ABSTRACT

$\sum_{i=0}^{k} C_i^{2i} C_{k-i}^{2k-2i} = 4^k$ is a famous identity in Combinatorial Mathematics. It is usually obtained by Generalized Binominal Theorem, however, the concept of Generalized Binominal Theorem is not easy to understand. So we hope to find a simple way to deal with this problem.

First, we take $\sum_{i=0}^{k} C_i^{2i} C_{k-i}^{2k-2i}$ and $4^k (= 2^{2k})$ corresponding to the square paths with a check point and the isosceles right triangle paths, respectively. Finally, we find a bijective proof in-between.

中文摘要

$\sum_{i=0}^{k} C_i^{2i} C_{k-i}^{2k-2i} = 4^k$ 是一個在組合數學中著名的二項等式，它是使用廣義二項式定理的方法推導得來的，但是廣義二項式定理在組合數學中，算是較為艱深的工具；所以，我們希望能使用較為簡單的數學工具，來處理這個問題。

在課堂上老師曾提過劉麗珍學姊使用 Dyck path 來處理這個問題，但轉換的步驟有點複雜繁瑣；所以，我們希望能找到另外一種較為簡單且具有幾何意義的對應方法：

首先，將 $\sum_{i=0}^{k} C_i^{2i} C_{k-i}^{2k-2i}$ 和 $4^k (=2^{2k})$ 分別對應到 $k \times k$ 正方形路徑(包含檢查點)和 $2k \times 2k$ 等腰直角三角形路徑上(對應方法見 第三章的 3.1 和 3.2)，接著證明 $k \times k$ 正方形路徑(包含檢查點)和 $2k \times 2k$ 等腰直角三角形路徑之間的轉換對應，為一對一且映成(見 第五章的定理 1、定理 7.1 和定理 7.2)。