都要用考試的方式。
- S18：贊成；可以知道哪些地方該多加注意，還有什麼地方自己容易出錯。
- S19：無意見；每種教學方式各有優缺點，我都應該可以適應。
- S20：贊成；可以反覆練習很多的例子，知道自己哪裡還需要加強。
- S21：贊成；可以多次練習，加強印象。
- S22：贊成；可以算的題目也多，我覺得數學就是要不停的算，不停的練習，才會的。
- S23：贊成；數學日誌可以讓我了解自己對每堂的理解程度，可以依日誌來評判自己的學習狀況而且每當日誌一片空白時，就可以發現自己的恍神很大，可以加以改進。
- S24：無意見；有時候會覺得很浪費時間，但是有時候能知道還不太熟練的是什麼。
- S25：贊成；能了解運算模式且運用在其他類似的題目上。
- S26：贊成；感覺很輕鬆，也很有親切感。
- S27：非常贊成；因為可以了解自己的學習狀況。
- S28：無意見；有時候覺得做那麼多，壓力會大，但是也是對自己有幫助。
- S29：贊成；這樣可以有更多的學習機會。
- S30：非常贊成；經由這種作法，我覺得我的數學能力有提升，而且做起題目也不會覺得很陌生。
- S31：贊成；數學會變好，有時候寫不完。
- S32：非常贊成；就有兩次機會。
- S33：不贊成；感覺上課都是一直考試有點累，可以偶而改變一下，就像每天吃麥當勞，就不好吃。
- S34：非常贊成；（除了除蟲外），我很喜歡這樣的教學，可以逼同學讀書，再

過不久，就要打敗自然組。

S35：非常贊成；一直測驗，付息對我的數學成績，很有幫助。

S36：贊成。

S37：贊成；對基本題目了解，建立信心。

S38：贊成；可以多多練習基本題。

S39：非常贊成；因為利用這種重複的方式，可以練習很多次。

S40：非常贊成；因為我覺得這樣的方法很適合我，真的很棒。

S41：贊成；多次的練習，而是不同方式層面的演練，覺得真的比較有效，把練習拉一部份到課堂時間做，而不是把練習當作回家的作業，會比較有用。

S42：無意見；基本題算熟了，再多一點廣泛的學習也不錯，才不會機械化，其他題目就不會。

S43：贊成；重複練習很多次，會更加深印象。